This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACA7836
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 41032871//r84
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B110886
035/2: : |a (CaOTULAS)160330417
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d MiU
050/1:0 : |a QA36 |b .B6
082/1:0 : |a 510
100:1 : |a Bólyai, Farkas, |d 1775-1856.
245:00: |a Wolfgangi Bolyai de Bolya Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, |b cum appendice triplici.
250: : |a Ed. 2 ...
260: : |a Budapestini, |b sumptibus Academiae scientiarum hungaricae, |c 1897-1904.
300/1: : |a 2 v. |b incl. front. (port.) plates (diagrs.) and |e atlas of diagrs. |c 30cm.
500/1: : |a With reproduction of original title-pages.
505/2:0 : |a I. Conspectus arithmeticæ generalis. Mandato Academiæ scientiarum hungaricæ suis adnotationibus adiectis ediderunt Julius König et Mauritius Réthy.--II. Elementa geometriæ et appendices ... ediderunt Josephus Kürschák,

---

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN.

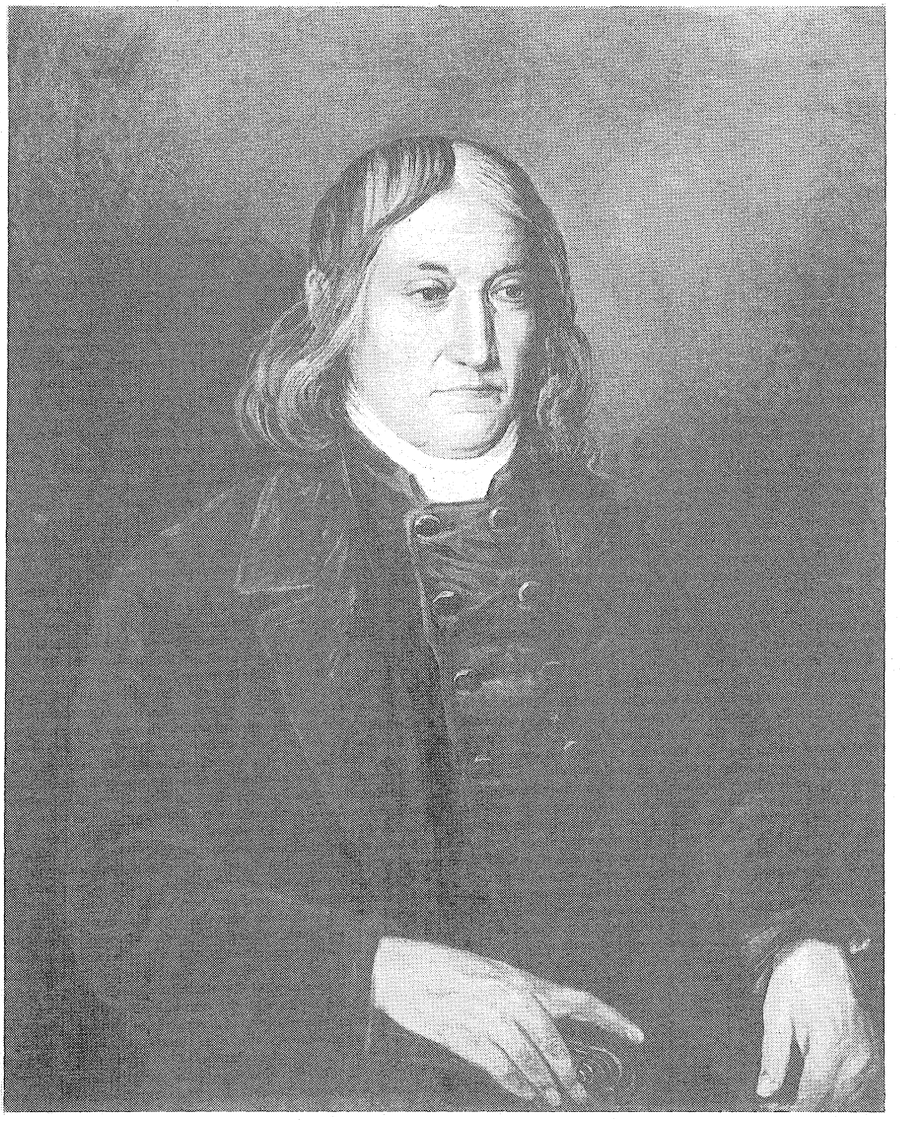
EDITIO SECUNDA.

TOMUS I.

Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google



Bolyai Farkas Mat.

Hosted by Google

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS I.

CONSPECTUS ARITHMETICÆ GENERALIS.

MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUIS ADNOTATIONIBUS ADIECTIS EDIDERUNT

IULIUS KŐNIG ET MAURITIUS RÉTHY

ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

ACCEDIT EFFIGIES AUCTORIS.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.

MDCCCXCVII.

Hosted by Google

TYPIS SOCIETATIS FRANKLINIANÆ.

Hosted by Google

PRAEFATIO EDITORUM.

Opus WOLFGANGI BOLYAI «Tentamen» inscriptum atque «Appendix» filii eius JOANNIS eidem adnexa cogitatis ex ipsis auctorum ingeniis haustis, nec non audacia argumentationum inde deductarum æque excellunt, neque immerito animos omnium scientiarum fautorum cum admiratione in se converterunt.

Huius admirationis ratione habita Academia scientiarum Hungarica ita sibi persuasum habens, se, si opus hoc denuo et in forma auctorum digna ediderit, summopere profuturam esse ipsi scientiæ, novam hanc editionem adornari constituit, curamque et negotium huius operæ exsequendæ nobis infra scriptis commisit.

Cum itaque primum operis tomum publici iuris facientes negotii a nobis suscepti partem exegisse videmur, rationem reddere volumus, quomodo in exsequendo opere versati simus.

Conditiones sinistræ, quibus impeditus WOLFGANGUS BOLYAI «Tentamen» suum conscripsit et tenuitas instrumentorum typographiæ cui impressio operis committenda erat, non tantum elegantiæ formæ sublimis huius operis obfuit, sed etiam lectionem libri sæpe perdifficilem reddidit. Hæc incommoda a nova hac editione uti potuimus conati sumus amovere.

Edito tandem operi ipse auctor per duodecim annos nunc longioribus nunc brevioribus temporis intervallis intercedentibus non paucas addidit emendationes; has, ubi ratio postulabat, contextui operis inseruimus, sive errores in iisdem indicatos emendavimus. Observationes

Hosted by Google

vero auctoris, quas reapse contextui inseri non videbatur opportunum, si breviores fuerunt calci paginarum apposuimus, sin longiores, inter additamenta et adnotationes ad finem operis appositas relegavimus.

Inter errores calculi in expositione exemplorum occurrentes etiam tales inveniuntur quos Bolyai propter imperfectam rationem impressionis tardius nec ipse animadvertere potuit; nos omnia ista exempla summa cum cura denuo percensendo, ocurrentia menda — minuta sane — ad mentem auctoris emendando eliminavimus.

Sponte intelligitur nos in eo elaboravisse ut mutationes quas necessarias existimavimus quam minime discrepent a ratione auctoris, præterea de una quaque in adnotationibus accuratam rationem reddidimus. Huic curæ solum in rebus minimis, velut in interpunctionibus, supersedere placuit.

Adnotationibus addidimus etiam elucidationes nostras, quibus quædam loca operis illustranda esse duximus.

In figuris etiam quædam mutanda erant, ubi delineationes ipsius Bolyai ad illustrandum textum minus idoneæ fuerunt.

Ut conspectum totius operis faciliorem redderemus utile visum est opus totum in sectiones dividere, quarum cuique suum titulum præposuimus, porro omnia quæ ad arithmeticam referuntur in hoc primo tomo collegimus, partes vero geometricas, cumque his etiam «Appendicem» Joannis Bolyai secundo tomo reservavimus.

Symbola mathematica quam artissime fieri posuit conformiter edi-

Hosted by Google

tioni primæ applicuimus, ubi vero facilitati lectionis consulturi quædam mutanda esse vidimus, nonnisi euismodi formarum mutationes admisimus quæ modum ratiocinationis nullatenus afficiunt. Sic ex. gr. signa $>$, $<$ vulgari sensu adhibuimus signa vero $\succ$, $\prec$ in comparatione valorum absolutorum, contra quam Bolyai, qui ceterum sive inopia typographiæ impeditus, sive per incuriam hac in re parum sibi constat. Similiter in designandis functionum diversitatibus pro signis a Bolyai excogitatis satius visum est communiter adhibitis uti sicut et in designatione quantitatum imaginariorum quædam mutanda censuimus (V. pag. 628). At signa peculiaria ratiocinationi Bolyaii specialiter adaptata velut designationes differentialium et quotientum differentialium immutata reliquimus.

Sane possunt alii aliter rem concipere, nos certe persuasum habemus his mutationibus lectionem Tentaminis faciliorem esse redditam, et ut rationem procedendi nostram probemus, possumus afferre verba ipsius Bolyai, viri certe optimæ auctoritatis, qui in lucubratiuncula «Recensio per auctorem ipsum facta» inscripta, quam in fine tomi secundi edituri sumus, futurorum operis editorum attentionem ad has mutationes evocat.

Reddita hoc modo ratione procedendi in accuranda hac nova editione gratissimi nostri officii ducimus hic gratias agere participibus operis nostri, nominatim sodali nostro academico domino Henrico Finály et collegæ nostro professori domino Béla Tőtössy.

Finály, cuius consilio in rebus ad correctionem elocutionis spectantibus usi sumus, annotationes nostras, lingua vernacula conscriptas in

Hosted by Google

Latinum vertit, quod eo difficilius erat, quia sine accurato studio ipsius «Tentaminis» fieri non potuit.

Domino Tőtössy obligati sumus pro figuris accuratissime delineatis, quæ huic tomo adnexæ certe magnopere proderunt lectoribus operis.

Gratias habemus etiam Domino Josepho Koncz professori collegii Marosvásárhelyensis, qui præter «Recensionem» supra laudatam etiam subscriptionem propria manu factam Wolfgangi Bolyai et exemplar primi tomi tentaminis notis marginalibus illustratum, sane mancum, quod olim Joannis Bolyai fuerat, utenda præbuit.

Budapestini 1896.

Kőnig, *Réthy*.

Hosted by Google

HOC TOMO CONTINENTUR:

Pag

Præfatio Editorum ... V
Index tabularum I—XI in fine huius tomi ... X
Signa et vocabula, a Bolyai inventa ... XI
Simulacrum tituli editioni primæ præfixi ... 1
Præfatio ipsius Auctoris ... 3
Introductio ... 5
Prævie notanda ... 11
Sectio I. Primæ lineæ Arithmeticæ generalis ... 22
Sectio II. Calculus differentialis et integralis, et primæ lineæ calculi variationis ... 204
Sectio III. Primæ lineæ theoriæ æquationum ... 372
Sectio IV. Additamenta in præcedentibus tradita concernentia ... 479
A) De beatitudine ... 479
B) De proportionibus, logarithmis, numerationeque arabica ... 481
C) De operationibus vulgaribus decadicis ... 496
D) Applicationes (pag. 109) quædam ... 512
E) De methodo heterogenea in calculo tractandi ... 521
F) Dilucidatio quorundam conceptuum in sectione prima traditorum ... 524
G) Relatio brevis additamenti antecedentis ... 540
H) Dilucidatio nova eorundem conceptuum & ... 544
I) Primæ lineæ theriæ combinationum ... 556
K) Ratio tabularum in tabulis trigonometricis logarithmicisque datarum ... 569
L) Criteria convergentiæ serierum ... 582
M) Primæ lineæ calculi differentialis et integralis brevius et clarius tractatæ ... 592
N) Expositio brevis methodi, qua primæ lineæ calculi differentialis in opere hungarico tractantur ... 610
Adnotationes Editorum ... 613
Errata ... 678

Hosted by Google

INDEX TABULARUM

ET PAGINARUM, QUIBUS FIGURÆ TABULARUM TRACTANTUR.

Tab.	Fig.	Pag.
I.	1	52
	2	52
	2	63
	4	53
	5	53
	6	53
	7	53
	8	54
	9	54
	10	54
	11	54
II.	12	54
	13	55
	13	56
	14	55
	15	60
	15	61
	16	62
	16	98
	17*bis*	199
III.	17*a*	64
	17*a*	65
	17*b*	64
	17*b*	65
	17*c*	64
	17*c*	66
IV.	18	209
	19	206
	19	211
	19	212
	20	213
	21	233
	22	234
	23	235
	23	239
	24	245
V.	25	250
	26	261
	27	262
	28	270
	29	290
	30	291
	31	291
	32	291
VI.	33	292
	34	293
	34	297
	35	293
	36	296
	36	297
VII.	37	298
	38	303
	39	305
	39*	305
VIII.	40	305
	41	306
	42	306
	42	355
	43	306
	44	309
IX.	45	308
	45	309
	46	308
	46	309
	47	308
	47	309
	48	308
	48	311
	49	316
	49	320
	49*	346
	50	317
	50*	347
X.	51	352
	52	356
	53	358
	54	366
XI.	55	460
	56	462
	57	463
	58	472

Hosted by Google

SIGNA ET VOCABULA,

A BOLYAI INVENTA, QUAE IN HOC TOMO REPERIUNTUR IPSIS AUCTORIS VERBIS EXPLICATA.

$A \doteq B$	denotatur	A absolute æquale ipsi B (pag. 25),
$A \dot{=} B$	»	A quoad contentum æquale ipsi B (pag. 26),
$A = B$	«	$A' \doteq B'$, si A', B' denotent quantitates A, B, postquam reductæ fuerint (pag. 27),
$z \backsim \alpha$	«	z tendit ad limitem α (pag. 35),
$T \overset{\circ}{=} t$	«	$\frac{t}{T} \backsim 1$ (pag. 214), ubi T et t æquipollentia dicuntur,
$A \Subset B$ vel $B \Subset A$	«	expressionis A dictae valor quivis alicui valori expressionis B æqualis (pag. 124),
$A \Subset B$	«	quilibet valor cuiuslibet expressionum A et B æqualis alicui alterius valori (pag. 124),
$\boxplus$, $\boxminus$	«	positivum, negativum (pag. 28),
$-A$	«	$\boxplus B$ si A denotet $\boxminus B$, et $\boxminus B$ si A denotet $\boxplus B$; adeoque oppositum ipsius A, ut dici solet, $+A$ vero ipsum A denotat.
$\rhd$ et $\lhd$	«	aliud, quam per $>$ et $<$ (pag. 27),*

Per literas latinas græcasque (nisi aliud monitum fuerit) *quantitates* denotantur, et per

literas germanicas (nisi aliud monitum fuerit) linearum *certa puncta*, ita ut $\mathfrak{ab}$ denotet *lineam* quæ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est.

* Vide adnotationem pag. 616.

Hosted by Google

$\sqrt[*]{4}$	denotatur	2; inde quid per $\sqrt[*]{P}$ intelligatur patet (pag. 124),
$\dot{x}$	«	$\frac{x}{n}$, si x variabilis absoluta sit (pag. 209),
$\dot{y}$, $\dot{z}$	«	incrementa simultanea variabilium y, z pro m-to $\dot{x}$ (pag. 220),
$\partial A(x)$	«	differentiale ipsius $A(x)$; verum (pag. 217), strictius (pag. 217), generalius (pag. 220), purum (pag. 221), partiale (pag. 222),
$\partial A(x)$	«	cœfficiens differentialis heic derivata dicta, (pag. 207), derivata pura (pag. 221), partialis (pag. 222),
$\partial^n A(x)$	«	differentiale n-tum (pag. 207),
$\partial^n A(x)$, $\underset{n,\,x}{A}$	«	cœfficiens differentialis n-tus; derivata n-ta (pag. 207, 341).

Vocabula sequentia, locis annotatis explicantur.
Pars indivellibilis, *portio* (pag. 23),
pure imaginarium (pag. 121),
logarithmus et potentia elementaris (pag. 50),
logarithmus et potentia sensu sublimiori (pag. 193),
functio absoluta, et *variabilis absoluta* (pag. 206),
aequipollentia (pag. 214),
quantitas concreta (pag. 111).

Hosted by Google

TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI,

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Primus.

Maros Vásárhelyini. 1832.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Hosted by Google

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die
12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m.p.
Abbas, Parochus et Censor
Librorum.

Hosted by Google

LECTORI SALUTEM!

Vix rudimentis primorum elementorum superficialiter imbutus, proprio nutu, sine ullo alio fine, nonnisi interna veritatis siti ductus, fontem ipsum quærendo; fundamenta tentaminis hujus, imberbis adhuc juvenis posueram: quod, cum ita vacare a negotiis, ut res ista postularet, frustra amplius sperem, qualecunque sit, edere decrevi; ut aut acutiora ingenia, in otiis quæ mihi defuere, perfectius quid præstent, aut alii eodem igne fatuo per tenebras illusi, viam tritam haud deserant, operamque, pretium ejus non facturi, alio locent.

Certe, tantum abest, ut auctor fieri unquam voluerim; ut sine discipulorum gratissimorum impulsu haud quidquam edidissem.

Primaria tantum fundamenta heic ita tradere propositum est; ut Tyrones, quibus abyssum levibus pennis trajicere, merisque imaginibus, nullo originali gaudentibus, in auras vix respirabiles tolli haud datum est, pede firmiore progressi, evehantur ad sublimiora.

Ingratam dixeris operam; cum celsa ingenia, supra vallium ambages, per apices alpium gradiantur: at certe nodi ubique gordii adsunt, gigantum gladios requirentes — Neque pro iis scriptum hoc est: sed pluribus saltem ejusdem mecum indolis futuris; quibus si vires tempusque, quæ mihi, donec quadamtenus conquiescere potui, impendenda fuere, servaturus sim, operam haud perdidi. —

Monitos quippe (meo exemplo) juvenes velim: ne laborem sex millium annorum aggressi, proprio marte, jam olim inventis quærendis vitam deterant; discant prius grati, quæ priores docuere; et provisa re ædificent: si quid autem scripserint, videant, oraculum conscientiæ interrogando, ne quid peste communi, quæ et spiritus a terrestribus vinculis liberos cœlo dejecit, correpti edant; nisi quid in emolumentum scientiæ, saltem

Hosted by Google

culturæ communis proferant; et nil quidem admirantes, (non ut ipsi admirandis similes videantur, sed quod effectus quivis caussæ par sit), vires majores modeste agnoscendo, suis acquiescant. Ac certe in tanta scriptorum turba, non scribere fit rarius; adeo ut fere is monumentum mereatur, qui legere scribereque sciens, sine ratione prægnante scriptor non fit: de re agitur; quidquid boni fuerit, seriei infinitæ terminus antecedens est; honos autem nomenque auctoris unici manet, quo innominato, prodeunt arbores herbæ floresque, cum hymnis simplicibus, quibus amplum naturæ templum resonat. — Atque demum, et veri nominis scriptores, (etsi malignitati, quæ libros solum teredinibus posteris relictura, auctores ipsos corrodit, superstites esse queant), si terra duret, ut soles in via lactea in nebulam confluent; nec quidquam in mundo externo est, (sive systematis orbium, sive lucerna unius vesperæ fuerit), quod non aliquando intereat; et nonnisi conscientiæ vere bonæ purus jugisque fons, Deo teste gaudens, illi coævus est.

Equidem, licet generis humani gratitudine dignum censeam, qui finem quem mihi proposui, feliciter assecutus fuerit; cum grana tantum arenæ ad pyramides magis aliorum gloriæ attulerim: si non *Senecæ* dicto me ipsum consoler, *Suspice viros etsi deciderint, magna conantes*: hoc saltem laboris pretium petam; ut voluisse quoque puro veritatis amore dulce sit; et errores, quos partim per omissionem, partim per commissionem, a homine occupato, vita millefariam divisa, direptaque, (valetudine infirma, raroque inter nubila perpetua apparente cœlo), et penuria librorum mathematicorum recentioris ævi evitare vix possibile erat, benigne emendentur. Certe quo magis res perficietur, et quo magis superer: eo lubentius succumbam. Denique tantum valeat, quantum valet — et Tu LECTOR CANDIDE vale!

Hosted by Google

INTRODUCTIO.

Duæ sunt indelebiles divinæ effigiei lineæ, *veritas* et *amor*; lumen calorque, stamina radii solis æterni in argilla mortali micantis, cuius nitor per nubes infiniti transmissus in mundo tam externo, quam interno pulchritudinem Originalis ipsius absolutam indicat; relative pulchrum dicimus, quod illius sensum in nobis excitat, nubila sancta revellens, ut lux verna cœlipetes alas motitet, via in beatam patriam in infinito aperta: necessario impellimur

1. Ad instar supremi stupendum omne penetrantis oculi, sine fine ullo eo niti, ut in quantum fieri potest, totum quo penitius perspiciamus.

2. Ad instar supremi infinitum orbem amplectentis Patris, expansis brachiis erga omnia entia sentientia, aut intelligentia, ubivis in tempore et spatio fuerint, eniti, ut amore reciproco uniantur omnia, disharmonia ad concentum beatitudinis quam maximæ (tam quoad intensionem quam quoad extensionem) omnium, et singulorum perducenda. —

I. VERITAS.

Veritates dividi possunt in *æternas* id est de iis sonantes, quæ in omni tempore sunt, et *temporaneas*, nempe de iis tractantes, quæ in certis tantum temporibus sunt (adeoque in præsenti præterito aut futuro). Præteritum referre *Historiæ* est; evolutionem omnis generis, mundi externi internique explicando, ut intelligatur, cur præsens ita sit; superiorum intellectuum esset problema resolvere, (cum præsens filia præteriti, materque futuri sit, et illud in effectu, hoc in caussa ad præsens reducatur) e dato præsente futurum et partim præteritum reperire. —

Hosted by Google

1. Repræsento, cogito, ratiocinor: quæ sint formæ activitatis hujus? et an respondeat ei aliquid extra repræsentationem? dependeatque ista ab eo? porro quæ loca ultima, in quæ repræsentationes una post aliam, et repræsentata unum extra aliud (nempe mundus externus) ponuntur? quærit *Philosophia*.

In ultimariorum horum locorum, temporis nimirum spatiique, uti in intuitu per abstractionem remanent, naturam inquirit *Mathesis pura*, quæ fiet *applicata*.

Utrumque e nexu repræsentationum segregatur, ut cogitationis objectum esse queat; nec quasi per eas positorum iisque connatorum realitas heic præter intuitum asseritur negaturve.

Ratiocinari dicimur, dum e propositione, vel propositionibus A, B,... quærimus novam.

Propositio dicitur, quod ad formam hanc reduci potest: ‚A est (B vel cum B)'. Dicitur A *subjectum*, B *prædicatum*. *Conversa* eius dicitur hæc: ‚B est (A vel cum A)'. Si B denotet non C, tum ex ‚A est cum B', fit ‚A est cum non C'.

Propositio e simplicibus componi, at composita quoque ad formam dictam reduci potest. Tam A quam B potest esse compositum, et quidem pluribus modis: collective, disjunctive, condicionate, aut certo modo determinative.

Aliquid, *aliqua* vel *omne* opponitur *nulli*, *omni* vero *non omne*; et *non omne* est aut *nullum* aut *aliquid* vel *aliqua* exclusive. Etiam ipsum A aliquid ex A est. Subjectum A potest denotare aliquod, aliqua, vel omne, vel non omne, etiam nullum certorum a, b,.... Si A denotet non omne dictorum, et B denotet non C, ex ‚A est cum B' fiet ‚*non* omne ipsorum a, b,... est cum non C'. ‚Nullum A est cum B' potest exprimi per ‚omne A est cum non B'. Potest sive subjectum sive prædicatum imo utrumque disjunctivum, imo etiam propositio esse, ex. gr. ‚A est aut cum B, aut cum C'; ita ‚aut A aut B est cum C'. Ita ‚A *est cum* B est cum C *est cum* D'; id est si A est cum B, tunc C est cum D. Variæ adhuc multiplices compositiones fieri patet.

Hosted by Google

Definire est nomen dare conceptui cuidam, aut rei cujusdam qualitatem ei soli propriam exponere.

Definitio exacta est, si sit quam simplicissima, nec contineat talia A et B, ut per A ponatur B.

Interim, conceptus qualesvis constructos, absque eo, ut realitas eorum constet, aut asseratur, imo etiam si impossibilis sit, quovis signo aut verbo denotare licet; at signa æqualia denotent semper æqualia, nisi aliud monitum fuerit; inæqualia signa vero, ideo tantum quod inæqualia sunt, non debent inæqualia denotare. —

Axioma est talis propositio, quam ita esse quævis mens sana humana, sine ulla ratione alia, natura sua intuetur.

Demonstrare aliquid B, est ostendere illud per A, nempe complexum axiomatum et definitionum necessario poni, adeoque A essse cum B.

Propositio demonstrabilis *Theorema* audit.

Scientia vel potius *Systema scientiæ* est complexus ordine perspicuo coordinatus definitionum exactarum, a simplicissimis conceptibus incipiendo et ex constructis ad novos magis compositos progrediendo (donec ii prodeant, qui duntaxat omne id, quod eo pertinet, complectuntur), et axiomatum simplicissimorum, quorum nullum sit, quod e reliquis deduci queat, atque propositionum ex iis demonstratarum.

Nec omnia definiri queunt, nec omnia demonstrari regrediendo in infinitum (veluti spatii fundus attingi nequit). — Sunt quorum nulla ratio ulterior videtur, et sunt quæ definire ulterius verba clariora non habemus, quæ colligere operæ pretium esset.

2. E loco mundi externi ad ipsum stupendum omne redeo, structuram mechanismumque perspicere studens immensi horologii, cuius catena ex annulis innumerabilium viarum lactearum fluit, nec pondus fundum ullum petit, ac tabula horaria solis lunæque orbitis et mille aliis lucidis circulis picta est. — Opus summi mechanici, unicum mobile perpetuum.

Templum magnificentissimum, columnis variorum ordinum ornamentis variis insignitorum, de cuius fornice ardent myriades solium lucernæ, sphæris in laudem numinis invisibilis concinentibus. Opus summi architecti.

Hosted by Google

Liber, cujus totus mundus aspectabilis non nisi compactio externa est, et admiranda illa siderum igne scripta hieroglypha titulus operis Authoris summi est.

Mechanismum horologii intelligere, templi delineationem, columnas, lapides cæmentaque jungentia reperire, literasque ultimas cognoscere et clave scripturæ arcanæ reperta sententias, totumque legere desideramus. Opus per omnem æternitatem continuandum.

Hoc qærit *Physica* (externa sensu lato) et quidem cum applicatione matheseos. Mathesi exstruitur scala Jacobi, qua in cœlos scandimus, unde igneis alis ultra omnes vias lacteas oceanumque solium ardentem tollimur in sacrosanctam noctem penetraturi, ubi Pater summus brachiis infinitis totum orbem amplectitur et quo immanibus per vastum jactatos procellis redeuntes excipit liberos.

II. AMOR.

1. E mundo externo ingredimur in internum externo respondentem, naturam ejus scrutaturi. *Psychologia pura*, seu *Physica interna* in animarum naturam inquirit. Porro cum facultas volendi ad naturam animarum pertineat, leges voluntati ab æterno præscriptas docet *scientia moralis pura*.

2. In unione mundi utriusque, in naturam animarum, uti in concreto sunt, quærit *Psychologia empirica*; nempe infinitæ totius divitiæ in diversitatis unitate et unitatis diversitate consistunt: stupendum omne unum est, in unione duorum systematum (spirituum et corporum) vivum, mundus externus interni expressio et quasi facies est, legibusque similibus utrumque tenetur, sibi invicem respondentibus; ita animæ omnes se invicem attrahentes attrahuntur a Deo tamquam centro amoris universalis; et dantur aliæ vires quoque, uti in mundo externo, quæ planetas in suos soles decidere haud sinentes in orbitis agunt; si nulla vis alia esset præter attractionem, totum perpetuæ quietis tumulo, quasi immensum cadaver jaceret. —

Hosted by Google

Huc pertinet etiam, in notam regulasque inquirere eorum, quæ nobis in dicta unione (sensu superius dicto) pulchra sunt. Objectum *Aestheticæ*.

Quidnam sit in ista mundi utriusque unione agendum, ut omnes orbitis se mutuo haud offendentibus celerrime curramus ad finem amoris universalis supra dictum consequendum: docet *scientia moralis applicata*; quo etiam *jura* omnis generis pertinent. *Officium* est (subjective) necessitas illa dulcis, qua quilibet undevis ad finem dictum ducitur, itque; dummodo via collustrata sit et affectuum terrestrium vincula cœlestem infantem haud detineant. *Officium* (objective) est via ipsa. Officia omnium omnia consentiunt, ut veritates omnes: et quatenus cujusvis officium est alium in suo faciendo haud impedire, dicitur *jus hujus*; quod (uti officium) pro diversa determinatione vario nomine insignitur. Vita juxta normam præscriptam acta, reddit imaginem Dei visibilem, quæ de originali ejus testificatur, et pallidum temporis occidentem æternitatis aurora collustrat. Virtutis exercitium est lumen solare, quo cœlestes fidei flores aperiuntur, gemmis de humi defixis vultibus lectis nitentes.

Innatum Dei, moralitatis immortalitatisque sensum excitat, dulcique et ineffabili quadam voluptate perfundit e puro matheseos fonte hausta veritas, atque ejus ope penitior naturæ externæ internæque cognitio: adeo ut veritas prodeat in mundum vivens, nascaturque virtus.

Majestas vultus numinis ubique præsentis, nusquam visibilis, sed per quod videntur omnia, radiat e cœlis et terris, atque dum e radiis ad solem, unde prodeunt, ex imaginibus in mundo expressis ad originale elevamur, inter furentes orbis procellas, tranquillitas divina descendit in pectora mortalia, et fluctibus compositis abyssus consolantia refert sidera; jactatique diu demum fessique ad oras huius mundi, clausis in infinito Patris omnium sinu oculis, conquiescimus.

Summum itaque claudit fastigium *Theologia*, quæ mundo tamquam in deserto erranti orphano Patrem ostendit, viamque per vicissitudines itineris quasvis ad eum ducentem face Sacræ Scripturæ collustrat, atque detracta atroci mortis persona angelum demissum revelat, qui fracto cortice externo cœlestem volucrem tollat. Neque evenit quidquam in terris sublimius, quam dum idea Dei in homine interno evolvitur, atque

Hosted by Google

in finito quasi infinitum apparet, primus novi angeli pulsus; polis quasi inversis mutantur omnia, finis annorum omnium fit novi initium, et senis terram petens corpus fiunt exuviæ cadentes embrionis ad lucem evolaturi, amaritudo maturescentia, vulnera ostia ad cœlum aperta, dolores fluxi partus gaudiorum permanentium, et crux tetra fit lux mundi, ✠ quo ⊢⊣ tollitur.

Hosted by Google

PRAEVIE NOTANDA.

A.

Axiomata et inde praevie deducenda, ne in casibus iteranda sint, formulis generalibus exhibita (intuitu spatii specialiori suo loco reservato).

Mens de quovis casu ut de flumine quærens unde veniat, de caussa ad caussam ascendens, subsistit ubi ulterius progredi nequit, et si ibi veritates reperit tales, quas sine ulteriore caussa ita esse intuetur, conquiescit, atque veritates ejusmodi in casibus repertas formulis generalibus exponit; partim ob brevitatem, partim ut clare perspiciatur, quænam sint, quæ per se asseruntur sine demonstratione et quod sit systematis totius fundamentum.

I. Tempus est quantitas continua; sed non nisi expers ex eo adest, et semper aliud atque aliud est; atque per quodvis tale, in præteritum et futurum undevis et utrinque absolute æqualiter discerpitur (abstrahendo a directione præteriti et futuri).

II. Tempus quodvis finitum, quod non fuit, adveniet, omne nunquam. Sæpissime est, quod aliquid de quovis dici potest, de omni non.

III. Id quod est sub parte p temporis experte aut cum *ita* aut cum *non* ipsius B (id est aut *cum* B aut cum *non* B) est.

IV. Si per A et B poneretur *ita* et *non* ipsius C sub p, atque A est, tunc B non est; et si A non est, tunc B est. Hoc est fundamentum demonstrationis apogogicæ, et concluditur modo sequente.

1. Si B sit propositio formæ sequentis, *a non est cum x*, et A *est*, tunc B *non est*; nempe non est id, quod a non est cum x; sed aliquod adesse debet (III), nempe aut *a est cum x*, aut *a non est cum x*,

Hosted by Google

posterius non est, adeoque alterum nempe id, quod *a est cum x*, est. Hinc etiam ubi prodibit, non esse id, quod *Q non est cum Z*, absque iteratione dictorum poterit concludi, *Q esse cum Z*.

2. Si *B* sit formæ *a est cum x*, et *A est*; tunc *B non est* id significat, quod non est id, quod *a est cum x*; id est *non est a cum x*. Itaque sicubi constiterit esse et non esse ipsius *C* per *B* et *A* (veritatem, aut veritates perpetuo vel per hypothesin stabilitas) simul posita simul poni: modum relatum toties quoties iterare supervacuum erit.

V. Quidvis est id, quod est, et sibi perfecte æquale est. Si autem *A* et *B* absolute æqualia sint, atque afficiantur operationibus *D* et *E* absolute æqualibus: cuilibet resultato ipsius *A* cum *D* adest inter resultata ipsius *B* cum *E* resultatum æquale.

Si operatio sit unici resultati, id est si talis sit, ut resultatum ipsius *A* sit nonnisi *a* et resultatum ipsius *B* sit nonnisi *b*: tum *a* est æquale *b*.

Nam datur resultatum ipsius *B* ipsi *a* æquale; sit hoc *C*; hoc *C* erit aut *b*, aut non *b* (III); si *C* non *b* esset, per id, quod *C* est præter *b*, et id, quod præter *b* aliud non est, poneretur *esse* et *non esse* resultati alius præter *b*.

Si operationis indoles talis sit, ut alia quoque resultata dentur; tum id tantum dicitur, quod cuivis resultato ipsius *A* datur æquale inter resultata ipsius *B*. Si *A* et *B* æquali operatione resultati unici affecta producant *a* et *b* æqualia: tum etiam *A* et *B* æqualia sunt, si ex *a* et *b* quoque æquali operatione resultati unici prodeant *A* et *B*.

Si *A* sit æquale ipsi *B*, potest *B* ipsi *A* substitui; eatenus, quod quavis operatione afficiatur *A*, eadem affectum *B* resultatum priori æquale dabit. Ita si *A* sit æquale *B*, et *B* sit æquale *C*, potest *C* ipsi *B* substitui, ut prodeat *A* æquale *C*. Nam sit operatio comparationis; comparationis *B* cum *A* resultatum est indiscernibilitas, et resultatum comparationis *C* cum *A* etiam indiscernibilitati æquale est.

Hosted by Google

B.

Denotet $\overset{a}{x}$ heic a cum aliquo tali esse, quod ipsi x æquale est; $\overset{a}{x+y-z}$ vero denotet a esse cum aliquo tali, quod ipsi x æquale est, et simul cum tali, quod ipsi y æquale est, et non esse cum tali, quod æquale ipsi z est, id est esse cum non z.

Interim hæ denominationes brevitatis et claritatis ergo heic assumtæ, non nisi hic valeant. Sit jam schema sequens:

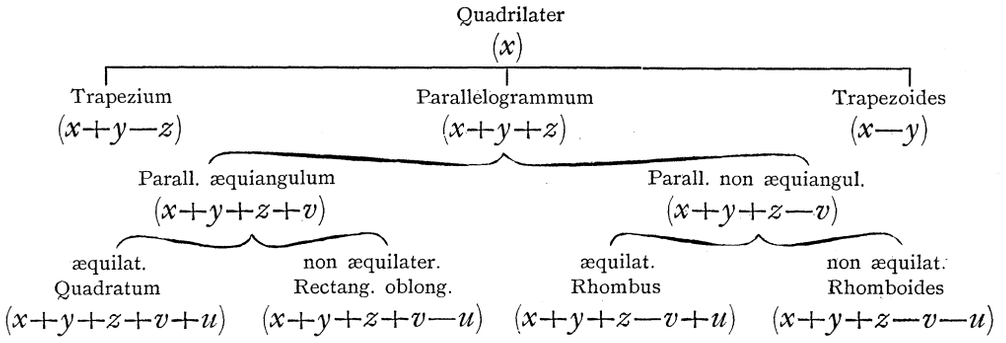
$$\underset{x-y-z}{A}, \quad \underset{x-y-z}{B}, \ldots \underset{x+y-z}{P}, \quad \underset{x+y-z}{Q}, \ldots \underset{x+y+z}{U}, \quad \underset{x+y+z}{W}, \ldots$$

Ea, sub quorum quolibet litera aut literæ eædem sunt, (quavis eadem litera signo eodem + vel — insignita) dicuntur *eatenus generis ejusdem*; ex. gr. sub quovis adest x, itaque $A, B, \ldots, P, Q, \ldots, U, W, \ldots$ sunt generis eiusdem quoad x; dicatur G hoc genus, id est nomen commune eorum sit G; et dum dicitur G esse cum x, intelligatur (uti ejus origo ostendit) A esse, B esse & cum x; nempe si in propositione G *est cum* x substituatur ipsi G quodvis eorum, quorum nomen commune G inde exortum est, propositionem veram manere. Quando dicitur, quod D sit G (denotante G genus), non aliud significat, quam quod D sit aliquod ipsorum $A, B, \ldots, P, Q, \ldots, U, W, \ldots$, id est eorum quorum nomen commune datum G est. Aliud est dum dicitur A *est ipsum* B.

Ita sunt $P, Q, \ldots, U, W, \ldots$ generis ejusdem quoad $x+y$, quod dicatur g; et U ac W sunt, quoad $x+y+z$, generis ejusdem, quod dicatur g'. Dicitur *genus* g' *species* quoad z generis g, et g dicitur species quoad y generis G; quod ulterius continuari posse patet. Patet etiam alio respectu subdivisionem aliam esse; ex. gr. $A, B, \ldots P, Q, \ldots$ quoad $-z$ aliam speciem ipsius G præbet, cujus item $A, B, \ldots$ una species, quoad $-y$, et $P, Q, \ldots U, W, \ldots$, quoad y, alia species est.

Exemplo sit sequens: denotet x qualitatem quadrilateri rectilinei, y qualitatem, quod dentur duo latera parallela (non excludendo plura), z quod præterea, quod dentur duo latera parallela, adhuc dantur duo latera parallela; v quod anguli sint æquales, u quod latera sint æqualia.

Hosted by Google



Literæ æquales heic cum signis æqualibus genera speciesque ostendunt.

Patet vero tam in hoc exemplo, quam in priore generis tantum aliqua gaudere literis speciei; imo in exemplo posteriore e genere quoad x non nisi quadratum esse $(x+y+z+v+u)$. Hinc si genus heic quoad x dicatur G, in propositione, quod *G sit cum x*, ipsi G quodvis allatorum substitui potest; sed ut verum sit, *G esse cum x et y*, aliqua tantum eorum, quorum G nomen commune est, substitui possunt; et ut verum sit *G esse cum* $(x+y+z+v+u)$, ipsi G aliquod G nempe quadratum tantum substitui debet. Si vero w denotet qualitatem eam, ut *quinque* laterum sint, tum x excludens *quintum* latus non est cum w, adeoque est cum $-w$; atque ut dici possit, *h est cum w*, substitui ipsi h debet nullum G, quod significat, quod non sit inter ea, quorum G nomen commune est, tale quod sit cum w.

C.

Si q sit aliquod ipsorum $A, B, C, \ldots$ et q non sit ipsum A, tum q est aliquod ipsorum $B, C, \ldots$; si q nec ipsum B sit, tum est aliquod ipsorum $C, \ldots$, et si ad ultimum deveniatur, tum q plane illud est.

Nam si q non est inter $B, C, \ldots$ et q non est ipsum A; tum q non est inter $A, B, C, \ldots$, adeoque q et esset inter $A, B, C, \ldots$ et non esset; itaque per id, quod q inter $A, B, C, \ldots$ est, et non est inter $A, B, C, \ldots$ ponitur esse et non esse eiusdem simul; unde patet per IV.

Hosted by Google

Eodem progredi modo licet ad C, et inde porro, nempe si q non sit A, nec B; tum si q nec inter $C, \ldots$ sit, non esset inter $A, B, C, \ldots$ et simul esset; ita porro progredi licet, et si ad ultimum perventum fuerit, eodem modo patet q illud ipsum esse.

Ita si omne quodvis q sit inter $A, B, \ldots a, b, \ldots a', b', \ldots$, atque q non sit inter $A, B, \ldots$, inter $a, b, \ldots a', b', \ldots$ esse pari modo patet; et si nec inter $a, b, \ldots$ sit, esse inter $a', b', \ldots$ pari modo patet.

D.

Sint jam A, B, C qualitates aut res quæcunque et quidem ita, ut ex. gr. z sit nomen generale tam ipsius $+y$ quam ipsius $-y$ (quod denotet heic *non* y), ita ut $-z$ denotet $+y$, si z antea denotabat $-y$, et denotet $-y$, si antea $+y$ denotabat; ita etiam reliqua intelligantur. Propositio vero *A est cum B*, denotetur heic brevitatis caussa (sed hic tantum valeat ista denotatio) per $A+B$; ita $A-B$ denotet hic *A esse cum non B*; et $-A+B$ denotet *non A esse cum B*.

An vero de omni quovis A aut aliquo & dicatur, quod sit cum B, denotatione ista determinatum non sit.

Quæritur, quæ propositiones sequuntur ex una, quæ e duabus? &

1. Ex una, nempe ex *A est A* sequitur *A est non A* non esse; nam per hæc poneretur *ita* et *non eiusdem*, alterutrum duorum adesse debet (III), *A est A* adest, alterum itaque non est (IV). Ita ex *A est B* sequitur *A est non B* non esse; quod ita quoque exprimi potest, *A est non z*, si z denotet *non B*. Ex *quodvis A est non B* sequitur *B est non A*. Nam per *A est non B* et *B est A* poneretur aliquod A esse cum B et *non B*, et inde sequitur ut prius.

Ex *A est cum B* sequitur *aliquod B esse cum A*; nam per *A est cum B* et hoc *B est cum non A* poneretur aliquod B esse cum A et *non A*, unde (ut prius) patet.

Ex eo, quod *quodvis A est cum aliquo B* sequitur *quodvis non B esse cum aliquo non A*; nam per *non B est cum A*, et *A est cum B* ponitur, *aliquod A esse cum B et non B*; itaque patet per IV.

Hosted by Google

Ex *A est cum non B* sequitur *B est cum non A*; nam per *A est cum non B*, et *B est cum A* poneretur *aliquod A esse cum B et non B*, et tum patet uti antea.

Ex eo, quod *quodvis non A est cum aliquo non B*, sequitur, *quodvis B esse cum aliquo A*; nam per *non A est cum non B* et *B est cum non A* poneretur *aliquod non A esse cum B* et *cum non B*, adeoque patet per IV.

2. Propositiones vel conceptus *A* et *B* æquivalentes dici possunt, si *quodvis A* sit cum *aliquo B* et *quodvis B* sit cum *aliquo A*; quod ita quoque prodit, si demonstretur, *quodvis A* esse cum *aliquo B* et *quodvis non A* esse cum *aliquo non B*, nam (per præcedentia) tunc etiam quodvis *B* est cum aliquo *A*.

Idem prodit demonstrando, quod *non A* est cum *non B*, et *non B* est cum *non A*; uti etiam ex *A est cum B* et *B est cum A* prodit *non A* esse cum *non B* et *non B* cum *non A*.

Ex eo, quod *quodvis A* est cum *aliquo B*, non sequitur, *quodvis B* esse cum *aliquo A*; nam (uti e typo generis superiore patet) qualitas aliqua præter speciem ipsius *A* in aliis quoque adesse potest; sed sequitur *aliquod vel aliqua B* esse *cum aliquo A*; nempe ubi *A* cum *B* est, etiam *B* cum *A* est. Ex *non omne A est cum B* sequitur *aliquod A esse cum* $-B$; nam *non omne* est aut aliquod vel aliqua exclusive aut nullum; si *nullum A* est cum *B*, *omne A* est cum $-B$; si *aliqua* exclusive sunt cum *B*, reliqua sunt cum *non B*, quia *B* aut $-B$ adesse debet (III et IV).

3. Sint a, b, c; et denotet heic $a+b$ *esse a cum b*, atque $a-b$ denotet *esse a cum non b* (id est sine *b*), eademque denotatio in aliis quoque (sed heic tantum) valeat. Quævis litera possit sive $+$ sive $-$ denotare: ex. gr. *b* possit $-z$ quoque denotare (signum $-$ sensu non arithmetico, sed superiore intelligendo). Quæritur, ex una propositione $a+b$ et alia adhuc tali, in qua una litera *c* est, altera vero $\pm a$ (id est *a* vel $-a$) vel $\pm b$ (id est *b* vel $-b$) est, quando et quæ conclusio est?

Patet combinationes omnes esse sequentes:

Hosted by Google

$$\begin{array}{cccc} a+b, & a+b, & a+b, & a+b, \\ c\pm a, & \pm a+c, & c\pm b, & \pm b+c, \end{array}$$

quæ, si $a+b$ sensu statim dicendo convertatur in secunda et tertia, et inferior superius ponatur in prima et tertia, mutabuntur in sequentes

$$\begin{array}{cccc} c\pm a, & b+a, & c\pm b, & a+b, \\ a+b, & \pm a+c, & b+a, & \pm b+c, \end{array}$$

ubi patet ad formam eandem reducta eatenus esse, quod ubivis superioris ultima litera sit prima inferioris, quæ est litera communis utriusque; patet etiam formam ultimam primæ prorsus convenire; nam b potest per $-z$ exprimi, et tum $-b$ erit z; ex. gr. sit a *Petrus*, b *mortalitas*, nempe $a+b$ denotet *Petrus est cum mortalitate*, id est Petrus est mortalis, z est *immortalitas*, et $a-z$ denotat *Petrus est cum non immortalitate*; adeoque ad formam primam reducetur ultima in illo casu quoque, ubi in hujus inferiore signum — est, nempe illam in cujus superiore $-a$ est; itaque non nisi tres priores considerandæ veniunt.

Denotet jam heic (sed tantum hic) $A+b$ *quodvis a esse cum b* vel *aliquo b*; ita $b+A$ denotet b vel *aliquod b adesse cum quovis a*, quod idem cum priore significat. Ita $C+a$ denotet *quodvis c esse cum aliquo a*, et $C-a$ denotet *quodvis c esse cum non a*; atque $c+a$ denotet *aliquod*, vel *aliquorum c quodvis* esse cum aliquo a; et eadem denotatio alias literas maneat, quæ tantum heic valeat. Conclusio e superiore et inferiore infra lineam scribetur, o ubi nulla est; forma prima post I, secunda post II, et tertia post III est; pro signis iisdem cuiusvis quatuor casus sunt, uti pro signis contrariis; in schematibus rationem conclusionis exponentibus, quilibet casus pro signis iisdem uno, pro contrariis altero schemate exhibebuntur.

I.

$$\begin{array}{cccc|cccc} C+a & C+a & c+a & c+a & C-a & C-a & c-a & c-a \\ a+b & A+b & A+b & a+b & a+b & A+b & A+b & a+b \\ \hline \text{o} & C+b & c+b & \text{o} & b-c & b-c & *c-b & *c-b \end{array}$$

Hosted by Google

II.

$b+A$	$b+A$	$b+a$	$b+a$	$b+A$	$b+A$	$b+a$	$b+a$
$a+c$	$A+c$	$A+c$	$a+c$	$-a+c$	$-A+c$	$-A+c$	$-a+c$
$b+c$	$b+c$	$b+c$	o	$*b-c$	$*b-c$	$*b-c$	$*b-c$

III.

$C+b$	$C+b$	$c+b$	$c+b$	$C-b$	$C-b$	$c-b$	$c-b$
$b+a$	$b+A$	$b+A$	$b+a$	$b+a$	$b+A$	$b+A$	$b+a$
o	o	o	o	$a-c$	$C-a$	$*c-a$	$*c-a$
					et $A-c$.		

Stellula præposita, uti $*b-c$, denotat certa quædam b cum certis quibusdam c non esse, non asserendo dari *aliquod* b, quod *cum nullo* c esse queat.

Conclusio nulla est, si pro signis literæ communis iisdem aut nulla litera magna est, aut non est prima in inferiore, vel ultima in superiore; alioquin semper est aliqua; cum stellula prodit, si pro signis literæ communis contrariis, litera magna aut nulla sit, aut præter primum locum inferioris et ultimum superioris haud reperiatur, aut tantum in inferiore et sola sit; combinantur vero in conclusione literæ, quæ præter communem sunt, et posterioris signum — est, si litera communis signis contrariis sit. Occurrit vero litera magna in conclusione non nisi semel in I, et semel in III, atque stat loco primo; in III vero sexta est sola, ubi etiam postrema litera in magnam mutata conversio fieri potest. In II schemate secundo constat etiam quodvis a esse cum b et cum c; denique omne, quod per superiora e conclusione tanquam ex una propositione sequitur, conclusioni accenseri potest.

Interim I 1 convenit cum III 1, ita I 3 cum II 3, I 4 cum II 4 et cum III 4, I 5 cum III 5, I 7 cum II 7, et I 8 cum II 8 et cum III 8. Itaque pro convenientibus quibusvis unus tantum manet casus; et casus conclusionem o dantes etiam rescindi possunt.

Ut ratio conclusionum dictarum pateat, exprimatur ex. gr. $C+a$ per $\begin{smallmatrix} c\,c\,c \\ a\,a\,a\,a\,a \end{smallmatrix}$, nempe *cuivis* c adscribatur illud a, cum quo est, *alia* a adhuc

Hosted by Google

ulterius quoque scribere fas est, cum haud constet, *non alia a* esse *sine c*; si *quodvis a* quoque sit *cum b*, scribatur *b* sub *quodvis a*, si vero de *quibusdam a* tantum constet, scribatur *b* sub *quaedam a* tantum; et quidem sub *talia*, quæ non sub *c* sunt, quia non constat, num illa sint *ea quaedam*, quæ *cum b* sunt. Ita *C—a* exprimatur per $\begin{matrix} -a & -a & -a & -a \\ c & c & c & \end{matrix}$, et *b*+*a* exprimatur per $\begin{matrix} bbb \\ aaa \end{matrix}$. Hoc pacto construantur casus singuli:

I.

	ccc		*ccc*		*cc*		*ccc*
	aaaa		*aaaa*		*aa*		*aaa*
	bb		*bbbbb*		*bbb*		*bb*
c c	*aaa*	*c c*	*aa*	*c c c*	*aa*	*c c c*	*aaa*
—a—a—a	*bbb*	*—a—a—a*	*bbb*	*—a—a—a*	*bbb*	*—a—a—a*	*bbb*

II.

	aa		*aa*		*bbb*		*bb*
	bbb		*bbbb*		*aaa*		*aaaa*
	cc		*ccc*		*cccc*		*ccc*
bbb	*—a—a*	*bbb*	*—a—a*	*bbb*	*—a—a*	*bbb*	*—a—a—a*
aa	*c c*	*aa*	*c c c*	*aaa*	*c c c*	*aaa*	*c c c*

III.

	cc		*cc*		*ccc*		*ccc*
	bbbbb		*bbbb*		*bbbb*		*bbbb*
	aa		*aa*		*aa*		*aaa*
c c	*bbb*	*c c*	*bbb*	*c c*	*bbbb*	*c c c*	*bbb*
—b—b—b	*aaa*	*—b—b—b*	*aa*	*—b—b*	*aa*	*—b—b*	*aaa*

In I primo et quarto patet posse *b* et *c* non in verticalem eandem cadere, adeoque non sequitur *ullum c cum b esse*; in secundo sub *quodvis c* cadit *b*, adeoque *quodvis c cum b* est; in tertio sub *quaedam c* cadit *b* et *quaedam illa* tantum constat *cum b* esse. Item in I signorum contrariorum casu primo patet illa *b*, quæ cum *a* sunt, *cum c* esse non posse, quia *cum quovis c* est *—a*, et tum *+a* et *—a*

Hosted by Google

simul essent (Ax. IV); adeoque *illa*, seu *quaedam b cum c* non sunt; id est *quaedam b* sunt *cum non c*. In casu secundo *illa b*, quæ *cum a* sunt, *cum c* esse pariter nequeunt; in tertio sub *quovis a* est *b*, sed non constat *aliquod c cum b* vel *sine b* esse; nam haud constat non dari tale *b*, quod non est *cum a*, adeoque tale *b* etiam *cum* tali *c*, quod *cum* $-a$ est, esse nulla contradictio; itaque *illa c* tantum, quæ *cum* $-a$ sunt, *cum illis b*, quæ *cum a* sunt non esse constat.

Reliqua singillatim exponere, cum schemata singula eodem modo exhibeant, supervacuum est.

Forma IV quæ cum I convenit, continuata dat *soritem*; nisi a prima propositione incipiendo cuiusvis litera ultima sit eadem cum prima sequentis, et in loco primo magna sit, saltem in quavis post primam. Ex. gr. ex

$$\begin{array}{l} a+b \\ B+c \\ C+d \end{array}$$

sequitur $a+d$; nam expresso ut antea per

$$\begin{array}{l} aaa \\ \ \ bbb \\ \ \ ccc \\ \ \ ddddd \end{array}$$

patet quædam a esse cum b et c et d, adeoque quædam a esse cum d; si A fuisset loco primo, quodvis a esset cum d.

E.

Si constet sub continui temporis T puncto quovis adesse A, et aliquando sub t post T non adesse: datur ab initio crescentis T in infinitum punctum aliquod p ultimum punctorum illorum temporis, de quorum quovis dici potest, quod intra illud et initium ipsius T semper adest A; in p vero aut *ultimum* A est aut *primum non* A; et si in p *non* A fuerit, post p aliquandiu aut semper A aut semper *non* A erit, nisi post p quodvis punctum p' tale fuerit, ut inter p et p' tam A, quam *non* A adsit. Fundamentum limitis, plura alia quoque expediens.

Hosted by Google

F.

Si $A, B, C, \ldots$ se invicem excipiant (sive terminentur in aliquo, sive non), et eorum quodvis K tale sit, ut (post K sequente L dicto) K *est cum* x sit cum L *est cum* x, atque A sit *cum* x; tum quodvis Q ipsorum $A, B, C, \ldots$ est cum x. Nam a certo puncto sit pars temporis continua t in plaga futura, et excipiat quodvis t aliud t in infinitum; ac cogitetur A respondere primo t, et quodvis ipsorum $A, B, C, \ldots$ sequens sequenti t; atque procedatur ab A ad B, inde ad C& usque ad illud t quod ipsi Q respondet: illud t adveniet (Ax. II); adeoque et de Q ei respondente constat. Dicitur hæc concludendi methodus de n ad $n+1$ sæpissime usitata. E dictis ultro promanantibus supersedere licet.

Hosted by Google

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO I.

PRIMAE LINEAE ARITHMETICAE GENERALIS.

§ 1.

Animus natura sua veritatis siti impulsus, fines cognitionis semper ulterius extendere satagens, activitate indesinente partim ex iis, quæ in repræsentatione reperit, quædam secernit, partim hæc et quæ adfuerint, vario modo componit; atque utcunque coram posita comparat; et illa, quæ digna esse retur, nomine insignit proprio, jure suo originario utens, quidvis signo quovis pro arbitrio denotandi; dummodo signa eadem eadem ubique significent, nisi aliud monitum fuerit.

§ 2.

Quidvis (modo A nominatum) intuenti obviam venit ante omnia aliquid (modo a dictum), quod ab A *complexum* est (id est ex A est), ab eo tamen diversum (id est non idem ipsum cum A); dicitur a *pars* ipsius A et quidvis (utvis compositum sit in repræsentatione, excluso omni alio) dicitur *Totum*, si parte gaudeat. Sensu hoc etiam qualitas certa ipsius A, ex. gr. albedo certi parietis, ejus pars est, (albedinem ipsam, quæ adest, intelligendo). Si a pars etiam ipsius B sit, dicitur *commune* ipsis A et B. Per *complexum* ipsorum $A, B, \ldots$ intelligatur id, quod complectitur eorum quodvis prætereaque necquidquam. Consideranti partes obviam venit tale x, ut a complexu omnis ejus ex toto, quod non ex x est, complexum etiam x

Hosted by Google

sit; dici potest pars eiusmodi *indivellibilis*.* Potest tamen aliquid de quovis, quod ex toto præter x est, dici, quod de x negatur. Horæ octavæ finis, et nonæ initium est pars temporis a hora septima usque ad decimam effluentis, sed indivellibilis est; ita axis corporis quiescentibus duobus punctis moti; at punctum, totius ex hoc et sphæra extra illud cadente constantis, non talis pars est. Hinc talis pars p, cuius ipsius pars nulla aut tantum indivellibilis est communis cum complexu omnis eius, quod ex toto præter p est, dicitur *portio*. Ex. gr. Linea e superficie prominens totius portio est, uti punctum antea dictum; at complexus lineæ dictæ et lineæ in superficiem cadentis, totius e superficie et linea constantis pars, sed non portio, nec indivellibile est.

Complexus omnis, quod (ex. gr.) præter A est, intelligatur, uti in concreto sisti potest. Paucis tantum adhuc, ne plura nugæ difficiles visa nauseam moveant, illustrare fas sit.

Indivellibile i partis p est indivellibile totius T. Nam si q sit complexus omnis, quod ex p præter i est, et Q sit complexus omnis ex T quod præter i est: patet q esse complexum a Q, adeoque i a q complexum a Q quoque complexum esse.

Pars p partis indivellibilis i est indivellibile totius T. Nam si q sit complexus omnis ex i, quod præter p est, et Q sit complexus omnis ex T, quod præter i est: tum (per def.) i a Q complexum est, adeoque etiam a (Q et q).

Portio p portionis P portio totius T est. Nam sit p' complexus omnis ex P, quod præter p est, et sit R complexus omnis ex T, quod præter P est; sitque A id, quod P cum R commune habet, et Q sit complexus omnis ex P, quod præter A est, sitque a id, quod R cum p, et a' id, quod R cum p' commune habet: patet in A adesse a et a', necquidquam præterea in A esse. Sit q complexus omnis ex p præter a, et q' complexus omnis ex p' præter a': patet (q et q') complecti omne quod ex P præter A est, adeoque et ipsum Q. Est vero P portio ipsius T (per

* Pars indivellibilis potest etiam ita illustrari, quod sit pars eiusmodi totius T, quæ ex T abstrahi potest, ut sine reliquo cogitationis objectum esse queat, sed ipsa nec cogitatione ita avelli potest ut reliquum sine ea cogitari queat.

Hosted by Google

hyp.), adeoque A est indivellibile ipsius P (per def.); adeoque a Q complexum est omne, quod ex A est, itaque etiam a, quod fieri nequit, nisi a indivellibilile ipsius p sit; nam si id non sit, aliquod b ex a adesse debet, e quo necquidquam a q complexum est; si vero a q complexum non est, neque a (q et q') complexum est; nam p' adeoque q' nonnisi indivellibile ipsius p cum q commune habet (quia p portio ipsius P est); adeoque esset aliquid ex A, quod a (q et q') adeoque a Q quoque complexum non esset, et P non esset portio ipsius T (contra hyp.). Si p cum complexu omnis ex T præter p nihil habeat commune, tum patet (per def.).

Si P portio ipsius T sit, et complexus omnis ex T præter P dicatur p; tum etiam p, si in concreto sistatur, portio ipsius T est. Nam sit A commune ipsis P et p, et sit q complexus omnis ex p præter A, id est omnis ex T præter P, (nam A quoque adest in P); patet q, si in concreto sistatur, esse idem cum p, adeoque cum A complexum a p sit, complexum etiam a q est; itaque etiam p portio ipsius T est (per def.).

§ 3.

Ex parte et portione oritur *nihilum* mathematicum, et *expers:* nempe abstrahendo omnem partem, oritur conceptus nihili, cuius signum est o. Ingens passus ab omni ad nihilum est; uno verbo quasi tollendo omne, quod ab sublime verbum *Fiat* factum est. Quod nulla sui portione gaudet, dicitur *expers*; tale est (ex. gr.) punctum spatii aut temporis supra dictum, sub quo quidem nulla mutatio fieri potest, sed Rhenus deruens, Urbs flagrans, aut actus quidam heroicus sub tali temporis puncto figuntur in tela perennes.

§ 4.

Porro in partes inquirendo, tali A occurrente, ut quævis portio A' sit eius, hæc cum eo B, quod ex A præter A' est, aliquid commune habeat: tale A nominatur *continuum*. Ex. gr. spatium, tempus, linea, superficies &.

Hosted by Google

§ 5.

Mens porro disquirens animadvertit, varia, quæ præter A sunt, ab eo discerni quidem, sed reperiri aliquid cum A et aliquid cum B, quæ, quamvis A et B præsentia considerentur, discerni nequeunt: et dicit A et B eatenus *aequalia*; si aliquid illud sit A ipsum et B ipsum, tum dicitur A *identice aequale* ipsi B, quod nonnisi tunc est, si A ipsum B sit. Si aliquid illud sit A et B præter locum, id est A et B præsentia præter locum discerni nequeant, *dicitur aequalitas absoluta*, significata per $A \doteq B$. Eatenus nulla cochlea sinistra dextræ æqualis est.

Si aliquid illud aliud sit, dicitur *aequalitas respectiva*, cuius innumeræ species dantur. Globus argillaceus aureo æqualis quoad locum esse potest.

§ 6.

Sed ex æqualitate absoluta, et portionibus ipsius P, vel etiam p, nascitur alia æqualitas *respectiva*, atque etiam conceptus *quantitatis*.

1. Si nempe tale A se obtulerit, ut cum A sit tale q, cuius aut nulla portio est, aut quævis a et b tales sunt, ut a (ipsum vel pars eius) $\doteq b$ (ipsi vel parti eius): dicitur tum A *quantitas* quoad q; sed si q illud plane A ipsum sit, dicitur *quantitas absoluta*, secus *respectiva*. Absolutæ exempla sunt Spatium, Tempus, Punctum utriusque, Recta, Circulus, Linea cochlearis, Planum, Sphæra, Cylinder, etiam Linea e rectis composita, ita ex arcubus eiusdem radii, et id genus alia. Respectivæ exempla varia: Pondus auri et ferri, si tantum pondera, aut volumina, aut frustra metallica considerentur. Si Linea quædam L non e rectis composita comparetur cum alia tali, ut complexus utriusque non sit quantitas absoluta, semper recta certa intelligetur per L determinata (vide infra), ita superficies quævis ad planum reducitur (ibidem). Imo et ipsæ quantitates absolutæ ad certas respectivas reducentur inferius, ut simpliciter tractari queant. Præter hoc potest etiam portionum acceptio certo modo determinari, ex. gr. homo et vermis quantitatem respectivam constituunt (ad instar puncti cum puncto), si conditio sit portionem hominis aut vermis

Hosted by Google

non considerare, et ex. gr. non nisi id ex homine aut verme sumatur, quod mortalis, vel terræ alumnus sit.

2. Si P constet e portionibus $A, B, \ldots,$
p ex $a, b, \ldots,$
atque

$$A \doteq a, \; B \doteq b, \; \&c,$$

ut quodvis par æqualium item aliud excipiat, donec nihil ex utroque supersit: oritur nova æqualitas quoad portiones.

Ex. gr.

$$P \frac{A}{} \frac{B}{} ; \quad p \frac{a}{b|}$$

Hoc sensu quævis figura rectilinea est æqualis quadrato. At quid si P et p talia sint, ex. gr. circulus et quadratum certum, ut $A, B \ldots$ et $a, b \ldots$ nunquam terminentur, sed omni dabili minus superesse ex utroque possit; dari tale quadratum constat, et nonnisi punctum est, quod reperire numerabilibus eiusmodi operationibus, quarum quævis est rectam vel circulum ducere, problema quadratoris circuli est. Dici potest hæc *aequalitas quoad contentum* prior *terminata*, posterior *interminata*, nec in casu allato posse aut non posse terminari quisquam demonstravit. Denotari potest per $P \doteq p$.

Vide infra quæ æqualitas per $=$ denotetur; et vide inferius æqualitatem expressionum variam &c.

§ 7.

Quantitas cum quantitate parit *homogeneitatem*, et majoritatem minoritatemque: nempe si quantitates A et B nonnisi indivellibile utriusque commune habentes tales sint, ut complexus eorum quantitas sit, dicuntur A et B *homogenea*.* Ita latus quadrati et diagonalis homogenea sunt, quamvis constet numeris quoad idem unum exprimi haud posse.

* Aut: si quantitatum A et B alterutra sit quoad contentum æqualis alteri aut portioni eius, dicuntur A et B homogenea.

Hosted by Google

Si vero A quoad contentum æquale est portioni cuidam b ipsius B, tum A dicitur *minus* ipso B, et B *majus* ipso A; denotaturque per $A \lessdot B$, seu $B \gtrdot A$. Denotatio eadem manere potest, et si A et B certa determinatione afficiantur (ut infra), adeo ut etiam $2 \lessdot -5$ dicatur. At ultro fit quæstio, quidnam ex B ultra b supersit? si hoc dicatur C, dicitur B excedere quantitatem A ipso C. Operatio, qua quæritur, quod superest ex D præter d, si d ex D sit, et A quoad contentum æquale d, $(A \doteq d)$ vocatur *demtio* ipsius A ex D.

§ 8.

Mens semper simplicitati claritatique studens, cum varia se offerant, cum quibus demtionis operatio haud ita perspicua est, quam cum tempore aut recta, de modo cogitat quamvis quantitatem ad eiusmodi formam reducendi; et si quantitates $A, B, \ldots$ ad tales $A', B', \ldots$ reduci queant, ut quævis $A', B', \ldots$ tales sint, ut $A \doteq A'$, $B \doteq B'$, et aliquod ipsorum A' et B' sit absolute æquale alteri ipsi vel parti eius: tum $A, B, \ldots$ *ad formam temporis reducta* esse dicuntur. Per $A = B$ intelligatur esse $A' \doteq B'$. Posse id fieri, et quodvis nonnisi ad unicum reduci posse (vide infra).

Superficies quævis ad rectangulum reducitur, cuius altitudo est ex. gr. 1 hexapeda, solidum quodvis ad parallelepipedum, cuius et altitudo et latitudo item 1 hexapeda est; et demum omnia ita reduci possunt, ut tempore vel recta exhibeatur quantitas omnium.

§ 9.

Arithmetica est scientia, quæ de quantitate, nonnisi jam ad formam temporis reducta, et omnium operationum resultata quoque ad hanc formam reducta esse spectat. *Pura* est, cuius objectum tempus est, aut huius quasi effluxi imago perpetuo manens recta, postquam deducta generataque est. Veritates hic repertæ facile alibi applicantur.

Arithmetica generalis dicitur, quæ in genere tractat de quantitatibus

Hosted by Google

absque eo, ut de hac vel illa speciatim diceret; at mentis natura est ab iis, quæ ob oculos ponuntur, ad generaliora abstractaque ascendere.

Primum Arithmeticæ puræ objectum tempus offert, ut hæc quasi temporis, geometria spatii scientia dici possit; quamvis in æterno quasi connubio una alteri opem ferat, et arbor utraque corradicata coronis in abysso cœlorum confluat.

§ 10.

Quantitas iam cum *qualitate* parit ita dicta *opposita*, ⊞ *(positivum)*, et ⊢⊣ (id est *negativum*), atque + et —.

Nimirum quantitates homogeneæ occurrunt variis determinationibus positæ; ex. gr. sit rectæ unius in puncto p initium, atque in recta eadem ponatur alia ita, ut initium huius cum fine prioris sit idem. Quæstio varia esse potest; *quantanam tota via sit?* aut *quantanam linea sit inter p, et finem posterius positae?* atque num a p *dextrorsum*, aut *sinistrorsum cadat?* patet resultatum eatenus varium esse posse, *magnum* respectu quæstionis prioris, o respectu posterioris.

Hinc conceptus sequens formatur:

Si P et N tales determinationes significent, ut si duntaxat A fuerit determinatione P positum, et B cum determinatione N; tum sub certa conditione C, in casu quodsi $A = B$, resultatum o sit; si vero $A \rhd B$, et supersit a, maneat a cum determinatione P; si $B \rhd A$ ac supersit b, maneat b cum determinatione N: tum una ex. gr. A nominatur *positiva*, altera nempe B *negativa*, atque A et B dicuntur *quantitates oppositae*. Positivum signo ⊞, negativum signo ⊢⊣ denotari potest, quod patet non nisi determinationes dictas P et N denotare.

Si $A = B$, tum ipsorum ⊞A et ⊢⊣B quodvis dicitur *oppositum alterius*, et per $-k$ denotatur oppositum eius, quod per k denotatur, sive ⊞ sive ⊢⊣ denotet k; signum + autem præfixum valorem non mutat; $+k = k$ potest esse $=$ ⊢⊣$5 = -5$, et tum $-k = 5 = +5 =$ ⊞5, ita ut e signo + vel — literæ præposito, num valor positivus vel negativus sit, concludi nequeat. Ex. gr. ponantur cogitatione sive in tempore, sive in

Hosted by Google

recta partes continuæ $A, B, \ldots$ una post aliam modo sequente; nominetur cuiusvis una extremitas initium, altera extremum, et illius, quæ sola vel primo ponitur, initium cadat in certum punctum p, et cuiusvis alius initium sit idem cum extremo illius quod plane antea positum est; sit porro certum punctum q, intra quod terminarentur omnes, si ita ponerentur, ut cuiusvis nonnisi initium sit cum eo, quod antea positum est, commune; atque dicatur p' extremum eius, quod modo prius dicto ultimo positum est; et si p a p' diversum sit, dicatur p initium, p' vero extremum ipsius pp'; et ipsorum $A, B, \ldots$ et illius, quod inter p et p' est, quodvis tale, cuius extremum propius est ipsi q quam initium, dicatur determinatione P positum; cuius initium est propius, dicatur determinatione N positum.

Patet hoc pacto, si conditio C sit pro resultato accipere pp', prodire $\circ$, si duntaxat $\vdash\!\!+ A$ et $\vdash\!\!- B$ posito sit $A = B$; ita $\vdash\!\!+ a$ manere, si $A \rhd B$, et a supersit, et $\vdash\!\!- b$ manere, si quantitate b sit $B \rhd A$. Potest etiam illud, quod tantum initium habet cum antea posito commune, determinationis eiusdem dici cum eo, secus vero diversæ.

§ 11.

Sed quælibet quantitates possunt modo sequente ad definitionem revocari.

Si B respectu A poni dicatur, ut sit index demtionis, significet operationem sequentem: quod si A iam positum sit et detur tale b ex B, ut in A adsit ei æquale, nec maius quam tale b ex B sit, tum dematur b ex A; atque si $b = B$, *indici demtionis* satisfieri dicatur; si vero præter b adsit b' in B, tum ex indice demtionis mansisse b'; et si nullum b demi potuit, B ipsum mansisse, cui satisfactum non est; et in quovis casuum dictorum *indici demtionis satisfactum esse, quoad fieri potuit* dicatur.

Si jam determinatio N, qua B ponatur, id significet, quod B ponatur index demtionis quoad quamvis quantitatem, quæ certa determinatione P posita est, aut poneretur postea; et conditio C sit, ut si A iam positum est cum determinatione P, et A æquale vel maius quam B, accipiatur

Hosted by Google

id, quod ex A remansit, postquam indici demtionis satisfactum est; si vero satisfieri non potuit, accipiatur id, quod ex indice demtionis remansit, postquam ei, in quantum fieri potuit, satisfactum est; et semper quod ex indice demtionis remansit, retineatur etiam ulterius pro indice demtionis quoad quantitates cum eo homogeneas, quæ determinatione P ponerentur. Patet et hic determinationem P signo $\vdash\!\!+$ et alteram signo $\vdash$ insigniri posse. Nam si $A = B$, resultatum o est; si $A \succ B$ resultatum est a cum P positum; si vero $B \succ A$, remanet b ex indice demtionis, adeoque b cum determinatione N.

Ex. gr.

$$\begin{array}{ccc} \vdash\!\!+\ A & \underbrace{\vdash\!\!+\ A}_{a} & \vdash\!\!+\ A \\ \hline \vdash\ B & \vdash\ B & \underbrace{\vdash\ B}_{b} \\ \hline & \hline & \end{array}$$

Ita potest A certos homines ad certum finem positos denotare, et B item certos homines pro indice demtionis quoad A positos; aut A certam pecuniam, et B quoque certam pro indice demtionis quoad A expositam &c.

§ 12.

Operatio, qua disquiritur, quod sit resultatum sub conditione C, si adfuerint inter $A, B, \ldots$ et positiva et negativa, secus vero quid prodeat, si $A, B, \ldots$ simul sumantur, (in quovis casu quovis eorum o denotante omisso), dicitur *additio*, et resultatum vocatur *summa* additorum $A, B, \ldots$.

Imo potest conceptus summæ extendi, dicendo etiam S et s summam, realium $A, B, \ldots$, et imaginariorum $a, b, \ldots$, si illorum summa sit S, horum sit s, (vide infra). Quoad casum priorem, patet superius esse o, $\vdash\!\!+ a$, vel $\vdash b$ summas ipsorum A, B; ita patet

$$\underline{\vdash\!\!+\ A \ \vdash\!\!+\ B}$$

summam ipsorum $\vdash\!\!+ A$, $\vdash\!\!+ B$ esse.

Hosted by Google

§ 13.

Quæstio heic ultro oritur: num (in § 10.) quocunque ordine ponantur $A, B, \ldots$ idem extremum ultimo positi prodeat? ita demtio utcunque fiat, per partes hinc vel illinc demtas, aut e summa omnis positivi dematur summa omnis negativi (vide infra).

Addendorum summæ etiam commoda notatio quæritur. Complexus signorum, quibus quantitates denotantur, signorum $+$, $-$, $\vdash\!\!+$, $\vdash\!\!\dashv$ quolibet præfixo affectorum, denotet quantitatum earum (cum signo præfixo acceptarum) *summam*; dicitur hic complexus *quantitas complexa*; et quantitas post ultimum signorum $+$, $-$, $\vdash\!\!+$, $\vdash\!\!\dashv$, aut ante primum scripta, veluti quævis inter proxima eiusmodi signa dicitur cum signo præfixo accepta *terminus quantitatis complexae*. Interim si alia quædam operatio ad plures extendatur, signa dicta terminos in iis, quæ conjuncta sunt, non distingvunt. Ex. gr. ipsius $a + \sqrt{c-d}$ non est d terminus, sed a, et $\sqrt{c-d}$.

§ 14.

Sicubi summa S ex A et B reperitur, quæstio ultro fit, num ex S et A socius B ipsius A reperiri posset? Operatio ista vocatur *subtractio* ipsius A ex S, et B vocatur *differentia* ipsius A ab S. Patet in schemate (§ 11., et § 12.) S esse prius 0, postea $\vdash\!\!+a$, tum $\vdash\!\!\dashv b$, et demum $\vdash\!\!+A \vdash\!\!+B$: ita esse posse $\vdash\!\!\dashv A \vdash\!\!\dashv B$; atque $S - (\vdash\!\!+A)$ esse $\vdash\!\!\dashv B$ in § 11. et $S - (\vdash\!\!\dashv B)$ esse $\vdash\!\!+A$, atque in proximo casu $S - (\pm B)$ esse $\pm A$. Unde patet subtrahendi oppositum esse addendum summæ suppositæ, ut socius subtrahendi, nempe differentia prodeat; prodit vero oppositum, si signum præfixum immutetur, nempe si ex $+$ fiat $-$, seu ex $-$ fiat $+$; adeoque subtrahendus signo mutato additur. Sed heic adhuc tantum de monomio sermo est; de quantitate e pluribus terminis complexa inferius erit.

Hosted by Google

§ 15.

Porro adhuc talia ex. gr. p et s obviam venire possunt, ut d differentia ipsius p ab s sit æqualis differentiæ ipsius P ab S. Hinc passus eo, quod si P ipsum s sit, et detur post quodvis aliud, a quo differentia præcedentis sit eidem d æqualis. Vocatur hoc *series arithmetica*, nempe hic oritur conceptus *seriei*, quo nomine insignitur quantitatum complexus se lege certa excipientium; nam simulac lex una patuit, campus de legibus innumeris cogitandi aperitur. Vocatur quævis quantitatum lege certa se excipientium, *terminus seriei.*

§ 16.

Tum facile in mentem venit $p = 0$ ponere, et seriem $0, A, B, C, \ldots$ condere, cuius termini cuiusvis differentia a sequente sit u; item aliam quoque seriem $0, a, b, c, \ldots$, cuius termini cuiuslibet differentia a sequente sit v, cogitare, ita ut 0 cum 0, A cum a simul ponantur, et quosvis terminos simul positos, excipientes (in illa et hac serie) simul ponantur. Quivis terminus harum serierum dicitur *numerus* in serie priore *quoad* u, in posteriore *quoad* v; ac cuilibet nomen proprium dare libet, et quidem terminis simultaneis idem, præterquam quod in serie priore quoad u, in posteriore quoad v dicatur; ex. gr. 0 dicitur 0 quoad u etiam 0 quoad v; A vero 1 quoad u, et a dicitur 1 quoad v &c.; seu 0 dicitur breviter $0u$ et $0v$, A vero $1u$, et a $1v$, &c., et id ex. gr. F, quod numerus nominis n est quoad u, dicitur nu, et terminus f cum eo simultaneus dicitur nv; atque ad quæstionem, F quot u sit? respondetur nu; atque F dicitur continere ipsum u n-ies, et ex F et n reperire u dicitur F per n *partiri.* Nulla tamen heic mentio multiplicationis divisionisque est, quarum sensus latior est.

Tam u quam v dicitur *unum*, quod distingvendum ab *unitate* est (§ 23.).

Hosted by Google

o	$A\overset{u}{\text{———}}$,	$B\overset{u}{\text{———}}\overset{u}{\text{———}}$,	$C\overset{u}{\text{———}}\overset{u}{\text{———}}\overset{u}{\text{———}}$	...
ou	1u	2u	3u	...
o	$a\overset{v}{\text{———}}$,	$b\overset{v}{\text{———}}\overset{v}{\text{———}}$,	$c\overset{v}{\text{———}}\overset{v}{\text{———}}\overset{v}{\text{———}}$	...
ov	1v	2v	3v	...
o	✲	✲✲	✲✲✲	...
o✲	1✲	2✲	3✲	...
o	o	o	o	...
o zero	1 zero	2 zero	3 zero	...

Patet, si *unum* zero sit, quemvis terminum esse o; nam e quovis prodit o, nempe $o+o=o$ (per § 12.).

§ 17.

Heic statim quæstiones oriuntur:

1. Quo possent modo simplicissimo nominari numeri?

2. Si N et M nomina numerica sint, Nu et Mu simul quot u efficiunt? et si $Nu \lessdot Mu$, et illud ex hoc dematur, quot u manent?

3. Si $U=Nu$, MU quot u facit? Sit nu; quærebatur ex N et M nomen n; quæri ex n et aliquo ipsorum N et M eorundem alterum potest.

Hæc sunt numeratio, et quatuor operationes numericæ: at quamvis conceptus hi necessarii sint, conceptus quatuor operationum latior est; duarum priorum iam determinatus est, ubi patebat summam ipsorum A, B ob oculos poni posse, etsi numero expressa non sit, imo si ex. gr. A sit latus quadrati, et B diagonalis, neque possunt A et B quoad idem numeri esse.

§ 18.

Variæ adhuc præter hæc oriuntur quæstiones.

1. Potestne quantitas quævis esse numerus nominis cuiusvis?

Hosted by Google

2. Potestne idem quoad idem u esse numerus diversi (id est nunc huius, mox alius) nominis?

3. Estne quoad quamvis portionem a ipsius A tale nomen numericum n, ut $na \not> A$ &.

Si quantitatis q aut nulla sit portio, aut quævis talis sit, ut detur tale n, dicitur *quantitas finita*, de quali tractat Arithmetica. Si u denotet punctum temporis, $2u$ non potest esse numerus nisi nominis 2 et 1, nempe posterius, si unum sit $2u$; item 0 potest esse, si pro uno sumatur 0, numerus nominis cuiusvis, sed id quod non est 0, nequit esse numerus nominis 0.

§ 19.

Nova porro fit quæstio; num B sit numerus quoad A, et si ita, cuiusnam nominis sit? et casu se offerente, ubi B non est numerus quoad A, quæstio oritur, num aliquod u sit, quoad quod tam A quam B numerus est, et cuiusnam nominis numerus sit A, cuiusnam sit B? Unde fit conceptus sequens.

Sive sit B numerus quoad A, sive non; reperire, cuiusnam nominis numerus sit A et B vel $-B$ quoad idem u, dicitur *mensurare* B per (vel quoad) A; et A dicitur *mensura*, B vero *mensum* ipsius A; atque si ex. gr.

$$A = 3u,\ B = 2u \text{ vel } B = -2u,$$

ad quæstionem, qualenam mensum sit B ipsius A, respondetur in casu priore, quod sit 2(3)*tum*, in posteriore quod sit 2(3)*ti* oppositum. Ita A, si pro mensura eius ponatur u, dicitur 3(1)*tum* ipsius u, adeoque hoc et $3u$ idem significant.

§ 20.

At talia A et B obviam venire possunt, ut quamvis homogenea sint, nullum u reperiatur tale, ut quoad id tam A quam B numerus sit; hinc facile cogitatur, quid si nullum sit? Cum non liqueat dari debere, (mox patebit in Arithmetica quoque dari, ex. gr. $\sqrt{2}$); eiusmodi quantitates dicuntur inter se *incommensurabiles*. Interim facile patet (quod infra

Hosted by Google

demonstrabitur) u semper per 2 partiendo, quovis dabili z remanere minus ex B, et alteram partem quoad A mensurari posse.

§ 21.

Hic primum oritur conceptus *variabilis* atque *limitis*. Si p sit nomen generale eorum finitorum, quæ sub certa conditione generari queunt, et $\vdash\!\!+$ vel $\vdash\!\!\dashv p$ quovis dato ei homogeneo majus fieri potest, aut differentia ipsius p a K nunquam quidem fit 0, sed quovis dato z minor fieri potest: tum dici solet in casu primo *infinitum* (denotatum per ∞), in secundo vero K *limes* ipsius p, et *tendentia ista ad limitem* potest denotari in casu primo per $\vdash\!\!+$ vel $\vdash\!\!\dashv p \backsim \pm\infty$,* in secundo per $p \backsim K$; nempe ubi $\pm\infty$ stat post signum $\backsim$, denotet casum primum; si finitum stet post $\backsim$, denotetur casus secundus.

Maius et minus intelligitur hic a $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!\dashv$ abstrahendo. Arithmetica quidem finita tractat, nec calculus infinitesimalis dictus indiget infiniti; sed cum a pluribus etiam ∞ pro limite accipiatur, fas est conceptum limitis eo extendere; (in Geometria dantur infinita, ex. gr. complexus omnium punctorum, quæ cum certis duobus punctis in recta sunt, est recta utrinque infinita ☞). Sit ex gr. t denotante quantitatem minorem quam u:

$$A = nu, \quad B = mu + t, \quad \text{et sit} \quad t \backsim 0;$$

ad quæstionem, qualenam mensum sit B ipsius A, respondetur $m(n)tum$ præter aliquid, quod tendit ad zero; sed patet heic n et m, prouti z minus accipitur, eatenus mutari. Interim ubi pluries occurrunt, æqualia signa simul variata æqualia significent; inæqualia signa (nisi aliud monitum fuerit) possunt æqualia significare.

* In Arithmetica pura non aliam quantitatem præter 0 et ex. gr. rectam (e Geometria petitam) tractante non aliud ∞ intelligitur, nisi *limes viae puncti e rectae puncto* p *in ea semper porro et ultro datum quodvis punctum moti.* Quoad signa $+$, $-$ ipsi infinito præposita conditio C (§ 10) locum haud habet quidem, sed pro viis quibusvis finitis, quarum alterutra ex. gr. ad dextram, altera ad lævam describitur, C locum habebit initio p viæ ad lævam, ad finem viæ alterius posito, atque per $-\infty$ limes viæ ex p ad lævam factæ, per $+\infty$ autem limes viæ ex p ad dextram factæ intelligi potest.

Hosted by Google

§ 22.

Posteaquam B mensuratum per A est, facile succurrit, etiam C per idem A mensurare; atque tum dicitur quodvis ipsorum B et C *fractio* alterius:

B — u — u	$=2u$	B ✲✲
A — u — u — u	$=3u$	A ✲
A — v — v — v — v — v	$=5v$	A ✲
C — v — v — v — v	$=4v$	C ✲✲✲

Et quidem in casu priore B dicitur 2(3) 4(5)*tum* ipsius C, ita C 4(5) 2(3)*tum* ipsius B, in altero casu vero B dicitur 2(1) 3(1)*tum* ipsius C, et C dicitur 3(1) 2(1)*tum* ipsius B, sive in hoc casu B dicitur breviter 2(3)*tum* ipsius C, et C dicitur 3(2)*tum* ipsius B.

Demonstrabitur mox etiam casum priorem ad formam posteriorem reduci, et idem modo communi scribi posse; patetque B esse 2(3)*tum* ipsius A, et A esse 5(4)*tum* ipsius C, adeoque B esse 2(3)*tum* 5(4)*ti* ipsius C.

At quid si B vel C, vel utrumque sit incommensurabile cum A? Tum quoque et semper ad quæstionem, qualisnam fractio sit B ipsius C, respondeatur, quod sit $n(m)$ $p(q)$*tum*, si nomina numerica n, m, p, q talia sint, aut ita simul variari queant, ut $n(m)$*tum* ipsius A sit æquale B, vel tendat ad B, et $p(q)$*tum* ipsius A sit æquale C, vel tendat ad C (§ 21.).

§ 23.

Hinc posteaquam B et C per idem A mensurata sunt, pronum est etiam D, et tum $D, E, \ldots$ denique omnia homogenea per idem A mensurare, atque mensuram istam omnibus communem nominare *unitatem*, nec semper repetere mensuram in mensuratorum nuncupatione; ut ex. gr. 2(5)*tum* unitatis dicatur tantum 2(5)*tum*, haud nominando mensuram;

Hosted by Google

ita si A sit unitas, 2(1)*tum* ipsius A, id est $2A$ dicatur tantum 2, ita -1 denotet $-1A$.

Reflectendo ad superius dicta varia æqualitatis genera, heic quoque aliquod se offert. Si nempe r sit recta, et t tempus, atque utrumque sit suæ unitatis 2(3)*tum*, eatenus æqualia sunt. Ita si L et l rectæ sint, patebit factum e quotvis lineis esse lineam; sed si unitas areæ sit quadratum, cuius latus unitas lineæ est, et factum ex L et l sit ex. gr. $n(m)$*tum* unitatis linearum; et rectangulum ex L et l erit $n(m)$*tum* unitatis arearum. Ita sit factum ex L, l, l' (tribus rectis) $N(M)$*tum* unitatis linearum; parallelepipedum ex L, l, l' etiam $N(M)$*tum* unitatis solidorum est, si hæc cubus is ponatur, cuius latus unitas linearum est; uti infra demonstratur. Itaque ista hoc respectu sunt æqualia.

Unitatem *positivam* (et non zero) figere libuit, atque utcunque mutetur *unum*, *unitas* eadem prius arbitrarie posita pro omnibus homogeneis retineatur, donec expresse aliud monitum fuerit; si ex. gr. unitas sit 1 hexapeda, sive 1 dicatur, sive 6 pedes, quantitas eadem est. Si 0 assumeretur pro unitate, linea expressio indeterminata esset, nam prouti acciperetur u, esset pro quovis n linea $n(0)$*tum*.

§ 24.

Id, quod unitate minus est, dicitur *fractio vera*: et id quod numerus est quoad unum unitati æquale, dicitur *numerus integer*. In serie

$$\ldots. -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

est [per § 7.] $2 \lessdot -3$, sed 1 non $\gtrdot 0$, neque $-1 \lessdot 0$; at potest dici quemvis terminum esse *paucius* quovis ab eo ad dextram sito, et *plus* quam quivis ab eo ad sinistram situs est; quod etiam ad non integros extendatur. Designari potest per

$$0 > -1;\ 1 > 0;\ 1 > -1;\ -1 > -2.$$

Facile patebit (per inferiora), quod si

Hosted by Google

$$A < B,$$

etiam æqualibus additis semper prodeat

$$A + C < B + C;$$

at si

$$A \lessdot B,$$

non semper sequatur

$$A + C \lessdot B + C;$$

attamen sive $<$ et $\lessdot$, sive $<$ et $\gtrdot$ stet post A, idem etiam post $A + C$ maneat, [si $A + C$ et $B + C$ neutrum sit zero, nec sit $A + C$ æquale $-(B + C)$]; *excepto*:

1. Si $A \lessdot$ et $< B$, atque B positivum est cum A ac C utroque negativo, aut summa utraque negativa est; [tunc enim fit $A + C <$ et $\gtrdot B + C$].

2. Si $A <$ et $\gtrdot B$, atque aut A negativum est cum B et C utroque positivo, aut summa utraque positiva est, [tunc enim fit $A + C <$ et $\lessdot B + C$].

$A + C$ æquale $B + C$ esse nequit, nam tum esset A æquale B, cui repugnat $A < B$; sed pro quibusvis A, B datur tale C, ut sit

$$A + C = -(B + C) = -B - C;$$

nam tunc

$$A + 2C + B = 0,$$

et tum

$$C = -\frac{A + B}{2},$$

adeoque

$$A + C = \frac{A - B}{2},$$

et

$$B + C = \frac{B - A}{2},$$

quæ opposita sunt.

Singulos casus exhibentia schemata percurrendo patet:

$-2 <$ et $\lessdot 3$	$-2 <$ et $\lessdot 3$	$-2 <$ et $\lessdot 3$	$-2 <$ et $\lessdot 3$
$1 = 1$	$5 = 5$	$-1 = -1$	$-5 = -5$
$-1 <$ et $\lessdot 4$	$3 <$ et $\lessdot 8$	$-3 <$ et $\gtrdot 2$	$-7 <$ et $\gtrdot -2$

Hosted by Google

$$\begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & 2 \\ 1 & = & 1 \\ \hline -2 & < \text{et} \lhd & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & 2 \\ 5 & = & 5 \\ \hline 2 & < \text{et} \lhd & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & 2 \\ -1 & = & -1 \\ \hline -4 & < \text{et} \rhd & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & 2 \\ -5 & = & -5 \\ \hline -8 & < \text{et} \rhd & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & -2 \\ 1 & = & 1 \\ \hline -2 & < \text{et} \rhd & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & -1 \\ 5 & = & 5 \\ \hline 2 & < \text{et} \lhd & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -6 & < \text{et} \rhd & -3 \\ -1 & = & -1 \\ \hline -7 & < \text{et} \rhd & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -3 & < \text{et} \rhd & -2 \\ -1 & = & -1 \\ \hline -4 & < \text{et} \rhd & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & < \text{et} \lhd & 5 \\ 1 & = & 1 \\ \hline 3 & < \text{et} \lhd & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 & < \text{et} \lhd & 5 \\ -1 & = & -1 \\ \hline 1 & < \text{et} \lhd & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 & < \text{et} \lhd & 5 \\ -3 & = & -3 \\ \hline -1 & < \text{et} \lhd & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 & < \text{et} \lhd & 5 \\ -7 & = & -7 \\ \hline -5 & < \text{et} \rhd & -2 \end{array}$$

Nempe ut $A < B$ sit, aut tam A quam B negativum est, aut A negativum et B positivum est, aut A, B utrumque positivum est, et A (in præcedentibus) semper ad sinistram cadit. Quivis casus parit duos, prouti C positivum aut negativum est. Si ipsorum A et B aliquod negativum est, tunc A esse negativum patet. Si utrumque positivum sit, C aut positivum aut negativum est; si C negativum est, tres casus sunt, prouti C summam utramque positivam relinquit, aut unam vel utramque negativam reddit; adeoque quatuor casus fiunt; et pariter quatuor, si A et B utrumque negativum sit. Si vero unum negativum, alterum positivum sit, aut erit $A \lhd B$ aut $A \rhd B$; quivis horum quatuor casus habet nempe C aut positivum aut negativum est; si positivum, aut utraque summa redditur positiva aut non; si negativum, aut utraque summa redditur negativa aut non. Itaque sedecim casus sunt.

Si $A < \text{et} \lhd B$ vel $A < \text{et} \rhd B$, et A, B utrumque per C (non zero) multiplicetur: signum $\lhd$ vel $\rhd$ manet uti est; sed $<$ mutatur in $>$, si multiplicator negativus sit. Etiamsi non percurrantur schemata, facile patet, tum e positivo fieri negativum, et e negativo fieri positivum, atque e maiore positivo maius negativum, et e maiore negativo maius positivum fieri; adeoque signum $<$ inverti. Casus sequentes tantum considerandi veniunt:

$$-2 < -1, \quad -2 < 1, \quad 1 < 2,$$

ubi patet oppositis acceptis signum $<$ in $>$ mutari. Patet etiam non mutari $<$, si C positivum sit, uti $\lhd$ vel $\rhd$ semper manere, cum a determinatione positivitatis vel negativitatis independens sit.

Hosted by Google

Pro exponente n integro positivo quoque manet $\lessdot$; sed $<$, si A et B non sit utrumque positivum, mutatur in $>$ pro n pari, si $A < \text{et} \gtrdot B$; in aliis casibus semper manet. Ex. gr.

$$\begin{array}{lll} -2 < \text{et} \gtrdot -1, & (-2)^2 = 4 > \text{et} \gtrdot 1, & (-2)^3 = -8 < \text{et} \gtrdot -1, \ \&c. \\ -1 < \text{et} \lessdot 2, & (-1)^2 = 1 < \text{et} \lessdot 4, & (-1)^3 = -1 < \text{et} \lessdot 8, \ \&c. \\ -3 < \text{et} \gtrdot 1, & (-3)^2 = 9 > \text{et} \gtrdot 1, & (-3)^3 = -27 < \text{et} \gtrdot 1, \ \&c. \end{array}$$

Unde etiam patet radicum exponentis paris e positivis, illam signo $>$ gaudere posse, cuius potentia signo $<$ prædita erat; at radicum exponentis imparis e negativis illam cum $<$ manere, cuius potentia cum $<$ fuit; imo posterius valere etiam, si potentia una positiva, altera negativa sit, aut utraque positiva, facile patet:

$$-27 < 8, \quad \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{8}, \text{ nempe } -3 < 2.$$

§ 25.

Id quod cum unitate incommensurabile est, dicitur breviter *incommensurabile*. Prius de commensurabilibus fiet disquisitio specialior.

§ 26.

Ita etiam si mentio unitatis non fieret, dum quæritur, *B quale mensum sit?* subintelligatur *Unitatis*. Sit ex. gr. 2(3)*tum*; quæstio facile oritur quantitate a se offerente, num si a esset unitas, detur tale b, de qua si quæreretur, quale mensum sit, item per 2(3)*tum* responderetur; aut poterant tales a et b obviam venire, ut etiam b per a mensum, sit huius 2(3)*tum*. Hinc sequens conceptus oritur; si ad quæstionem quale mensum sit b ipsius a, ita responderetur (§ 19. et 21.), quam ad quæstionem, qualenam mensum est B (nempe unitatis A): tum reperire b ex a et B, dicitur *multiplicare* (sensu strictiore, qui mox fiet latior) *a per B*; et a dicitur *multiplicandus*, B *multiplicator*, uterque vero nominatur *factor*, et b *factum*, quod proprie *aequimensum* est.

Hosted by Google

§ 27.

Hinc facile quæstio oritur, e posito facto b et ex a quærere huius socium B, seu ex b et B huius socium a; nempe talem socium quærere, ut si alteruter eorum multiplicandus et alter multiplicator sit, factum b prodeat. Reperire talem factorem socium ipsius a (vel ipsius B), dicitur *dividere* b per a (vel per B).

Dicitur b *dividendus*; is, cuius socius quæritur, *divisor*; socius vero *quotus* audit. Denotatur quotus, qui prodit p per q diviso, per $\frac{p}{q}$ vel $p:q$; factum vero, quod prodit a per B multiplicato, denotatur per $B.a$ aut simpliciter per Ba (nisi aliud monitum fuerit).

§ 28.

Imagines multiplicationis et divisionis generales patet esse sequentes:

$$\begin{array}{llll}
A=nu, & B=mu; & a=nv, & b=mv; \\
A=nu, & mu\backsim B; & a=nv, & mv\backsim b; \\
A=nu, & B=-mu; & a=nv, & b=-mv; \\
A=nu, & -mu\backsim B; & a=nv, & -mv\backsim b;
\end{array}$$

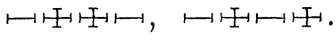
§ 29.

Ubi patet in quavis linea horizontali imagines mensurationis ipsius B per A, et ipsius b per a esse æquales. Facile est cogitare loco A quamvis quantitatem, non tantum unitatem, (nec zero excepto), dummodo pro certis n, m, u, v aliqua istarum imaginum prodeat; adeoque ut ad quæstionem, quale mensum sit B' ipsius A' (sive unitas sit A', sive non)? et ad quæstionem, quale mensum est b' ipsius a'? eadem responsio sit. Dicuntur tum A', B', a', b' *in proportione geometrica* esse.

Hosted by Google

§ 30.

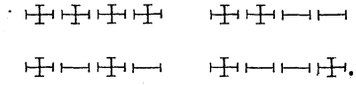
Patet quatuor imagines priores huc quoque applicari. Quæstio se offert, quid, si duo priora ambo positiva, vel ambo negativa sint, aut quid si opposita sint, futurum est? Facile patet in casu priore, quale a est, tale fore b; nempe si a sit positivum, etiam b positivum, si a negativum, etiam b negativum fore; in casu posteriore vero etiam a et b opposita fieri. Nam ex. gr. sit imago tertia, sit $n = 2$, $m = 3$, et u sit negativum, tum $2u$, ita $3u$ etiam negativum est, itaque $B = -3u$ erit positivum (nempe oppositum ipsius $3u$, quod negativum erat); tum $a = 2v$, et $b = -3v$; iam v aut positivum est, aut negativum; si positivum, tum $2v$ et etiam $3v$ positivum est, itaque $-3v$ est negativum; si vero v negativum est, tum $2v$, et $3v$ etiam negativum est; et $-3v$ est positivum; adeoque hæ duæ imagines exsurgent:

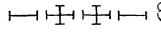


Similiter prodeunt casus omnes; nempe A vel positivum vel negativum est, pro quovis horum duorum casuum B etiam aut positivum aut negativum est; et pro quolibet horum quatuor casuum a aut positivum aut negativum est, adeoque octo casus sunt.

§ 31.

Si nonnisi de multiplicatione quæstio sit, tum A est positivum, nempe unitas (§ 23.); adeoque quatuor tantum casus erunt:



Nam ex. gr. in ultima imagine, cum B et A opposita sint, etiam b et a opposita esse demonstratum est. Si unitas quantitas negativa esset vel ponatur, erit  & per eandem rationem.

Quantitates, quarum realitas multiplicationi quoad -1 innixa est, dicuntur *imaginariae* (vide infra).

Hosted by Google

Cum vero literis ex. gr. a, b tam positiva quam negativa denotare liceat, atque cuilibet fas sit signum — præfigere: quæstio oritur, quodnam sit signorum $+$ et $-$ signum facti e factoribus $\pm a$ et $\pm b$ vel $\mp b$? Res facile in casus distingvitur; nempe si $+a$ sit, tum est aut $+b$ aut $-b$, et si a positivum sit, erit item b aut positivum aut negativum, pariter si a negativum sit; itaque $+a$ habet, si a positivum sit, 4 casus, nempe 2 pro $+b$, et 2 pro $-b$; pariter habet 4, si a negativum sit; adeoque $+a$ habet 8 casus; pariter $-a$ habet 8; adeoque $8+8$ casus sunt, quos singulos construere facile est, et tyronibus relinquitur; ac percurrendo singulos, patet regulam generalem prodire, quod *signa aequalia dant* $+$, *signa inaequalia* $-$; nempe si facto e literis ipsis signum ita præfigatur, factum prodibit $\vdash\!\dashv$ vel $\vdash$ ita, uti re ipsa est; ex. gr. sit a positivum et b negativum, et sit multiplicator $-a$, et multiplicandus $+b$; erit ista imago $\vdash\!\dashv\vdash\!\dashv\vdash\!\dashv$, nempe factum $\vdash a . \vdash b$ (per dicta) positivum erit; at $-ab$ quoque positivum est, nam ab tanquam factum ex positivo et negativo est negativum, itaque $-ab$ est positivum. Pariter si a positivum et b negativum sit, $+a . +b$ est $+ab$, nam tunc factum e positivo et negativo est negativum; et $+ab$ quoque tantum denotat ac ab. De pluribus terminis infra.

Quoad divisionem quoque eadem quæstio oritur. Dividendus sit $+b$ vel $-b$, divisor $+a$ vel $-a$; tam $+b$ quam $-b$ duos casus habet, prouti divisor $+a$ vel $-a$ est, qui singuli facile percurruntur; ex. gr. si $\frac{b}{a} = c$, adeoque $ac = b$, tum $\frac{-b}{-a}$ non potest esse $-c$; quia tum $-a . -c$ esset $= -b$; vero $-a . c = -b$.

Ita percurrendo casus, generaliter patet (sensu dicto), *signa aequalia dare tam in multiplicatione* quam *in divisione monomiorum* $+$, *inaequalia vero* $-$. (De complexis infra).

§ 32.

Hic ultro sequitur, etiam præter signa in casus multiplicationis divisionisque speciales inquirere, eosque ob oculos sistere.

1. Si multiplicator integer sit, schema sequens est; sit ex. gr.

Hosted by Google

$$A = 1 = \underline{U}, \quad B = \underline{U}\,\underline{U} = 2; \quad a = \underline{v}, \quad b = \underline{v}\,\underline{v},$$

sive

$$A = \underline{U}, \quad B = \underline{U}\,\underline{U}; \qquad a = \underset{*}{v}, \quad b = \underset{*}{v}\,\underset{*}{v},$$

id est

$$1U, \qquad 2U, \qquad 1v, \qquad 2v,$$

seu

$$A = 1 = \underset{*}{u}, \quad B = \underset{*}{u}\,\underset{*}{u}\,\underset{*}{u} = 3; \quad a = \underset{*}{v}, \quad b = \underset{*}{v}\,\underset{*}{v}\,\underset{*}{v}.$$

$$1u \qquad 3u \qquad 1v \qquad 3v$$

Ubi patet toties contineri multiplicandum in facto, quoties unitas in multiplicatore (§ 17); ita si b dividendus sit, et B integer sit divisor, quotum toties contineri in dividendo, quoties unitas in divisore continetur; adeoque nomina multiplicationis et divisionis, prius ex hoc casu depromta, ad hos etiam valere, alioquin *non juxta vocum, sed definitionis sensum intelligenda.*

2. Si multiplicator aut divisor B fractio vera sit:

sit

$$A = \underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}, \quad B = \underline{u}\,\underline{u}; \quad a = \underline{v}\,\underline{v}\,\underline{v}, \quad b = \underline{v}\,\underline{v},$$

vel

$$A = \underline{u}\,\underline{u}\,\underline{u}, \quad B = \underline{u}\,\underline{u}; \quad a = \underset{*}{v}\,\underset{*}{v}\,\underset{*}{v}, \quad b = \underset{*}{v}\,\underset{*}{v},$$

id est

$$3u \qquad 2u \qquad 3v \qquad 2v.$$

Patet factum esse minus multiplicando, et si B sit divisor, quotum esse dividendo maiorem*; nempe si divisor loco secundo fractio vera sit ex. gr. 2(3)*tum*, et quæratur tale, cuius b sit 2(3)*tum*, erit a quotus; ita si quæratur pecunia, cuius sit ducatus 2(3)*tum?* Aliud est, si quæratur ex. gr. linea b lineæ a quale mensum sit, quod item divisionis obiectum

* *atvero etsi divisor unitate minor loco tertio stet, quotus loco secundo prodiens* maior dividendo erit, si nonnisi expressio quoad unitatem in censum veniat.

Hosted by Google

est; nempe b dividendus, a divisor (tertium locum tenens), B quotus est. Si a sit divisor, patet in (1.) in exemplo primo quidvis, quod 2, in altero quidvis, quod 3, in (2.) quidvis, quod 2(3)*tum* quoad suam unitatem (cuiusvis speciei sit ea), quotum esse; omnes hos quotos tamen eatenus æquales esse (vide infra).

Notandum vero nomen quoti, vel quotientis inde venire, quod dum olim multiplicatio ex iterata additione et divisio ex iterata subtractione deducebatur, quasi in quoto annotari concipiebatur, quoties iterari addenda oporteat, donec summa dividendo prima vice non sit minor, aut quoties subtractio fieri debeat, usque nihil vel subtrahendo minus remaneat.

3. Sit multiplicator 0, multiplicandus non 0; tum sit multiplicandus 0, multiplicator non 0; demum sit factor uterque 0; erunt schemata sequentia:

$$A = \overset{u}{\text{—}},\quad B = 0;\quad a = \overset{v}{*},\quad b = 0,$$

id est

$$1u \qquad 0u \qquad\qquad 1v \qquad 0v;$$

$$A = \overset{u}{\text{—}}\,\overset{u}{\text{—}},\quad B = \overset{u}{\text{—}}\,\overset{u}{\text{—}}\,\overset{u}{\text{—}};\quad a = 0,\quad b = 0,$$

id est

$$2u \qquad\qquad 3u \qquad 2v \text{ (pro } v = 0),\ 3v;$$

$$A\,\overset{U}{\text{—}},\quad B = 0;\quad a = \overset{v}{0},\quad b = 0,$$

id est

$$1U \qquad 0U \qquad 0v \qquad 0v.$$

Ubi patet factum esse 0, si factorum aliquis 0 sit; et si dividendus 0 sit, et divisor non 0, quotum 0 esse; si vero divisor 0 sit, quotum esse quantitatem quamlibet, adeoque $\frac{0}{0}$ habere valores innumerabiles; nec factum non 0 esse unquam, si unus factorum 0 sit; adeoque $\frac{1}{0}$ esse quantitatem impossibilem. Ubi valor ipsius $\frac{0}{0}$ quæritur in expressione E per e divisa, quæritur valor, cui fit æquale vel ad quem limitem tendit expressio $\frac{E}{e}$, dum tam E quam e tendit ad limitem 0.

Hosted by Google

Interim tamen communiter accipi solet q pro valore ipsius functionis $f(r)$, (vide infra) si $f(x)$ tendat ad limitem q, dum x tendit ad r, — si alioquin valor ipsius $f(r)$ non detur; imo q insignitur nomine quoad r eodem, quo $f(x)$ quoad x gaudet. Ita fas est, si z tendat ad 0, adeoque $\frac{1}{z}$ tendat ad ∞ (§ 21), dicere quod $\frac{1}{z} = \infty$. Ita $\frac{1}{n}$ tendit ad 0, si n tendat ad ∞, et potest dici hoc sensu $\frac{1}{\infty} = 0$. Ita log 0 esset quantitas impossibilis (vide infra); sed hoc sensu fiet $-\infty$; nempe $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$, quod tendit ad 0, si $e > 1$. (His tamen mathesis carere etiam facile posset, quamvis hæ loquendi formulæ nullum errorem inducant.)

4. Si multiplicator aut multiplicandus unitas sit, sunt schemata sequentia:

$$A = \frac{u}{*} = 1, \quad B = \frac{u}{*} = 1; \quad a = \frac{v}{-}, \quad b = \frac{v}{-},$$

id est

$$1u \qquad 1u \qquad 1v \qquad 1v;$$

sive

$$A = \frac{u\ u\ u}{-\ -\ -} = 1, \quad B = \frac{u\ u}{-\ -}; \quad a = \frac{u\ u\ u}{-\ -\ -}, \quad b = \frac{u\ u}{-\ -} = B$$

id est

$$3u \qquad 2u \qquad 3\,(v = u) \qquad 2v.$$

Ubi patet, si factor unus unitas sit, factum esse æquale factori alteri, et si unitas sit divisor, quotum esse æqualem dividendo; si vero divisor sit æqualis dividendo, quotum esse unitatem cuiusvis speciei: nempe $1 . a = a$, et $b . 1 = b$, et $\frac{b}{1} = b$, et $\frac{b}{b} = 1$.

§ 33.

Sed intuendo schemata hæc, et reflectendo variæ adhuc oriuntur quæstiones. Primo num semper detur factum? et in genere terminus quartus in proportione? et an semper idem prodeat? (etsi permutentur factores, aut aliter utcunque). Si unitas sit una hexapeda, et multiplicator sit 4 pedes, atque multiplicandus 2 puncta temporis (ex. gr.), factum nullum (imago impossibilis) est; ita si dividendus sit 2 puncta, et divisor sit integer 3,

Hosted by Google

pro quavis unitate generaliter quotus non datur, et nonnisi pro illo casu datur, si unitas ipsius 3 sit n puncta, et divisor loco tertio stet; nempe tunc schema sequens est:

Aliq. $1 = 3nu$, quot. $= 2u$; div. $3 = 3n$ puncta, divd. $= 2$ puncta.

Ubi patet multiplicandum æquale $3n$ punctis per $2u$ multiplicatum dare pro facto 2 puncta; neque posse divisorem 3 loco secundo stare, quia tunc esset in duobus prioribus 1 et 3, et duo puncta deberent ad minimum per 3 partiri, ut sit $3v$.

Alioquin præter excepta, etsi incommensurabilia adfuerint, dari factum, quotum, et quartum in proportione, et unicum prodire, utcunque sumantur u et v, et resultata operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis (præter excepta) unica esse demonstrabitur, ut axioma V. applicari queat.

§ 34.

De uno tantum casu hic sermo sit, si factores permutentur. Patet ex schematibus, in quibus non est 0, factum esse cum multiplicando homogeneum, atque prodire idem, si $n(m)tum$ sit multiplicator, (cuiuscunque unitatis $n(m)tum$ sit); at si multiplicandus linea sit, multiplicator tempus, et permutentur, factum tempus quidem erit, sed quoad suam unitatem expressum erit æquale facto priori; quod ad divisionem quoque applicatur.

Sint prius factores integri homogenei, ex. gr. 2 et 3, et sit $1 = *$; patet ex § 32, 1. multiplicatorem 2 dare $\begin{smallmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{smallmatrix}$, in quo stellula quævis superior ponitur deorsum bis, adeoque $\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}$ toties ponitur, quot stellulæ supra sunt, adeoque idem factum esse factum etiam pro multiplicatore 3. Itaque in hoc casu factores permutati etiam factum idem præbent; (de pluribus factoribus infra).

Sint factores heterogenei, etsi non sint integri. Ex. gr. celeritas est quantitas respectiva, cuius index est spatium sub tempore t percursum. Mens simplicitati studens pro t unitatem temporis ponit. Sit hæc $= 2u$, et describatur sub quovis u spatium v, describetur $2v$ sub $2u$, et erit

Hosted by Google

hæc celeritas mobilis illius; dicatur hæc C, et sit tempus $T = 3u$; patet ex imagine sequente:

$$1 = 2u, \quad T = 3u; \quad C = \overset{v}{\text{—}}\,\overset{v}{\text{—}}, \quad S = \overset{v}{\text{—}}\,\overset{v}{\text{—}}\,\overset{v}{\text{—}}$$

esse S spatium sub T percursum, atque esse

$$S = T.C,$$

et esse

$$C = \frac{S}{T}.$$

Interim si pro t non unitas temporis, sed ex. gr. $4u$ poneretur, C esset $4v$, essetque $T.C = 6v$, (pro unitate priore $2u$), et non spatium sub T celeritate illa percursum prodiret. At etiam $\frac{S}{C} = T$, et etiam T multiplicatum per C est $= S$, sed eo tantum sensu, quod $\frac{S}{C}$ est quantitas ita quoad suam unitatem expressa, uti T quoad suam est; ita T multiplicatum per C quidem dat tempus, sed tale, quod quoad unitatem suam expressum est eatenus æquale ipsi S quoad suam unitatem expresso. Nam sit ex. gr. $5v$ unitas spatii, et $2u$ temporis unitas, $T = 3u$ sit multiplicandus, et $C = 2v$; dividatur u per 5 (juxta $1 = 5v$), et fiat schema sequens:

$$1 = 5v, \quad C = 2v; \quad T = 3u = \begin{matrix} v & v & v & v & v \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix} = 5\text{-ies} \begin{matrix} v \\ * \\ * \\ * \end{matrix}, x = \begin{matrix} v & v \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{matrix},$$

ubi patet x esse tempus 3(5)*tum* unitatis temporis ipsius $2u = \begin{matrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{matrix}$, nam v toties ponitur in x, quoties v in C, hoc vero toties, quoties u in $2u$, adeoque tot stellulæ sunt in x in linea superiore, quot sunt deorsum in $2u$, ponuntur autem superiores stellulæ in x toties, quoties u in T, nempe ter; in $2u$ autem ponuntur item 2 stellulæ deorsum positæ toties, quoties v in 1 continetur, nempe quinquies. Sed factum erat antea $S = 3v$, quod unitatis $= 5v$ item 3(5)tum est.

Notandum vero est, celeritatem esse quantitatem respectivam, cuius index spatium est, adeoque licet quodvis spatium poni arbitrarie possit pro unitate sive spatii sive celeritatis, si pro uno posita sit, iam alteri aliam dare nefas est. Sit ex. gr. celeritatum unitas illa celeritas, qua sub

Hosted by Google

unitate temporis (nempe $2u$) percurratur ex. gr. $5v$, tum spatii quoque unitatem $5v$ esse oportet; et si spatii unitas $5v$ sit, celeritatum unitatem illam esse oportet, qua sub unitate temporis percurritur $5v$. Ita prodit spatium e celeritate multiplicata per tempus, uti prius; imo et schemate (pro $T=1$):

$$1=2u, \quad T=2u; \quad C=5v=1, \quad S=5v=1$$

prodire spatii unitatem, si celeritatis unitas per temporis unitatem multiplicetur, et spatii unitatem per temporis unitatem divisam dare unitatem celeritatis patet.

Talis est conceptus *densitatis*; et ibi quoque densitatis (quæ pariter respectiva quantitas est, cuius index massa est, sub unitate voluminis), et massæ eadem unitas est.

Plures quoque eiusmodi conceptus dantur, qui sub hoc generali comprehenduntur. Si A et B certo respectu eodem quoad unitatem U omnium cum aliquo eodem homogeneorum gaudeant quantitatibus a et b, et qualitas ista ipsorum A, B dicatur generaliter q; dum de q ipsius A et q ipsius B sermo tanquam de quantitatibus est, intelligantur a et b.

Schemata multiplicationis divisionisque tyronibus iuxta varia exempla cum lineis, aliisque ob oculos ponenda sunt; ut ipsi factum quotumque exhibeant. In multiplicatione, si multiplicator $n(m)tum$ sit, multiplicandum per m partiendo (§ 16), una pars accipitur n-ies (§ 32). In divisione vero duo sunt schemata:

unitas	divisor $= d$	quotus $= x$	divid. $= D$
$3u$	$2u$	$3v$	$2v$

et

unitas	quotus $= x$	divisor $= d$	divid. $= D$
$5U$	$7U$	$5V$	$7V$

In prima imagine, D partiendo per 2, quotus e 3 eiusmodi partibus constat; in secunda, unitate partita per 5, quotus e 7 eiusmodi partibus constat.

Hactenus factum e duobus tantum factoribus fuit; facile cogitare est, adhuc unum accedere, ut ex. gr. factum ex b et c per a multiplicetur, et factum hoc per abc exprimatur; unde ad plures quotvis progredi via

Hosted by Google

est. Sed factores æquales (si ex. gr. quilibet $=a$) occurrere possunt n-ies, quod simplicius per a^n denotatur, et ab na omnino distingvendum est.

Porro succurrit facile ponere (aut obviam venire potest), quid si factum eiusmodi factorum, quorum quilibet est æqualis a et in quo factores numero n essent, dividendus, et aliud, in quo factores a numero m essent, divisor esset; tum facile adhuc aliud factum eiusmodi cogitatur, in quo factor quilibet æqualis A, et numerus factorum N est, divisum per item eiusmodi factum, cuius quilibet factor æqualis A, et factores numero M sunt. Tum ultro sequitur quotos hos comparare; et si æquales sint, tam ipsi A quoad a, quam ipsi a quoad A nomen dare. Unde sequens conceptus oritur. Quoscunque integros denotent n, m et N, M, si

$$\frac{a\,a\ldots}{a\,a\ldots}=\frac{A\,A\ldots}{A\,A\ldots},$$

et numerus factorum, quorum quilibet æqualis a, sit superius n, inferius m, et numerus factorum quorum quilibet æqualis A, sit supra N, inferius M, atque $\frac{n-m}{N-M}$ sit æquale vel tendat ad limitem q; et A sit æquale vel tendat ad limitem B: tum dicitur B *potentia* (dicatur elementaris, mox extendenda) *exponentis* q ipsius a, et denotatur per

$$B=a^q;$$

ipsum a vero dicitur *radix exponentis vel gradus* q ipsius B, denotaturque per

$$a=\sqrt[q]{B}.$$

Reperire a ex B et q, dicitur *radicem gradus* q *extrahere*, reperire B ex a et q, dicitur *elevare* a ad q. Unde ultro quæstio se offert; etiam ex B et a reperire q: adeoque quæritur primo, num detur pro datis P et a tale p, ut $a^p=P$ sit? Unde via aperitur, pro omnibus cum P homogeneis idem a retinere quæstione eadem; atque hic oritur *logarithmus elementaris*; nimirum p dicitur *log. elem.* P quoad basim a.

Hosted by Google

Quomodo vero ad nomenclationem ipsius $a^{\frac{n-m}{N-M}}$ perveniri potuerit, exemplum sequens monet: Sit

$$\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAA}{AA},$$

patet ad sinistram 4—2 factores manere, et ad dextram 3—2, et esse

$$a^2 = A = a^{\frac{4-2}{3-2}}.$$

Quomodo autem conceptus iste in analysi extendatur, paulo inferius exponetur.

§ 35.

Sit fas heic hucusque promissorum quibusdam complendis filum paulisper interrumpere, postea item continuandum.

I. De summis æqualibus ad æqualitatem additorum concludere minime licet, cum resultata sub conditione certa accepta e datis inæqualibus æqualia esse queant. Proventus expensæque æquales, etsi utrumque millionesies augeatur, certo respectu zero producunt, quamvis status mirum in modum differant; nulla cupido nec ulla explendi facultas, atque infinita voluntas cum facultate infinita discrimine infinito conveniunt in eo, quod neutri desit quidquam. Ita valde diversi factores factum (saltem respectu certo) æquale producunt: veluti cum mensa et vita comparatum est, ut non dapes aut panis siligineus, sed appetitus ad id, quod cuique est, dulcem elaborent saporem.

II. Si ex æqualibus demantur æqualia, residua possunt esse, prouti hinc vel illinc fiat demtio, valde inæqualia, si ita, uti remanent, considerentur; omnibus vero ad formam temporis reductis (§ 8.) absolute æqualia esse demonstrabitur.

Omnia ad formam temporis rectæque reduci dictum est (ibidem); potest etiam circulus adjici, ad quem etiam plura quantitatum genera commode reducuntur; interim et circulus ipse ad rectam reduci potest.

Hosted by Google

Quamobrem ut simul plura sint, quæ oculis subjecta fidelibus conceptum faciliorem clarioremque reddant, quum ita cum mentis natura comparatum sit, ut ab iis, quæ cernuntur, ad abstracta ascendatur; ad finem generalis conspectus Geometriæ recta planumque generabuntur, ut hæc quoque in postmodum specialius tractanda Arithmetica præsto sint.

Quantitatem autem ad formam temporis reductam liceat brevius *reductam* dicere.

III. At quæstio fit: num quantitas quævis unica reducta gaudeat? Arithmetica de *finitis* tractat (§. 18.), nempe de talibus, quorum quodvis T tale est, ut si qua portio u eius detur, sit tale nomen numericum n, ut nu sit semper $\geqq T$, nec unquam sit nu æquale T, vel minus quam T; qualia esse tempus rectamque inter quævis duo puncta demonstrabitur; eatenusque etiam reductam quantitatem finitam esse, si et quantitatis iam reductæ partes exinde omnes eiusmodi accipiantur. Multum nempe inde pendet, qualesnam et quomodo accipiantur partes; ex. gr. (Fig. 1.). Si v, z, angulos, u fasciam inter parallelas denotet, angulus T quoad qualemvis angulum v quantitas *respectiva finita* est, ipsis v ad verticem primum juxta se invicem positis; at cum quoad u haud detur tale n, ut $nu \geqq T$ sit, T *absolute finita* quantitas non est. (§ 18).

Num portio quævis spatii et superficies quævis undique clausa quantitas sensu dicto finita sit? vide inferius.

IV. Per ‚P *constat* (§ 6, 2.) *ex* $A, B, \ldots, F$‘ intelligitur $A, B, \ldots, F$ esse tales portiones ipsius P, quarum nulla cum ulla alia earundem portionem communem habet, et præter quas necquidquam ex P est. Per ‚Q *continetur a* P‘ vero intelligitur aut ipsum P aut portionem aliquam ipsius P esse $= Q$. Si T constet ex $a, b, \ldots, f$, et idem T habeat eiusmodi portiones $a', b', \ldots, f'$, ut $a \doteq a'$, $b \doteq b', \ldots, f \doteq f'$; tum, si T finitum sit, demonstrari potest, nulla id præter $a', b', \ldots, f'$ portione gaudere; at generaliter verum non est uti (Fig. 2.) ostendit.

Hosted by Google

V. Sed quæritur (§ 13.), si T finitum sit, et constet ex aliis partibus $\alpha, \beta, \ldots$ etiam: num quocunque ordine additæ partes quævis, e quibus constat, summam eandem dent? Generaliter *addita, etsi adfuerint positiva et negativa quoque, summam quocunque ordine posita eandem edunt.*

Exprimantur quantitates rectis, et generetur summa juxta (§ 10.), atque donec aliud monitum fuerit, dum recta una dicetur alia minor, concipiatur illa extremo communi in hanc cadente parte ex hac prominente superari. Considerentur prius tantum A et B, quavis determinationum ⊢⊣ ⊢⊣ affecta, et tum fiat conclusio ab n ad $n+1$ (F. pag. 21.). Sit (Fig. 4.) in $\mathfrak{p}$ initium primum, et extremum ultimum sit $\mathfrak{p}'$, sitque prius $A \doteq B$; erit aut utrumque positivum, aut utrumque negativum, aut unum positivum, alterum negativum; si utrumque positivum sit, sive A ponatur prius, sive B, cum congruant, idem est; ita quodvis postponatur, idem $\mathfrak{p}'$ prodit ad dextram; idem fiet ad sinistram, si utrumque negativum fuerit; si opposita sint, et A ponatur ex $\mathfrak{p}$ ad dextram, atque ab eius extremo sinistrorsum ponatur B, rectæ etiam ita congruunt (vide infra), adeoque $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ coincident, et summa est 0; atque manifesto idem fit prius B sinistrorsum, et ab eius extremo dextrorsum posito A. Si vero A superet ipsam B recta K (Fig. 5.), et ponatur ex $\mathfrak{p}$ prius A dextrorsum, et inde B sinistrorsum, cadet $\mathfrak{p}'$ a $\mathfrak{p}$ ad distantiam K, et idem $\mathfrak{p}'$ prodibit, prius ex $\mathfrak{p}$ ad sinistram posito B, atque inde dextrorsum posito A (ex B et K constante). Si A positivo et B negativo manente, A superetur a B recta K; erit (Fig. 6.) summa K ad sinistram a $\mathfrak{p}$ manifesto in utroque casu. Itaque duæ rectæ qualicunque determinationum ⊢⊣ ⊢⊣ affectæ fuerint, sive eadem, sive diversa, quovis ordine summam eandem præbent.

Si vero hoc de quantitatibus numero n valeat, valet etiam de $n+1$. Nam valeat de $A, B, \ldots, D$, et accedat E; erit E aut positivum aut negativum, est etiam resultatum priorum aut positivum aut negativum, adeoque quivis casuum priorum cum quovis posteriorum combinandus est.

Sit prius ⊢⊣E, et resultatum prius quoque sit positivum (poterit quidem hoc esse aut 0 aut maius aut minus quam E, at quilibet casus modo sequente evidens fit). Ponatur primo ⊢⊣E (Fig. 7.), terminetur in $\mathfrak{P}$, sit $\mathfrak{p}'$ resultatum priorum, et cogitetur $A, B, \ldots, D$ ex $\mathfrak{P}$ incipiendo plane

Hosted by Google

ita poni, uti antea ex $\mathfrak{p}$ incipiendo ponebatur, manifesto cadet extremum ipsius D in $\mathfrak{p}''$, nempe ad distantiam K dextrorsum; adeoque eo, quo caderet extremum ipsius E, si $\vdash\!\!+ E$ ex $\mathfrak{p}'$ (resultato ipsorum $A, B \ldots D$) poneretur, cum E constet ex K et R. Idem ergo resultatum dant $E, A, B, \ldots, D$ et $A, B, \ldots, D, E$; dant vero etiam $E, A, B, \ldots, D$ (excluso D) quolibet ordine resultatum idem (per hyp.), unde positi D extremum determinatur. Itaque omnes imagines, in quibus D ultimum est, summam eandem dant; et cum ipsorum $A, B, \ldots, D$ quodvis ultimo poni, et ut prius E anteponi postponique possit: idem et de $A, B, \ldots, D, E$ valet.

Si vero resultatum priorum fuerit $\vdash\!\dashv K$ (Fig. 8.), et prius ponatur $\vdash\!\!+ E$; erit $A, B, \ldots, D$ ex $\mathfrak{P}$ ponendo extremum ultimum in $\mathfrak{p}''$, nempe item sinistrorsum ad distantiam K a $\mathfrak{P}$, adeoque idem, quam si ex $\mathfrak{p}'$ (extremo priorum ultimo) poneretur $\vdash\!\!+ E$, (ex R et K constans).

Sit iam $\vdash\!\dashv E$, et resultatum $\vdash\!\!+ K$ (Fig. 9.) patet et hic eodem modo, extremo priorum ultimo et hic $\mathfrak{p}'$ et extremo ipsius E inde positi $\mathfrak{p}''$ dicto, sive primum sive ultimum sit $\vdash\!\dashv E$, idem prodire.

Pariter ostendent (Fig. 10., 11., 12.) casum, quodsi pro $\vdash\!\dashv E$ resultatum priorum quoque negativum sit: dummodo significationes literarum priores retineantur, et observetur hunc casum tres casus habere, nempe E aut $\doteq K$, aut maius aut minus quam K est. — Consequenter quotcunque fuerint addenda et sive mere positiva, sive mere negativa, sive mixta fuerint, quocunque ordine etiamsi prius omnia positiva, dein omnia negativa ponantur, summam eandem prodire manifestum est. Unde etiam patet resultatum idem esse, si summa positivorum ponatur prius ex $\mathfrak{p}$, et ex extremo ultimo horum (quod dicatur $\mathfrak{p}'$) ponatur sinistrorsum s summa negativorum; nam si ex $\mathfrak{p}'$ post se invicem ponantur, æquale prodit ei, quod esset, si ex $\mathfrak{p}$ ponerentur (Ax. V.), posterius vero summam negativorum daret. Patet etiam demum summam istam satisfacere, etiamsi illa, quorum summa s est, pro indice demtionis quoad illa, quorum summa S est, posita fuerint.

Quæritur tamen, num undevis fiat demtio atque in genere num additionis (adeoque subtractionis quoque) resultatum unicum sit, id est ex æqualibus semper eidem æquale prodeat? At prius de æqualitate quoad portiones (§ 6.) uberius agendum est, et antea de limite (§ 21.) quædam dicenda sunt.

Hosted by Google

VI. *Si q ita crescat, ut post quodvis incrementum adveniat novum, maneat tamen semper paucius quam Q: tum q limite gaudet.* (Fig. 13).

Nam sit q tempus (idem ad rectam per punctum descriptam, imo ad omnes quantitates reductas applicari potest); sitque temporis, a $\mathfrak{p}$ incipiendo crescentis in infinitum, nomen generale x; atque fiat in quovis puncto temporis quæstio, num q plus illo x, quod eousque generatum est, esse queat? Et denotet (E. pag. 20.) A id, quod *q plus illo x esse queat*; item exinde patet, dari *ultimum* aliquod punctum $\mathfrak{p}$, intra quod et $\mathfrak{p}$ semper A est, et post quod non est, atque tunc aut *ultimum A* aut *primum non A* esse. Ultimum A non est, quia si tunc $x \doteq x'$ sit, et ad quæstionem, *num $q > x'$ esse queat?* responsio *ita* sit: tum aliquod $q > x'$ erit, et certum tale q erit certa quantitate q' plus quam x', adeoque $\mathfrak{p}$ ulterius potuisset debuissetque accipi; nam ultra x' quoque ante finem temporis $x' + q'$ responsio semper *ita* fuisset. Est igitur in $\mathfrak{p}$ *primum non A*; adeoque x' est primum tale x, quo quidvis sit paucius, eo plus fieri q potest, sed quo (nempe ipso x') q plus fieri nequit. At neque $q \doteq x'$ fieri potest; nam dum id fieret, cum q quantumcunque fiat, novum (per hyp.) incrementum capere debeat, postea $q > x'$ fieret (contra plane demonstratum.) Itaque q tendit ad x'. (§ 21).

Patet hinc etiam quantitatem ita decrescentem, ut post decrementum quodvis item novum adveniat, nunquam tamen fiat o, neque negativa, limitem habere. Nam accipiatur (in præc.) q pro decremento ipsius Q; remanet $Q - q$, id est ex Q fit $Q - q$; quod crescente q sine fine minuitur, et pro limite habet id quod inter $\mathfrak{p}$ et $*$ est; si vero $*$ nempe extremum ipsius Q plane in $\mathfrak{p}$ sumatur, limes o fit; qui in neutro casu attingitur, cum q nunquam fiat $\doteq x'$, quamvis ipsi $\mathfrak{p}$ dato quovis propius terminari queat.

VII. *Tempus quodvis continuum $\mathfrak{pq}$ gaudet duabus partibus absolute aequalibus.* (Fig. 14).

Nam accipiatur punctum eius aliquod $\mathfrak{a}$, et aliud $\mathfrak{b}$ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{q}$; erit aut $\mathfrak{pa} \doteq \mathfrak{bq}$, aut alterutrum $\doteq$ parti alterius; si non prius sit, cogitetur ex $\mathfrak{p}$ positum illi æquale, quod altero minus est; terminetur in $\mathfrak{a}$; et in quovis

Hosted by Google

puncto a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{q}$ quæratur: estne tempus a $\mathfrak{p}$ usque ad illud tale, ut si ei æquale adjungatur, ante $\mathfrak{q}$ terminetur, vel non? Dicatur prius (E. pag. 16.) A; patet $\mathfrak{pa}$ (veluti partem quamvis eius) tale, $\mathfrak{pq}$ vero tale non esse; adeoque dari in aliquo puncto $\mathfrak{c}$ aut *ultimum* A aut *primum non* A. Ultimum A esse nequit: quia, si ipsi $\mathfrak{pc}$ æquale adjungatur, terminetur in $\mathfrak{b}$, (cum eatenus ante $\mathfrak{q}$ terminari debeat); cogitetur punctum $\mathfrak{d}$ inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{e}$ inter $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{q}$; erit aut $\mathfrak{bd} \doteq \mathfrak{de}$, aut alterutrum $\doteq$ parti alterius; vocetur z illud, quod altero minus est, alterum v; manifesto est

$$\mathfrak{pc} + z \lessdot \mathfrak{pc} + v,$$

et

$$\mathfrak{pc} + z + \mathfrak{pc} + z \lessdot \mathfrak{pq};$$

adeoque z adjuncto ipsi $\mathfrak{pc}$, punctum quæstioni respondens ulterius accipiendum in $\mathfrak{c}$ non esset. Est igitur in $\mathfrak{c}$ *primum non* A; adeoque aut

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq},$$

aut

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \gtrdot \mathfrak{pq}.$$

Posterius esse nequit; nam terminetur $\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc}$ in $\mathfrak{r}$; cogitetur punctum aliquod $\mathfrak{s}$ inter $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$, et $\mathfrak{qs}$, $\mathfrak{sr}$ dicantur x, x'; erit aut $x \doteq x'$, aut alterutrum altero majus; sit

$$x \doteq x' + k,$$

ubi k, x, x' eadem determinatione gaudent; erit (propter V.)

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq} + x' + x' + k \doteq \mathfrak{pq} + k + x' + x';$$

atque

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} - x' - x' \doteq \mathfrak{pc} - x' + \mathfrak{pc} - x' \doteq \mathfrak{pq} + k;$$

itaque iam ante $\mathfrak{c}$ fuisset *non* A; idem patet, si $\mathfrak{qs} \doteq \mathfrak{sr}$. Manet igitur $\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq}$.

VIII. *Si temporis Q accipiatur dimidium, et cujusvis dimidii item dimidium accipiatur, ac nomen eorum generale sit z: tum z tendit ad limitem zero.*

Nam crescente q (in VI. Fig. 13.) a $\mathfrak{P}$ usque ad $*$, fiet ultimo $Q - q = 0$. Quæratur a $\mathfrak{P}$ incipiendo in cujusvis q puncto extremo [imo ultra $*$ quoque ubi quodvis punctum tale est, ante quod datur tale

Hosted by Google

$Q-q$ (cum id in $*$ æquale o sit), quo z minus fieri nequit] num z quovis $Q-q$ quod antea fuit, minus fieri possit? Erit ultimum aliquod punctum $\mathfrak{p}$, in quo responsio *ita* erit (E. p. 20.). Si $\mathfrak{p}$ ante $*$ esset, tum eo, quod inter $\mathfrak{p}$ et $*$ est, a dicto, aliquod z est minus quam $a+\omega$ [denotante ω quantitatem minorem quam a], quia hoc $Q-q$ ante a fuit, huius vero dimidium est $\frac{a}{2}+\frac{\omega}{2}$, quod minus quam a esse patet; itaque punctum $\mathfrak{p}$ ulterius versus $*$ accipiendum fuisset. Fit itaque z minus quovis, quod a $\mathfrak{p}$ ipsi $*$ quantumvis propissimo usque ad $*$ est, o vero fit nunquam. Consequenter $z \backsim 0$.

IX. *Sit u tempus quoddam continuum inter duo puncta, et multiplicetur u per factum e factoribus numero n, quorum quivis $=2$; erit factum numerus quoad u.*

Respondeat enim cuivis u numeri nu aliquis e factoribus dictis ipsi 2 æqualibus, et cuivis respondeat alius; atque ab aliquo puncto temporis $\mathfrak{p}$ ponatur cogitatione in futurum $2u$ sub primo u ipsius nu, tum sub secundo u ipsius nu adjungatur item $2u$, et sub quovis novo u ipsius nu ab extremo novissime positi ponatur cogitatione in futurum æquale ei, quod a $\mathfrak{p}$ eousque positum est (per ax. I.); ultimum u ipsius nu adveniet (ax. II.), et tum

$$2.2\ldots 2u$$

positum erit. Est autem quivis numerus quoad u bis positus numerus quoad u; adeoque $2.2\ldots 2u$ quoque (F. pag. 21).

X. *Temporis continui Q, quod inter duo puncta est, quaevis portio K certo numero accepta superat ipsum Q.*

Nam quæratur (ut in VIII.) in quovis puncto a $\mathfrak{p}$ incipiendo usque ad $*$ (imo ultra quoque), num *z certo dimidiationum numero* minus quovis $Q-q$, quod antea fuit, fieri potest? et hic datur ratiocinio iam sæpius repetito (E. pag. 20.) punctum aliquod $\mathfrak{p}$, in quo ultimo *ita* respondetur; quum prius omnino *ita* sit, aliquando vero, si nempe ultra $*$ eatur, detur tale $Q-q$, quod antea fuit, nempe dum $Q-q=0$, quo z nunquam minus fieri potest. Patet vero (ut in VIII.), $\mathfrak{p}$ nullibi ante

Hosted by Google

* fieri posse. Itaque z dato quovis K minus fieri certo dimidiationum numero potest, et consequenter

$$K \rhd \frac{Q}{2.2\ldots2},$$

seu cum $2.2\ldots2$ (per præc.) numerus sit ex. gr. n, est $K \rhd \frac{Q}{n}$, adeoque $Q \lhd nK$.

XI. *Tempus continuum T per quemvis integrum n dividi potest.* Nam pro quovis n dari tale $2.2\ldots2$, ut

$$2.2\ldots2u \rhd nu,$$

facile patet, si cuivis u ipsius nu aliquis (et cuivis alius) factor 2 respondeat; semper enim accedente novo factore 2, ipso u, quod in nu ponitur, maius accedit, et quidem maiore, nam primo u ipsius nu respondet $2u$.

Pro $n = 1$ aut $n = 2$, aut $n = 2.2\ldots2$ dictum iam est; quæstio de aliis est. Dividatur T per $2.2\ldots2 \rhd n$, sitque quotus a, et dicatur d dimidium ipsius T; erit $nd \rhd T$ (cum n ad minimum 3 sit), et $na \lhd T$, nam a si n-ies accipiatur, ex T adhuc supererunt tot a, quo numero superat $2.2\ldots2$ ipsum n. Quæratur ab initio ipsius a porro usque ad finem ipsius nd eundo, in quovis puncto $\mathfrak{p}$, num (si illud tempus, quod ab initio ipsius a usque ad $\mathfrak{p}$ est, nomine generali x dicatur) sit $nx \lhd T$? erit (pag. 20.) aliquod punctum $\mathfrak{P}$, in quo aut ultimo erit $nx \lhd T$, aut primo erit nx non minus quam T. Prius esse nequit; nam sit tum $x \doteq x'$; si $nx' \lhd T$ esset, tum sit $nx' + b \doteq T$; dicatur b' quotus ex b per $2.2\ldots2 \rhd n$ diviso, erit

$$2.2\ldots2b' = b \rhd nb',$$

(ut supra); adeoque $nx' + nb'$ manifesto est minus quam $nx + b$, quod erat $\doteq T$, itaque etiam $n(x' + b')$ est minus quam T, adeoque daretur aliquod maius quam x', quod n-ies acceptum minus quam T, et in $\mathfrak{P}$ non esset ultimo $nx \lhd T$. Est igitur in $\mathfrak{P}$ prima vice nx non minus quam T; itaque tum nx' aut $\doteq T$, aut $nx' \rhd T$ est. Posterius esse nequit;

Hosted by Google

nam sit $nx' - b = T$, et denotet b' id, quod antea, erit nb' item $\lessdot b$, adeoque

$$nx' - b \lessdot nx' - nb';$$

id est

$$T \lessdot n(x' - b'),$$

(uti statim patebit); et in $\mathfrak{P}$ non esset primum tale x, ut $nx \gtrdot T$ sit, nam antea iam $x' - b'$ tale fuit. Consequenter $nx' \doteq T$ est. Enimvero heic quantitatum comparatio quoad æqualitatem, vel maioritatem minoritatemve ita in proxime dictis intellecta est, uti (sub V., pag. 53.) dictum est; nempe etsi de tempore sermo sit, et ex. gr. α, β, γ sint tempora continua, atque $\alpha - \beta$ (pro α, β, γ positivis atque $\beta < \alpha$) cum γ comparetur; ponatur cogitatione e certo temporis puncto $\mathfrak{p}$, tempus α in futurum, et ab extremo huius dematur e præterito tempus $\doteq \beta$, sit extremum huius $\mathfrak{p}'$, cogiteturque ex $\mathfrak{p}$ item in futurum, tempus $\doteq \gamma$; atque per id, quod alterutrum ex. gr. γ maius quam $\alpha - \beta$ est quantitate q, intelligatur in dictis, usque ad extremum temporis $\doteq \gamma$ ex $\mathfrak{p}$ positi, post $\mathfrak{p}'$ tempus q esse. Mox $\gtrdot$ et $\lessdot$ et $\doteq$ generalitate superiori accipientur. *Omnia dicta* vero ad *rectam* applicari patet.

Quod vero si n numerus integer sit, et α, β positiva sint, (tempora aut rectæ),

$$n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$$

facile patet. Nam dum $(\alpha + \beta)$ accipitur n-ies, ponitur tam α, quam β numero eodem n, necquidquam ponitur aliud. Ita si accedat tertium γ, $\alpha + \beta$ dicatur B, et inde via de n ad $n + 1$ progredi, usquequo libuerit, licet.

Pariter

$$\frac{\alpha + \beta}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n}.$$

Nam sit

$$\frac{\alpha}{n} = u, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{n} = v;$$

patet u in α, et v in β, adeoque u et v in α et β poni n-ies. Ita (pro $B = \alpha + \beta$) est

$$\frac{\gamma + B}{n} = \frac{\gamma}{n} + \frac{B}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{n};$$

et ita de n ad $n + 1$ progredi licet.

Hosted by Google

Si omnia negativa fuerint, æque patet. Si vero

$$k = \alpha - \beta$$

sit per n multiplicandum, aut per m dividendum, tum e quovis α erit unum β demendum, adeoque si n-ies ponatur, ex n-ies α demetur n-ies β, et totidem k nempe numero n prodibunt. Ita si

$$\frac{\alpha}{m} = u, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{m} = v,$$

erit

$$\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m} = u - v,$$

et

$$m(u - v) = mu - mv = \alpha - \beta.$$

Nam

$$mu = \alpha, \quad \text{et} \quad mv = \beta;$$

itaque

$$u - v = \frac{\alpha - \beta}{m} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m}.$$

Unde (ut prius) ad plura quotvis et qualiavis progrediendo, patet idem prodire; sive summa dividatur per m, sive singula divisa addantur; item sive quotus prior per n multiplicetur, sive quoti singuli multiplicati per n addantur.

XII. *Si e recta (vel tempore) possint nu accipi ita, ut* ω ($= 0$ *vel* $< u$) *supersit, ex eodem* $(n+1)u$ *accipi nequeunt.* Nam partes quævis ipsius $nu + \omega$ quocunque ordine post se invicem positæ ex $\mathfrak{p}$ incipiendo in eodem puncto terminantur, (V.); adeoque etsi u ponatur n-ies post se invicem, et ad finem eorum adjungatur ω; pariter si $(n+1)$-ies quoque adesset u, et toties post se invicem poneretur, ac si quod R superesset, postponeretur; manifesto autem $(n+1)$-um u ultra ω terminatur.

XIII. *Quaevis quantitas A ad unicum reduci potest*; (*talem ut in* (III.) *intelligendo, et quae tam ipsa, quam quaevis portio eius reduci potest aequalitate terminata, aut interminata per limitem,* § 6. *et* 8.).

Nam possit (Fig. 15.) tam ad $\mathfrak{p}*$ quam ad $\mathfrak{p}*'$ reduci; tum $\mathfrak{p}\mathfrak{s} \doteq nu$

Hosted by Google

(pro $u \lessdot \mathfrak{st}$) est $\gtrdot A$; $\mathfrak{p}\mathfrak{s} + \mathfrak{st}$ vero esset $\lessdot A$; adeoque nu esset $\gtrdot A$ et $\lessdot A$ (contra III.).

XVI.* Si $A = B$, est etiam $A = B$, id est $A' \doteq B'$ (§ 8.).

Nam ponantur partes utriusque congruæ ex $\mathfrak{p}$ incipiendo post se invicem ad rectam; si terminata sit æqualitas, manifeste simul terminabuntur, cum quævis (per præcedentia) unica reducta gaudeat; si interminata fuerit æqualitas, tum reducta semper crescens, manens tamen certo dato minus, gaudebit limite, et quidem utrique communi. Nam si (fig. 15) A' in $*$ et B' in $*'$ terminaretur, manerent omnes partes ex A depositæ intra $*$, ipsi tamen quam proxime euntes; partes vero ipsius B iis congruæ semper simul ponerentur; et utriusque differentia a suo limite quovis dabili u minus fieret; sit

$$\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{s}}{n} = u, \quad u \lessdot \mathfrak{st};$$

differentia partium ex B positarum (cum semper intra $*$ terminentur simul cum partibus congruis ex A positis) ab eius limite supposito $\mathfrak{p}*'$ semper $\gtrdot \mathfrak{st}$ manebit; adeoque cum hæc $\lessdot u$ fieri debeat, erit etiam $\mathfrak{st} \lessdot u$; itaque cum $\mathfrak{st} \gtrdot u$ erat, in uno casu neque unum u posset ex $\mathfrak{st}$ accipi, in altero præter u adhuc superesset. Itaque hoc pacto reducta eodem limite gaudent; quodvis autem ad unicum tantum reduci potest.

Conversim quoque si $A' \doteq B'$, etiam $A = B$. Nam ex. gr. circuli A reducendi partibus certis in rectangula altitudinis α ordinatis, hæc ex $\mathfrak{p}$ incipiendo post se invicem junguntur; et si baseos limes $\mathfrak{p}*'$ sit, pro quovis dato ω licet ipsi $*'$ tam prope ire ex. gr. in $\mathfrak{s}$, ut rectangulum ex α et $\mathfrak{s}*'$ sit $\lessdot \omega$, et etiam, quod ex A superest, $\lessdot \omega$ sit; si pro B propius eundum in $\mathfrak{t}$ est, ut, quod ex eo superest, $\lessdot \omega$ sit, tum ex A adhuc minus supererit; respondet vero cuivis parti a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{t}$ pars aliqua ipsius A et aliqua ipsius B absolute æqualis et cuivis alii alia. (IV.).

* XIV, XV et in editione prima desunt.

Hosted by Google

Hinc etiam signorum $\rhd$, $\lhd$, $=$ quævis duo exclusa ponunt tertium, et quodvis excludit reliqua duo. Nam si A non $\rhd$, nec $\lhd B$, tum A' neque ulterius neque interius terminatur quam B'; quia si ex. gr. ulterius terminaretur, sit a' pars ipsius A' cum B' congrua, erit tum $a = B$, et a pars ipsius A erit, quia ei quoque, quod in A' præter a' est, respondet aliquid ex A præter a; itaque $B \lhd A$ esset (contra hyp.); ita nec interius terminatur; consequenter A' et B' simul terminantur; adeoque $A' \doteq B'$, et inde $A = B$. Si A non $\rhd$, nec $= B$, tum A' item non terminatur ulterius quam B'; neque simul, quia tum $A = B$ esset; itaque interius terminari debet; adeoque A' est pars ipsius B', et id ex B. quod huic parti respondet, est $= A$, reliquo ipsius B' vero respondet aliquid ex B, et eo superat B ipsum A. Ita patet, esse $A \rhd B$, si A non $\lhd$, nec $= B$. Si vero $A = B$, tum A non $\rhd$, nec $\lhd B$; quia tum $A' \doteq B'$, et si $A \rhd$ vel $\lhd B$ esset, A' aut ulterius aut interius terminaretur. Ita si $A \rhd B$, tum A non $=$ nec $\lhd B$; quia tunc A' ulterius quam B' terminatur, si vero $A =$ vel $\lhd B$, tum A' simul aut interius terminaretur. Ita si $A \lhd B$, tum A nec $=$ nec $\rhd B$ esse patet. Nempe:

XVII. *Si A constet ex a, b, est $A' = a' + b'$ (etsi interminata sit reductio).* (Fig. 16.) Sit enim a' in $\mathfrak{p}$ terminatum ex $\mathfrak{P}$ incipiendo, et b' sit $\mathfrak{p}*$; si A' non in $*$ terminetur, terminabitur aut ultra aut intra. Si in $*'$ terminetur, dividatur $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ per talem integrum, ut sit quotus $u \lhd \mathfrak{p}*$ et etiam $< \frac{**'}{2}$; transferatur u ex $\mathfrak{p}$ incipiendo usque quo aliquod u ipsum $*$ primo transgrediendo in $\mathfrak{h}$ terminetur; primum u post $\mathfrak{p}$ terminetur in $\mathfrak{k}$; erit $\mathfrak{p}\mathfrak{k} + *\mathfrak{h} \lhd$ aut $= 2u$, quia $*\mathfrak{h}$ ad summum $= u$ est; $\mathfrak{P}\mathfrak{k}$ est $\rhd a$, et $\mathfrak{p}\mathfrak{h} \rhd b$; ponatur $\mathfrak{p}\mathfrak{k} + *\mathfrak{h}$ post $*$, terminetur in $\mathfrak{s}$, (patet nempe $2u$ esse $\lhd **'$), erit $\mathfrak{P}\mathfrak{s} \rhd a + b$; itaque cum $\mathfrak{P}\mathfrak{s} = \mathfrak{P}\mathfrak{h} + u = nu$ (nempe certo numero ipsius u); est $nu \rhd A$ (cum A ex a et b constet). Item nu esset $\lhd A$, si A' in $*'$ terminaretur, quia tunc A etiam $\rhd \mathfrak{P}\mathfrak{t}$ esset. Itaque ex A possent una vice plura u quam altera accipi (contra XII.). Si vero A' intra $*$ terminaretur in $\mathfrak{l}$, ex initio $n - 1$-ti u in $\mathfrak{h}$ terminati ponatur unum u versus $\mathfrak{p}$; patet n ita accipi posse, ut hoc inter $*$ et finem ipsius A' terminetur in $\mathfrak{i}$; concipiatur $\frac{u}{2}$ demi ex $\mathfrak{p}$ versus $\mathfrak{P}$;

Hosted by Google

reliquum ex a erit; ita demto $\frac{u}{2}$ ex $*$ versus $\mathfrak{p}$, reliquum usque ad $\mathfrak{p}$ ex b erit; itaque demto u ex $*$ versus $\mathfrak{p}$, omne ex $\mathfrak{pi}$ ex a et b adeoque ex A esset; sit $\mathfrak{q}$ inter $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{i}$, aderunt in $\mathfrak{pq}$ omnes partes ipsius A; et ex $\mathfrak{pi}$ (pro $\mathfrak{qi} = v$) plura v accipi poterunt, quam ex $\mathfrak{pq}$, adeoque ex A in uno casu plura quam in altero accipi poterunt (contra XII.). Itaque neque intra, neque ultra $*$ terminari A' potest, sed in $*$ terminari debet.

Si plures quotvis certo numero m fuerint partes ipsius A; tum nominentur a et b una litera α, et si B constet ex α, c, erit $B' = \alpha' + c'$; et ita de n ad $n + 1$ progrediendo, patet partes componentes reductas post se invicem junctas totum reductum exhibere.

XVIII. Posteaquam (in XIII.) demonstratum est, quantitatem reducibilem unica reducta gaudere, [si ubi de quantitate sermo in Arithmetica est, semper ut reductæ tractentur] patet (ex V.) *additionis*, adeoque etiam *subtractionis*, § 14., *resultatum unicum* esse. Interim tamen si quantitates ita, uti sunt, considerentur, [ex. gr. sit circulus $C =$ quadrato Q, et triangulum $a =$ circulo c] dubium subvenit, num etiamsi undevis dematur a ex C et c ex Q, residuum R ex C sit $=$ residuo r ex Q? Erunt omnino: nam (per præcedentia) $a' + R' = C'$, et $c' + r' = Q'$, atque $C' = Q'$, et $a' = c'$; unde patet a' et c', si ex eodem initio ponantur, simul terminari, et inde posita R' et r' quoque simul terminari; itaque $R' = r'$, adeoque $R = r$. Supponitur hic circulum et reliqua finita (sensu III.) esse: de hoc tamen aliquid hoc respiciens statim addetur.

Si $a' = C'$, ac $R = 0$, erit et $r = 0$. — Non tamen generaliter dici potest, si ex æqualibus demtis æqualibus ex uno nihil supersit, neque ex altero superesse quidquam. Ex. gr. (Fig. 2.) $a \doteq a'$, $b \doteq b'$, $f \doteq f'$, et præter a, b, f nihil, præter a', b', f' vero g superest; at de talibus quantitatibus in Arithmetica sermo est, uti (in III.) dictum est, quarum nulla portio omni dabili pluries e toto ipso accipi potest. Nempe si e tali possit u accipi n-ies, et supersit $\omega = 0$ vel $< u$; ex eadem $(n + 1)$-ies accipi u nequit. Nam sit ω' id, quod in priori casu adjiciendum esset, ut $(n + 1)$-um u compleatur, tum e partibus ipsius $nu + \omega$ deberet $nu + \omega + \omega'$ exstrui; dematur ω', repleatur vacuitas eius ex $nu + \omega$, et nova vacuitas exorta

Hosted by Google

item e residuo ipsius $nu + \omega$, et quævis nova vacuitas item inde expleatur in infinitum; vacuitates istas explentia sunt partes ipsius $nu + \omega$ (ex iis e quibus $nu + \omega$ constat); itaque ω' accipi ex A omni dabili pluries posset.

XIX. Adjicere adhuc quædam de *aequalitate terminata* liceat, *quantitatibus heic, uti sunt (sine reductione) consideratis.*

1. Si $A = B = C$, *est etiam* $A = C$ *(aequalitatem heic terminatam, nisi aliud monitum fuerit, intelligendo).*

Nam constet A ex $a, a', \ldots, u$; B ex $b, b', \ldots, v$, item ex $\beta, \beta', \ldots, v'$; et C ex $c, c', \ldots, t$, ac $a \doteq b$, $a' \doteq b', \ldots$ et $u \doteq v$, atque $\beta \doteq c$, $\beta' \doteq c', \ldots$ et $v' \doteq t$ (accento iam non sensu XVI. et sequ. accepto). Fiat initium cum β, progrediendo usque ad v'; est β aut aliquod ipsorum $b, b', \ldots, v$, aut constat ex aliquo vel aliquibus, aut simul etiam (vel tantum) portione vel portionibus eorundem; cuivis tali autem, quod aut aliquod ipsorum $b, b', \ldots, v$ aut portio alicuius eorum est, respondet aliquod ipsorum $a, a', \ldots, u$, aut in casu posteriore aliqua portio alicujus ipsorundem absolute æqualis. Itaque si c in illas portiones discerptum cogitetur, quum $c \doteq \beta$ sit, cuivis earum datur in A absolute æqualis. Pariter $c' \doteq \beta'$ considerato, ipsi c', aut portionibus ejus omnibus reperientur in A absolute æquales, et quidem cum prioribus nullam portionem communem habentes; nam si aliqua portio bis occurreret, tum $a, a', \ldots$ portionem haberent communem (contra IV.). Ita percurrendo singula $c, c', \ldots, t$ et $\beta, \beta', \ldots, v'$, ubi ad t adeoque ad v' perventum est, atque ex C nil superest, neque ex B supererit (XVIII.), adeoque neque ex A.

Consequenter $A = C$ æqualitate terminata.

2. *Si* $P \doteq Q$, *et portio quaevis* p *ipsius* P *dematur undevis, atque portio quaevis* q *ipsius* Q *dematur, et* $p \doteq q$; *erunt illa, quae ex* P *et* Q *remanent, aequalitate terminata aequalia.* (Fig. 17.).

Nam dicatur P' id, quod superest ex P præter p, et Q' id, quod præter q ex Q est, et sit p' id, quod congruentibus P et Q ipsi p ex Q congruit, et q' id, quod tum ex P ipsi q congruit; et dicatur R complexus omnis ejus, quod præter p et q' ex P est, et R' complexus omnis,

Hosted by Google

quod ex Q præter q et p' est. Aut habebunt p et q' portionem aliquam communem, aut non.

a) Si non habeant (Fig. 17,*a*) manifeste constat P' ex R et q' (nam P constat ex p, q', R), et Q' ex R' et p'; atque $R \doteq R'$, et $q' \doteq p'$; adeoque Q' ex P' exstrui potest, q' ex P' in p', et R in R' positis. Imo æqualitas absoluta restituitur inter residua, si in Q' in locum demti q ponatur item ex Q' exemtum p', aut in P' in locum demti p ponatur item ex P' exemtum q'.

b) Si vero p et q' in P portionem communem habeant: tum si pars communis dematur, residua ex P et Q erunt absolute æqualia; itaque id tantum quæritur, num ex p et q remaneant æqualitate terminata æqualia. Quæstio igitur huc redit.

Si (Fig. 17, *b*) $A \doteq B$, et pars K ipsius A cum parte k ipsius B (ut in figura trium prima) coincidat; id quod ex A præter K est, ei quod ex B præter k est, æqualitate terminata æquale est.

Dicatur enim quævis pars ipsius k *illi parti ipsius* K *respondens*, cum qua tunc congruit; ponaturque A super B, ut congruant; atque id ex A, quod præter K est et nunc in k cadit, dicatur K', id ex A vero, quod nunc extra K et k cadit, sit A'; ita id ex B, quod præter k est et nunc in K cadit, sit k', id ex B vero. quod nunc extra k et K cadit, sit B'; atque id ex k, quod nunc cum K' coincidit, sit b, et id ex K, quod nunc cum k' coincidit, sit a; atque id ex K, quod præter a est, sit K'', et id ex k, quod præter b est, sit k''.

Dematurque a ex K, et ei respondens a' ex b, ac ponatur k', quod sub a erat, in locum demti a' juxta a); atque residuis ex A, B, K'', k'', b, (restituta per I. æqualitate absoluta), generaliter $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{K}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$ dictis, post quamvis operationem, si quid u ex k' (migrante in B semper eo ex k', quod extra b cadit), sub $\mathfrak{K}$ cadat, dematur ex $\mathfrak{K}$ illud α, quod supra u cadit, et e complexu ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k}$ dematur α' ipsi α ex k respondens, ponaturque u in locum demti α' juxta a), continuando, donec nullum u sub $\mathfrak{K}$ cadat. Erit residuum ex A absolute æquale residuo ex B, atque ex A nonnisi per partes resectum K, ex B vero demtum k erit.

Nempe K constat ex K'' et ex a supra k' cadente; k constat ex k'

Hosted by Google

et ex b sub K' cadente; A constat ex K', K'', a, A', et B constat ex k', k'', b, B'.

K'' et k'' (ita $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$) coincidunt. Nam nullum punctum ipsius K'' extra k'' cadit; nam illud in B cadens, in k' vel b aut B' caderet; in k' vero non cadit, quia k' extra K'' est, in b non, quia b cum K' coincidens extra K'' est, nec in B', quia hoc extra K et k est. Pariter nullum punctum ipsius k'' extra K'' cadit; idemque ad $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$ applicatur.

Hinc $b = a$; nam $K = k$, $K = K'' + a$, et $k = k'' + b$, et K'' et k'' coincidunt.

Semper residuum illud u ex k', quod ex b prominet, migrat in B; nempe si quod u ex k' extra b cadat, illud sub $\mathfrak{K}$ cadet, quia ex k nonnisi $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k}$ superest, $\mathfrak{k}$ vero cum $\mathfrak{K}$ coincidit; atque hoc novam demtionem parit. Si vero nullum u extra b cadat, tum jam totum k' in b positum (in loca demtorum) erit, necquidquam ex parte b ipsius k supererit; quia semper aliæ partes aliis respondentes demtæ sunt, et $k' = b$.

Eritque residuum ex k nonnisi $\mathfrak{k}$, adeoque residuum ex K erit $\mathfrak{K}$; nam $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{K}$ *coincident*, nisi utrumque o sit; neque ex K majus vel minus residuum quam ex k est. Consequenter etsi utrumque o sit, ex absolute æqualibus demta, absolute æqualia relinquent. In figura allata patet.*

* Hæc demonstrationi æqualitatis parallelogrammorum Euclideæ evidentiam pariunt; quamquam id etiam per XVII. et XVIII. fiat.

Interim ubique, ubi fieri potest, æqualitas terminata ostendenda; quod in parallelogrammis, triangulis et prismatibus rectilineis, altitudinibus basibusque æqualibus gaudentibus, (et pluribus aliis) facile fit. Priora et inspectione figuræ (17, *c*) patent; idemque ad prismata (pro rectis parallelis plana parallela ponendo) facile applicatur. Nempe si $\mathfrak{ea}' \parallel \mathfrak{AB}$ et fuerint triangula $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}'$: fiat

$$\mathfrak{AE} = \mathfrak{EB} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Ee} \parallel \mathfrak{aB} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E}\mathfrak{e}' \parallel \mathfrak{Ba}';$$

positisque triangulis $\mathfrak{AEK}$ in $\mathfrak{aeK}$, et $\mathfrak{AEk}$ in $\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'\mathfrak{k}$; parallelogramma $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EBa}'\mathfrak{e}'$ secentur parallelis, in priore ad $\mathfrak{EC}$ per $\mathfrak{aB}$ ad distantias $\mathfrak{BC}$, in altero ad $\mathfrak{BC}$ per $\mathfrak{Ee}'$ ad distantias $\mathfrak{EC}$; si $\mathfrak{BC}$ non contineatur certies in $\mathfrak{Ba}$, patet esse $\mathfrak{gh}$ parallelum ad $\mathfrak{EB}$. Eritque

$$A \doteq A, \quad B + B' \doteq b + b', \quad C + C' \doteq c + c',$$
$$D + D' \doteq d + d', \quad E + E' \doteq e + e', \quad F \doteq f + f'.$$

Unde partes omnes sibi invicem respondentes assignari patet; tam pro triangulis $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}'$, quam pro parallelogrammis $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EBa}'\mathfrak{e}'$, tam altitudinibus æqualibus, quam basibus æqualibus gaudentibus.

Hosted by Google

Si vero supponatur, quotvis operationibus haud unquam evenire, ut nullum u extra b cadat; tum quodvis u sub K'' cadet, adeoque nisi u (residuum ex k') tenderet ad 0, fieret K' tendens ad infinitum; atque tum etiam propter $b = k'$ residuum tendit ad 0; nempe si u dicatur, quod sub $\mathfrak{K}$ cadit, k' demto u sub b cadit, atque ex b dabili quovis minus supererit. Dari igitur oportet in concreto partem certam ipsius k', adeoque ipsius a, item ei ex k respondentem partem ipsius b, quæ semper minuerentur; sed hæ partes per a) demi possunt; et tum necessario majus demitur, quam per operationes numero aliquo factas relinquitur. Unde quivis casus ad operationum numerum finitum reduci potest.

XX. *Ut resultatum multiplicationis divisionisque unicum esse probetur, de proportione quaedam, et prius fractionum commensurabilium primaria referenda sunt.*

1. In § 22. 2(3)tum *ipsius C solet per* $\frac{2C}{3}$, *et, si* $C = 1$ *sit, per* $\frac{2}{3}$ *exprimi, quod signum quoti erat.* Est nempe valor uterque æqualis. Sit enim

$$C = * * * ;$$

item

$$C = * * * ;$$

ponetur $\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}$ (nempe tot $*$, quot C) in illis C toties, in quot partes C partitum est; itaque

$$\begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix} = \frac{2C}{3} ;$$

et idem prodit, C per 3 partiendo, et duas partes ejusmodi sumendo.

Patet etiam (§. 32.) idem prodire, si C per $\frac{2}{3}$ multiplicetur. Est igitur 2(3)tum ipsius $C = \frac{2C}{3} = \frac{2}{3} . C$. Vocantur (§ 22.) $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{q}$ *termini fractionis*; *prior numerator*, posterior *denominator* audit. Sint prius *termini integri.*

2. *Si numerator per integrum multiplicetur, valor novus priore toties evadet major; si dividatur, toties minor fiet; si denominator multiplicetur, toties minor, si dividatur toties major fiet; si vero ter-*

Hosted by Google

minus uterque per eundem integrum multiplicetur, aut uterque per eundem dividatur, valor non mutatur.

Nam valor prior ipsius $\frac{2}{3}.C$ erat $= ✲✲$, quia si $\frac{C}{3} = ✲$, hoc bis accipitur; si vero pro 2 ponatur 5.2, tum 5.2-ies ✲, idest 5-ies ✲✲ accipietur. Hinc vicissim patet, si ipsius $\frac{5.2}{3}$ numerator per 5 dividatur, valorem fieri 5-ies minorem; (de casu, ubi quotus haud integer est, inferius).

Sit item

$$C = \begin{cases} ✲ = ***** \\ ✲ = ***** ; \\ ✲ = ***** \end{cases}$$

et sit quærendum $\frac{2C}{3.5}$; patet $\frac{C}{3.5} = *$ esse, quum $*$ in quovis ✲ ponatur 5-ies, adeoque in toto $(C = 3✲)$, ponatur 3.5-ies; accipiuntur vero tales tot, quot prius; itaque valor novus erit $\frac{*}{*}$, qui in priore $\begin{smallmatrix}✲\\✲\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}*&*&*&*&**&*&*&*&*\end{smallmatrix}$ ponitur 5-ies.

Unde etiam evidens est, quod, si et numerator per 5 multiplicetur, adeoque 5.2 tales partes accipiantur, valor $\frac{*}{*}$ 5-ies positus valorem primum restituat; adeoque $\frac{5.2}{5.3} = \frac{2}{3}$; itemque æquale prodeat, tam 5.2 quam 5.3 per 5 divisis; solo denominatore 3.5 per 5 diviso autem fiat $\frac{2}{3}$ majus 5-ies ipso $\frac{2}{3.5}$.

3. *Regula hinc etiam fractiones ad denominatorem eundem reducendi* sequens fluit. Cujusvis fractionis terminus uterque per factum e reliquarum denominatoribus omnium multiplicetur; prodibit enim ita (per præc.) cuivis æqualis; nam factum ex integris manifesto integer est; denominator quoque idem erit, nam eosdem factores quotvis quocunque ordine factum idem dare mox demonstrabitur.

Patet etiam *fractionum ad denominatorem eundem reductarum illam esse maiorem, cuius numerator maior est.*

4. *Si* $\frac{2}{3}.C$ *per* $\frac{4}{5}$ *multiplicandum sit,* erit (facto dicto x)

$$1 = 5u,\ \frac{4}{5} = 4u\ ;\ \ \frac{2}{3}.C = 5v,\ x = 4v\ ;$$

itaque v prius reperiendum et factum est $4v$.

Hosted by Google

Ex (2.) est

$$\frac{2}{5\cdot 3}\cdot C = v\,,$$

quia

$$\frac{2}{3}C = 5\cdot\frac{2C}{5\cdot 3} = 5v\,,$$

et

$$\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot C = 4v.$$

Unde *factum numeratorum per factum denominatorum divisum factum est*; quod item 4(5)tum 2(3)ti ipsius C, adeoque *fractionem fractionis* esse manifestum est.

Unde si $\frac{2}{3}.C$ *in fractionem ipsius b mutari debeat* et C sit $= \frac{4}{5}.b$; erit 2(3)tum ipsius C (seu 4(5)ti ipsius b, multiplicando $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$) æquale $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}.b$.

5. Hinc etiam *si* $\frac{2}{3}$ *per* $\frac{4}{5}$ *dividi debeat*, erit:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\,.$$

Nam

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{4\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 4} \text{ (per præc.)},$$

quod dividendo per 5 et 4 terminum utrumque (per 2.) æquale est $\frac{2}{3}$.

6. Unde etiam *in casu terminorum non integrorum, fractionem quotum esse* sequitur.

Sit enim

$$B = ✲✲\,,\quad A = ✲✲✲ = \text{etiam } 5v,\ \text{et}\ C = 4v,$$

adeoque B ipsius C dicatur 2(3) 4(5)tum (§ 22.); sit

$$✲ = *****\,,$$

adeoque

$$A = \left\{\begin{array}{l} ✲ = ***** \\ ✲ = ***** \\ ✲ = ***** \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v = \begin{array}{r} * \\ *\,, \\ * \end{array}$$

quia ponitur 5-ies in A; itaque illud $*$, quod in $4v = C$ continetur $4 . 3$-ies, in $B = \begin{smallmatrix} * \\ * \end{smallmatrix}$ continetur $2 . 5$-ies (uti duæ superiores lineæ ostendunt). *Reducetur* itaque *fractio huiusmodi* quoque *ad formam priorem*, si numerorum extremorum factum per factum mediorum dividatur, quod æquale $\dfrac{\frac{2C}{3}}{\frac{4}{5}}$ est.

7. Hinc etiam *ad qualemvis denominatorem aut numeratorem datum reduci fractio potest valore immutato.*

Sit datus denominator $\frac{n}{m}$; est

$$\frac{\frac{2n}{3m}}{\frac{n}{m}} = \frac{2nm}{3mn} = \frac{2}{3}.$$

Sit $\frac{n}{m}$ numerator datus; est

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{3n}{2m}} = \frac{2nm}{3nm} = \frac{2}{3}.$$

Itaque $\frac{n}{m}$ *per datam fractionem, si numerator quaeratur, multiplicari, si denominator, dividi debet.*

8. Patet etiam, quod, si numerator sit $\frac{n}{m}$, denominator $\frac{p}{q}$, et uterque per $\frac{r}{s}$ multiplicetur vel uterque per $\frac{r}{s}$ dividatur (literis nunc integros denotantibus), prodire in casu priore

$$\frac{nr}{ms} : \frac{pr}{qs} = \frac{nrqs}{mspr},$$

in posteriore

$$\frac{ns}{mr} : \frac{ps}{qr} = \frac{nsqr}{mrps},$$

utrumque (terminis per rs divisis) æquale $\frac{nq}{mp}$, nempe fractioni priori. Reliqua de fractionibus in Arithmetica specialiore dicentur.

Hosted by Google

XXI. De *resultato multiplicationis unico* iam disquirendum, at prius *de possibilitate mensurationis* et *proportionalis quartae* agendum est.

Sint A, B rectæ eiusdem determinationis aut tempora et n sit integer, atque $\frac{A}{n}$ sit æquale u: erit $A = nu$, B vero aut $= u$, aut $\lessdot u$, aut $\gtrdot u$.

In primo casu est $B = 1\,u$, in secundo est

$$B = 0\,u + \omega, \quad (\omega \lessdot u).$$

In tertio datur talis integer M, ut $Mu \gtrdot B$ sit (X.); itaque cum $1\,u$ non $\gtrdot B$, datur primus integer ab M incipiendo versus 1 talis m, ut mu non $\gtrdot B$; itaque

$$B = mu, \text{ aut } B = mu + \omega, \quad (\omega \lessdot u).$$

Datur porro (per VIII.) tale

$$2 . 2 . 2 \ldots 2 = n'$$

ut sit

$$\frac{u}{n'} \lessdot \frac{\omega}{2};$$

sit $u' = \frac{u}{n'}$; erit tum

$$A = n\,\frac{n'u}{n'} = nn'u';$$

sit

$$B = m'u' + \omega', \quad (\omega' \lessdot u')$$

erit nempe

$$mu = mn'\,\frac{u}{n'} = mn'u',$$

et quia $u' \lessdot \frac{\omega}{2}$, ipsi mn' ad minimum 2 accedunt. Estque ω' aut 0, aut non; si non, repetatur eadem operatio, ut prodeat u'', ubi $u'' \lessdot \frac{\omega'}{2}$ et fiat

$$B = m''u'' + \omega'', \quad (\omega'' \lessdot u'');$$

Continuando idem semper porro, si semper superfuerit aliquid, manifesto $\omega \backsim 0$; nam pro ω', quod primo superest, est

$$\omega' \lessdot u' \lessdot \frac{\omega}{2},$$

Hosted by Google

ita $\omega'' \lessdot \frac{\omega'}{2}$ adeoque $\lessdot \frac{\omega}{2.2}$, et ita porro, ut $\lessdot \frac{\omega}{2.2\ldots2}$ supersit. Hinc quum hoc dato quovis $\lessdot$ esse possit, $mu \backsim B$; nempe $mu - B \backsim 0$.

Patet etiam

$$B = m'u' + \omega' = m''u'' + \omega'' = \ldots$$

esse $\lessdot (m+1)u$, adeoque $m'u', m''u'', \ldots \lessdot (m+1)u$,
et:

$$m'u' \gtrdot mu, \quad m''u'' \gtrdot m'u', \ldots,$$

Unde

$$m'\frac{u}{n'} \lessdot (m+1)u, \quad m''\frac{u}{n''} \lessdot (m+1)u \ldots$$

adeoque

$$\frac{m'}{n'} \lessdot m+1, \quad \frac{m''}{n''} \lessdot m+1, \ldots,$$

et

$$m'\frac{u}{n'} \gtrdot mu, \quad m''\frac{u}{n''} \gtrdot m'\frac{u}{n'}, \ldots$$

adeoque

$$\frac{m'}{n'} \gtrdot m, \quad \frac{m''}{n''} \gtrdot \frac{m'}{n'}, \ldots;$$

sunt autem $\frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$ fractiones, per quas semper idem u multiplicatur, ut $m'u', m''u'', \ldots$ prodeant, quod statim applicabitur.

XXII. 1. *Dari hinc quartam proportionalem patet sic:*

Si B cum A commensurabilis sit, tum

$$A = nu, \quad B = mu,$$

adeoque pro $\frac{C}{n} = v$ erit quarta proportionalis $D = mv$.

Si vero B cum A incommensurabilis sit, erit

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad (\omega \lessdot u),$$

et pro $C = nv$ quæritur tale

$$D = mv + \lambda, \quad (\lambda \lessdot v),$$

ut $\omega \backsim 0$ et $\lambda \backsim 0$, adeoque $mu \backsim B$ et $mv \backsim D$.

Hosted by Google

Accipiatur (e præcedentibus) $m'v'$, tum $m''v'', \ldots$; erit inde

$$m'v' = \frac{m'}{n'} v,$$

atque $\frac{m'}{n'}$ maius quam m et idem $\frac{m'}{n'}$ minus quam $m+1$; itaque crevit prius mv manendo minus quam $(m+1)v$: quo continuato patet (per VI.) limitem dari, cum mv semper crescat maneatque primo $(m+1)v$ minus.

2. Verum *etsi non constaret in imagine sequenti*

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad C = nv, \quad D = mv + \lambda$$

esse $\omega \lessdot u$ *et* $\lambda \lessdot v$: *dummodo* $\omega \backsim 0$, $\lambda \backsim 0$, *nunquam e* B *plura* u *quam* v *ex* D *accipi possunt.*

Nam sit

$$B = (m+1)u + \omega', \quad (\omega' \lessdot u)$$

et

$$D = (m+1)v - \alpha,$$

(ubi α positivum sit, si v positivum, et negativum, si v negativum est), tunc $(m+1)$-tum u ex ω sumptum est, (adeoque et ω' positivum est, si u positivum, negativum, si u negativum). Cum ω, λ tendunt ad zero, decrescat utrumque et fiat

$$\omega'' \lessdot \omega', \quad \text{et} \quad \lambda' \lessdot \alpha;$$

erit tunc

$$A = Nu', \quad B = Mu' + \omega''; \quad C = Nv', \quad D = Mv' + \lambda',$$

quod si B ipsum u pluries contineat, quam D ipsum v, fieri nequit; nam $nu = Nu'$, adeoque

$$u' = \frac{nu}{N},$$

$$v' = \frac{nv}{N};$$

eritque

$$A = \frac{Nnu}{N}, \quad B = N\frac{(m+1)u}{N} + \omega' = \frac{Mnu}{N} + \omega'',$$

Hosted by Google

et hinc manifesto $\frac{u}{N}$ continetur in B ad minimum $N(m+1)$-ies, et plane Mn-ies præter ω'' quod est minus quam ω'; quapropter Mn necessario $\geqq N(m+1)$.

Itaque tum

$$D = Mv' + \lambda' = \frac{Mnv}{N} + \lambda' \geqq \frac{N(m+1)v}{N} + \lambda'$$
$$\geqq (m+1)v + \lambda'$$

esse deberet, contra hypothesim; erat enim

$$D = (m+1)v - \alpha.$$

Nimirum cum $\omega'' \leqq \omega'$ sit, si ex. gr. pro u, ω' positivis et ω'' positivum sit, tum ex B præter ω'' maius quam præter ω' superest; si vero ω'' negativum sit, tum $\frac{Mn}{N}$ adhuc maius esse debet, ut imminutum æquale $(m+1)u + \omega'$ prodeat.

Neque vero

$$(m+1)v - \alpha \geqq (m+1)v + \lambda', \quad (\lambda' \leqq \alpha)$$

esse potest. Nam si α simul cum v positivum sit, erit λ' aut positivum aut negativum. Si positivum, tum si ex $(m+1)v$ dematur α, manebit minus quam si idem augeatur. Si vero λ' negativum sit, tum si ex $(m+1)v$ dematur minus quam α, maius manebit, quam si totum α dematur. Si vero v cum α negativum sit, erit

$$\vdash\!\dashv (m+1)v \mp \alpha \leqq \vdash\!\dashv (m+1)v \mp \lambda'$$

et etiam

$$\leqq \vdash\!\dashv (m+1)v \vdash\!\dashv \lambda'.$$

Nec si simul $\omega = 0$ et $\lambda = 0$ sint, potest B pluries continere $u' = \frac{A}{N}$, quam D ipsum $v' = \frac{C}{N}$. Nam sit

$$mu = Mu';$$

erit

$$\frac{Mn}{N} = m;$$

sit

$$D = M'v' = \frac{M'nv}{N};$$

Hosted by Google

erit

$$m = \frac{M'n}{N};$$

itaque

$$\frac{M'n}{N} = \frac{Mn}{N};$$

adeoque

$$M' = M.$$

Hinc etiam patet, quod si

$$nu = A, \quad \pm mu \gtrless B; \quad nv = C, \quad \pm mv \gtrless D,$$

(signorum $=$ vel $\backsim$, item $+$ vel $-$ eodem pro B et D accepto): tum

$$A = nu, \quad B = \pm mu + \omega, \quad (\omega = 0, \text{ vel } \omega \lessdot u);$$

$$C = nv, \quad D = \pm mv + \lambda, \quad (\lambda = 0, \text{ vel } \lambda \lessdot v);$$

(in expressione ipsorum B, D post ω, λ signorum $=$ vel $\lessdot$ idem in utroque accipiendo). — Itaque A, B, C, D, si ita sit, in proportione sunt. Nam tum casus præcedens locum habet; atque inde sequitur *pro quovis n, si A, C in n partes aequales u, v partita sint, neutrum ipsorum B, D pluries suam quam alterum continere*, uti ex hoc sequitur imago superior; adeo ut et harum quævis *definitio proportionis* esse possit, (affectionibus $\vdash\!\!\dashv$ et $\vdash\!\!\dashv$ posteriori quoque adnexis). Neque autem posterius locum habere potest, si aliquod ipsorum ω, λ sit $= 0$, alterum non; quia tum posset, si ω non 0 et $\lambda = 0$ sit, u' per partitionem ipsius u accipi $\lessdot \omega$, et tum plura u' acciperentur ex B, quam v' ex D.

Itaque in proportione duo priora et duo posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia.

XXIII. *Est etiam proportionalis quarta unica; (excepto si prima et aliqua reliquarum sit* 0).

Nam sint duæ imagines (in quibus ω, λ, ω', λ' tendunt ad limitem 0 pro A cum B incommensurabili):

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad C = nv, \quad D = mv + \lambda,$$

Hosted by Google

et

$$A = Nu', \quad B = Mu' + \omega', \quad C = Nv', \quad D' = Mv' + \lambda'.$$

Est tunc

$$mu + \omega - Mu' - \omega' = 0;$$

sed $\omega - \omega'$ (si non 0) dato quovis minus fieri posse manifestum est, sive destruat ω' ex ω sive augeat illud; itaque est aut æquale 0 aut omni dabili minus, adeoque pro quovis integro k minus quam $\frac{u}{k}$ fieri potest; itaque

$$mu - \frac{Mnu}{N} = \frac{Nmu - Mnu}{N} = \frac{Nm - Mn}{N} u,$$

si non sit 0, est $\lessdot \frac{u}{k}$, adeoque

$$\frac{Nm - Mn}{N} \lessdot \frac{1}{k}$$

fieri potest; nam si eo æquale vel maius esset, tunc etiam

$$\frac{Nm - Mn}{N} u = \text{ vel } \gtrdot \frac{u}{k}$$

esset.

Est igitur etiam

$$\frac{Nm - Mn}{N} v = mv - Mv' \lessdot \frac{v}{k};$$

adeoque

$$mv + \lambda - Mv' - \lambda' \lessdot \pm \frac{v}{k} \pm \lambda \pm \lambda';$$

seu

$$D - D' \lessdot \pm \frac{v}{k} \pm \lambda \pm \lambda',$$

quod item ad limitem 0 tendere statim ostendetur. Consequenter D nec maius nec minus est quam D'; adeoque $D = D'$.

Si vero A cum B commensurabile sit, tunc etiam D cum C commensurabile est (per præced.); adeoque etsi prodeat

$$D = mv, \quad \text{et} \quad D' = Mv',$$

Hosted by Google

erit

$$B = mu = Mu' = \frac{Mnu}{N},$$

adeoque

$$\frac{Mn}{N} = m,$$

consequenter

$$\frac{Mnv}{N} = Mv' = mv.$$

Patet hinc etiam *multiplicationis, pro certo multiplicando et certo multiplicatore, resultatum unicum esse* (§ 28.), cum loco primo non 0, sed 1 sit.

XXIV. Unum adhuc de proportione (infra specialius tractanda) addere libet, ne elegans *definitio Euclidea* (unum plurimorum, quæ Horatii verba *Grajis ingenium dedit* probant) silentio prætereatur. Etsi aliis verbis referat, A, B, C, D *in proportione esse dicit Euclides*, si pro quibusvis integris N, M, sit

$$\begin{aligned} NA &= MB, \quad \text{si} \quad NC = MD, \\ NA &> MB, \quad \text{si} \quad NC > MD, \\ NA &< MB, \quad \text{si} \quad NC < MD. \end{aligned}$$

Conceptum hunc (exclusis negativis et 0) cum (§ 29.) dato æquivalentem (pag. 16. D, 2.) esse probatur sic. Sit imago Euclidea I, et (§ 29.) data sit i. Demonstratur *per i poni I*, et *per non i poni non I;* unde (pag. 16. D, 2.) patebit, per quodvis poni alterum.

1. *I ponitur per i.*

Est i sequens: (XXII.) aut

$$A = nu, \quad B = mu, \quad C = nv, \quad D = mv;$$

aut

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad C = nv, \quad D = mv + \lambda,$$

$$(\omega < u, \quad \lambda < v),$$

et cum A, B, C, D etiam u, v, iisque ω, λ positiva sunt.

Hosted by Google

Quoad prius, si

$$Nnu = Mmu,$$

tum

$$Nn = Mm,$$

adeoque

$$Nnv = Mmv\,;$$

si $>$ vel $<$ sit pro $=$, manifesto idem utrinque erit.

In imagine posteriore erit NA vel $>$, vel $<$, vel $= MB$; quæritur, num inter NC et MD quoque idem signum erit?

Si $NA < MB$, sit d excessus ipsius MB super NA; erit

$$Nnu + d = Mmu + M\omega.$$

Sunt heic d, M, N constantes, u vero ita accipi posse facile patet (et demonstrabitur statim), ut $M\omega < d$ sit; tum vero demto d ab una parte, et $M\omega$ ab altera manebit $Nnu < Mmu$; nempe ex æqualibus demendo æqualia, manent æqualia, sed si ex aliquo residuo adhuc dematur, inde minus remanebit. Si vero tunc $Nnu < Mmu$ sit, erit $Nn < Mm$, adeoque $Nnv < Mmv$ (pro illis n, m, u, v, pro quibus $M\omega < d$ factum est). Est itaque etiam $Nnv < Mmv$, adeoque etiam $< Mmv + M\lambda$; id est $NC < MD$.

Si $NA > MB$, sit

$$NA = MB + d\,;$$

erit

$$Nnu = Mmu + M\omega + d\,;$$

itaque

$$Nnu > Mmu + d\,;$$

adeoque cum $Mu < d$ fieri queat, erit tunc

$$Nnu > Mmu + Mu\,;$$

et hinc

$$Nn > M(m + 1)\,;$$

adeoque

$$Nnv > M(m + 1)\,v\,,$$

consequenter $NC > MD$, quia

$$D < (m + 1)\,v.$$

Hosted by Google

Si vero $NA = MB$, tum NC non est $>$, nec $<$ quam MD. Nam si $>$ aut $<$ sit, tum et $NA >$ vel $<$ quam MB esset.

2. *Per non i poni non I* patet sic: Casus ipsius *non i* sunt sequentes:

$$nu, \quad mu \quad ; \quad nv, \quad mv \pm h,$$

vel

$$nu, \quad mu + \omega ; \quad nv, \quad mv \pm h, \quad (\omega < u),$$

(ita ut h constans maneat, ω vero tendat ad limitem 0).

Quoad casum primum dantur talia N, M (nempe m, n) ut mnu sit æquale nmu, sed mnv non æquale $nmv \pm nh$.

In casu posteriore, si $-h$ sit, est

$$mnu < nmu + n\omega,$$

sed

$$mnv > nmv - nh.$$

Si vero $+h$ sit, accipiatur $m + 1$ pro N et n pro M: erit $(m + 1)nu$, id est

$$mnu + nu > nmu + n\omega ;$$

sed

$$mnv + nv < nmv + nh,$$

nam $\omega < u$ est et $v < h$ fieri potest.

XXV. 1. *Si* $\omega \backsim 0$, *pro quovie integro* k, *etiam* $k\omega \backsim 0$.

Nam tum pro quovis integro N fit $\omega \lessdot \frac{1}{N}$; idem de singulis ω usque ad k-tum valet; adeoque etiam summa omnium ω est $\lessdot$ summæ omnium respondentium $\frac{1}{N}$, nempe $k\omega \lessdot \frac{k}{N}$ et cum N utvis augere liceat, si in locum eius ponatur kN, fiet

$$\omega \lessdot \frac{1}{kN}, \quad \text{et} \quad k\omega \lessdot \frac{1}{N}.$$

Hinc etiam si a', n integri fuerint et $\frac{a'}{n} \lessdot k$ maneat, tum quoque $\frac{a'}{n}\omega \backsim 0$. Nam sit

$$\frac{a'}{n} = i + f$$

Hosted by Google

(pro i integro et f fractione vera); est

$$i+f<k,$$

itaque

$$(i+f)\omega<k\omega.$$

Ita si $\frac{a'}{n}=f$ sit, aut etiam si $\frac{a'}{n}\backsim 0$, etiam $\frac{a'}{n}\omega\backsim 0$.

Unde si novus factor $\frac{b'}{n}$ eiusmodi (uti $\frac{a'}{n}$) accedat, et $\frac{a'}{n}\omega$, quod tendit ad 0, nominetur λ, etiam $\frac{b'}{n}\cdot\frac{a'}{n}\omega\backsim 0$; et item de quotvis ad uno plures progrediendo, manifesto e *quotvis eiusmodi factoribus* factum tendit ad 0, si aliquis ad 0 tendat.

2. *Si tam* $\omega\backsim 0$, *quam* $\lambda\backsim 0$, *etiam* $\omega\pm\lambda\backsim 0$ *(nisi* $\omega\pm\lambda=0$ *sit).*

Nam tum $\omega<\frac{1}{N}$ et $\lambda<\frac{1}{N}$ fieri potest: itaque aut destruet alterutrum ex altero, et evadet minus, aut summa manebit $<\frac{2}{N}$; et si ipsi N (ut antea) substituatur $2N$, fiet eadem $<\frac{2}{2N}=\frac{1}{N}$.

Notandum vero per quantitatem, quæ tendit ad zero et sæpius omni dabili minor fieri dicitur, minime omni dabili minorem intelligi, sed talem, quæ, si detur quævis α, hac minor fieri potest. Omni dabili minor quantitas non existit; cum si expers esset, continuo minor non esset; si continuum, portio eius adhuc minor esset. Aliud est ∞ (§ 21.).

Si $\omega\pm\lambda$ dicatur z, et $x\backsim 0$, eodem modo patet, quod $z\pm x\backsim 0$; unde ulterius (modo de n ad $n+1$ progrediendo) quotvis numero certo fuerint ad limitem 0 tendentes, eorum summa quoque tendit ad 0.

3. *Si* $x\backsim a$ *et* $y\backsim b$, *tum* $x\pm y\backsim a\pm b$.

Nam sit

$$x+\omega=a, \quad \text{et} \quad y+\lambda=b;$$

tum $\omega\backsim 0$ et $\lambda\backsim 0$, atque

$$a+b=x+\omega+y+\lambda,$$

ubi per præcedentia $\omega+\lambda$ tendit ad 0; itaque differentia ipsius $x+y$ ab $a+b$ fieri omni dabili minor potest. Pariter (ut in præcedentibus) progrediendo, patet *quotvis quantitatum (certo numero) ad limitem tendentium summam ad summam limitum tendere.*

Hosted by Google

4. *Si* $x-y=\omega$, *et* $\omega=0$, *vel* $\omega\backsim 0$, *et* $x\backsim a$, *atque* $y\backsim b$, *tum* $a=b$.

Nam sit

$$a=b+\alpha;$$

est

$$a-x\backsim 0,$$

adeoque

$$b+\alpha-x\backsim 0;$$

et (quia $x=y+\omega$),

$$b+\alpha-y-\omega\backsim 0,$$

quod fieri nequit, nisi $\alpha=0$, vel $\alpha\backsim 0$; nam $b-y\backsim 0$, adeoque etiam

$$b-y-\omega\backsim 0,$$

quia $\omega\backsim 0$; et si $b-y$ dicatur λ, etiam $\lambda-\omega\backsim 0$ (per 2.). Idem patet, si $\omega=0$, et idem si $x=a$.

5. *Si* $p>x>q$, *et* $p-q\backsim 0$; *etiam* $p-x\backsim 0$ *et* $q-x\backsim 0$.

Nam

$$p-x<p-q.$$

6. *Si* n *integer sit, et* $n\backsim\infty$, *tum* $\frac{n\pm 1}{n}\backsim 1$.

Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n\pm 1}{n}$ est $\frac{\pm 1}{n}$, quod tendit ad zero.

Patet loco unitatis quodvis finitum a poni posse. Nam accipiatur integer $k\not> a$, et ponatur kn pro n: erit

$$1-\frac{kn\pm k}{kn}=\mp\frac{1}{n}.$$

7. *Ita* $\frac{n}{n\pm 1}\backsim 1$.

Nam differentia ipsius $\frac{n}{n\pm 1}$ ab 1 est

$$\frac{n\pm 1-n}{n\pm 1}=\pm\frac{1}{n\pm 1},$$

quod tendit ad zero.

Patet etiam, ut in præcedentibus, quod $\frac{n}{n\pm k}\backsim 1$.

8. *Si* a *constans sit, et integer* $s\backsim\infty$, *atque*

Hosted by Google

$$\frac{r+1}{s}a > x > \frac{ra}{s},$$

tum $x - \frac{ra}{s} \backsim 0$, (per 5.).

Nam

$$\frac{r+1}{s}a - \frac{ra}{s} = \frac{a}{s},$$

quod tendit ad zero.

Hinc etiam (per 4.), si $x \backsim \alpha$ et $\frac{ra}{s} \backsim \beta$, est $\alpha = \beta$.

9. *Ordo factorum non mutat factum.*

Sint prius factores integri. De duobus demonstratum est, unde via de n ad $n+1$ ad quotvis assurgere licet modo sequenti.

Si constet de numero n integrorum a, b, c, d, et accedat novus e, qui sit claritatis gratia 3: erit loco primo aut e aut alia litera. Sit prius e loco primo. Erit

$$abcde = e.abcd,$$

(multiplicationem a dextra sinistrorsum peragendo). Sit enim $abcd$ æquale P, erit $e.abcd$ æquale $3P$; vero

$$de = ed = 3d = d + d + d,$$

et multiplicando per sequens c prodibunt tres eiusmodi imagines, quarum una solum fuisset, si e non adfuisset; et idem continuando usque ad a prodibunt

$$abcd + abcd + abcd = 3P.$$

Prodit autem per hypothesim P ex $abcd$ quocunque ordine; itaque si factor $(n+1)$-tus primum vel ultimum locum teneat, utcunque permutentur ceteri, factum idem est. Sit iam quævis alia litera, ex. gr. c loco primo; reliquæ numero n, utvis dispositæ, idem factum dant, ac si c loco ultimo esset; erit igitur factum et tum $3P$.

Imo utcunque discerpta factorum imagine, factum idem est. Sit ex. gr.

$$ab = \alpha, \quad cde = \beta;$$

est

$$\alpha.\beta.f = abcdef.$$

Hosted by Google

Ponatur enim α ad finem; erit $cdef\alpha = cd.efab$, (multiplicationem item a dextra incipiendo); est vero

$$cdef\alpha = \alpha cdef,$$

ita

$$\alpha fcde = \alpha f\beta = \alpha\beta f;$$

inde semper ad uno plura concludendo patet, quicunque e factoribus post se invicem ponantur, ut hoc pacto novi factores $\alpha, \beta, \ldots$ exoriantur, vel omnes vel aliqui, et hos utvis dispositos factum idem dare.

Verum *etiamsi non fuerint integri, factum idem erit.*

Sint *prius* duo *factores* a, b. Aut est uterque cum unitate commensurabilis, aut non; si non, aut unus tantum, aut neuter est.

Mensuratis quoad 1, sit in casu primo, (pro a', b', n integris)

$$a = \frac{a'}{n}, \qquad b = \frac{b'}{n},$$

in secundo

$$a = \frac{a'}{n}, \qquad b = \frac{b'}{n} + t, \quad t < \frac{1}{n},$$

in tertio

$$a = \frac{a'}{n} + z, \quad b = \frac{b'}{n} + t, \quad z < \frac{1}{n}, \quad t < \frac{1}{n},$$

et construantur schemata (§ 28.) pro duobus posterioribus; (primus enim ex (XX. 3, 4) etiam liquet).

Sit prius b multiplicator, dein multiplicandus, et n, u sint in singulis quatuor casibus n, $\frac{1}{n}$, m vero sit b', ubi b (et a', ubi a) multiplicator est, v autem sit $\frac{a}{n}$, ubi a $\left(\frac{b}{n}\right.$, ubi $\left.b\right)$ multiplicandus est. Erit (per § 28.)

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad b'.\frac{1}{n} \backsim b; \quad n.\frac{a}{n} = a, \quad b'.\frac{a}{n} \backsim b.a,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad a'.\frac{1}{n} = a; \quad n.\frac{b}{n} = b, \quad a'.\frac{b}{n} = a.b,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad b'.\frac{1}{n} \backsim b; \quad n.\frac{a}{n} = a, \quad b'.\frac{a}{n} \backsim b.a,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad a'.\frac{1}{n} \backsim a; \quad n.\frac{b}{n} = b, \quad a'.\frac{b}{n} \backsim a.b.$$

Hosted by Google

Est vero (substitutis valoribus) $b'.\frac{a}{n} - a'.\frac{b}{n}$ in duobus prioribus

$$= b'\frac{a'}{nn} - a'\left(\frac{b'}{nn} + \frac{t}{n}\right) = -\frac{a't}{n};$$

in duobus posterioribus autem est

$$= b'\left(\frac{a'}{nn} + \frac{z}{n}\right) - a'\left(\frac{b'}{nn} + \frac{t}{n}\right) = \frac{b'z}{n} - \frac{a't}{n};$$

ubi $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$ manent integro quodam minora, secus enim a, b continerent unitatem omni dabili pluries. (Est nempe $a = \frac{a'}{n} + z$, ubi $z = 0$, vel $z \backsim 0$).

Itaque differentia utraque tendit ad zero (1. 2.), consequenter (4.) duo priora facta sunt æqualia et pariter duo posteriora.

Est etiam

$$b'\frac{a}{n} - \frac{b'a'}{nn} \backsim 0,$$

quia

$$b'\frac{a}{n} = b'\left(\frac{a'}{nn} + \frac{z}{n}\right),$$

adeoque pro a incommensurabili differentia $\frac{b'z}{n}$ tendit ad zero, quia (ut antea) $\frac{b'}{n}$ integro certo minus manet, vero $z \backsim 0$. Itaque differentia tendit ad zero (1.), aut $= 0$ pro $z = 0$; consequenter (4.) $\frac{a'b'}{nn}$ est $= ab$, vel $\frac{a'b'}{nn} \backsim ab$, atque factum aut $\frac{a'b'}{nn}$, aut huius limes unicus est [XXIII].

Ita de duo ad tres et de quotvis ad uno plura progrediendo, si $\frac{a'b'c'\ldots g'}{nnn\ldots n} = abc\ldots g$, vel $\frac{a'b'c'\ldots g'}{nnn\ldots n} \backsim abc\ldots g$; etiamsi novus h accedat, (retinendo modum demonstrationis) erit $\frac{a'b'\ldots g'h'}{nn\ldots nn} = ab\ldots gh$, aut gaudens eodem limite.

Nam $a'b'\ldots g'$ dicatur α, $nn\ldots n$ sit β, et $ab\ldots g$ sit γ; erit $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$, vel $\frac{\alpha}{\beta} \backsim \gamma$ et $\frac{\alpha h'}{\beta n} = \gamma h$, vel $\frac{\alpha h'}{\beta n} \backsim \gamma h$.

Si $a'b'\ldots g'$ aliter ordinentur, manifesto etiam a dextra literæ eiusdem nominis eodem ordine valebunt; et cum factores integri utvis permutati

Hosted by Google

factum idem dent, patet *factores quotvis (etsi omnes incommensurabiles sint) quocunque ordine factum idem dare.* Interim factum e commensurabili et incommensurabili incommensurabile, ex incommensurabilibus vero et commensurabile et incommensurabile esse posse facile patet; ex. gr. inferius

$$\sqrt{2}.\sqrt{2}=2, \quad \text{et} \quad \sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6},$$

et $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ incommensurabilia esse mox dicetur.

10. *Factor b (excepto, si 0 sit) cum nullo factore $a+c$ (pro c non 0) factum illi, quod cum a producit, aequale efficit.*

Nam in schemate primo pro $\frac{b'a}{n}=ab$ vel $\frac{b'a}{n} \backsim ab$ prodiret

$$b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}=ab \text{ vel } b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n} \backsim ab.$$

Crescit vero $\frac{b'}{n}$ sine fine manens tamen certo integro minus (ut in 9.), adeoque $\frac{b'c}{n}$ gaudet limite [VI.]; sit is l; erit [per XXV., 3.]

$$b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}=ab+l \text{ vel } b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n} \backsim ab+l;$$

l vero non est 0; nam $\frac{b'c}{n}$ crescit et non fit quovis dabili minus.

11. *Si $x=a$ vel $x \backsim a$ et $y \backsim b$: tum $xy \backsim ab$.*

Nam sit

$$x=a+\omega, \quad y=b+\lambda,$$

atque [ut in 9.]

$$\omega=\frac{\omega'}{n}+r, \quad \lambda=\frac{\lambda'}{n}+s,$$

adeoque

$$x=\frac{a'+\omega'}{n}+z+r, \quad y=\frac{b'+\lambda'}{n}+t+s,$$

ubi cum z, r, t, s tendunt ad limitem zero, et $z+r=p \backsim 0$, $t+s=q \backsim 0$; et construantur schemata (ut in præcedentibus) a'' pro $a'+\omega'$ et b'' pro $b'+\lambda'$ ponendo. Erit pro quibusvis certis valoribus ipsorum x, y et ipsorum n, m, u, v vices n, a'', $\frac{1}{n}, \frac{y}{n}$ subeuntibus

Hosted by Google

$$n\frac{1}{n}=1,\quad a''.\frac{1}{n}\backsim x;\quad n.\frac{y}{n}=y,\quad a''.\frac{y}{n}\backsim xy,$$

ubi item (e præcedentibus) $\frac{a''y}{n}-\frac{a'b'}{nn}\backsim 0$; nam substitutis valoribus erit hoc

$$(a'+\omega')\left(\frac{b'+\lambda'}{nn}+\frac{q}{n}\right)-\frac{a'b'}{nn}=$$
$$=\frac{a'\lambda'}{nn}+\omega'\frac{b'+\lambda'}{nn}+(a'+\omega')\frac{q}{n},$$

ubi manifesto $\frac{a'}{n}$, ita $\frac{a'+\omega'}{n}$ atque $\frac{b'+\lambda'}{n}$ manet (ut in præcedentibus) minus certo integro, vero $q\backsim 0$, ita etiam $\frac{\omega'}{n}\backsim 0$, dum $x\backsim a$, nam tum $\omega\backsim 0$; ita $\frac{\lambda'}{n}\backsim 0$ dum $y\backsim b$, eritque (1., 2.) differentia gaudens limite zero. Consequenter etiam xy (seu per præcedentia yx) gaudet limite ab; nempe pro dato quovis N potest tale x, y, n accipi, ut sit:

$$ab-xy<\frac{1}{N}.$$

Si $x=a$, tum $\omega=0$, et idem patet.

Unde etiam de quotvis ad uno plura (ut supra) progrediendo evidens fit, *quotvis factorum ad limites tendentium facti limitem esse factum limitum.*

12. *Si A per B dividendum sit, erit quotus q unicus (excepto, si divisor 0 sit);* et $\frac{A}{q}=B$, atque $A=Bq$, et $\frac{A}{B}.B=A$, item $\frac{A}{q}=A.\frac{1}{q}$.

Mensuretur enim A per B, sitque $\frac{B}{m}=A$, et $nv=A$. vel $nv\backsim A$, ac construatur schema (§ 28); erit (pro n, m integris et $u=\frac{1}{m}$, $v=\frac{B}{m}$)

$$m.\frac{1}{m}=1,\quad n.\frac{1}{m}\backsimeq q;\quad m.\frac{B}{m}=B,\quad n.\frac{B}{m}\backsimeq A,$$

ubi q dari constat (ex XXII.) et patet (ex § 27.) esse

$$q=\frac{A}{B},\quad \text{et}\quad Bq=A,\quad \text{et}\quad \frac{A}{q}=B;$$

neque B cum ullo factore alio factum A efficit, etsi loco secundo stet

Hosted by Google

(10.); item cum idem q per B multiplicatum sit A, est (in casu incommensurabilitatis quoque) $\frac{A}{B}.B$ æquale A.

Quod vero $\frac{A}{q}$ sit æquale $A\frac{1}{q}$, patet sic. Mensuretur 1 per q et sit $M\frac{q}{n} \backsim 1$; erit schema sequens:

$$n\frac{1}{n}=1, \quad M\frac{1}{n} \backsim \frac{1}{q}; \quad n\frac{q}{n}=q, \quad M\frac{q}{n} \backsim 1;$$

nempe loco secundo quotus ex 1 per q diviso prodit. Multiplicetur iam A per $\frac{1}{q}$; erit

$$n\frac{1}{n}=1, \quad M\frac{1}{n} \backsim \frac{1}{q}; \quad n\frac{A}{n}=A, \quad M\frac{A}{n} \backsim \frac{A}{q}=B;$$

erat enim superius

$$A=Bq,$$

adeoque

$$\frac{MA}{n}=\frac{MBq}{n};$$

sed $\frac{Mq}{n} \backsim 1$; consequenter (11.):

$$\frac{Mq}{n}.B=\frac{MA}{N} \backsim B.$$

Patet etiam esse

$$B:A=\frac{1}{q}=1:\frac{A}{B}.$$

13. *Si* $mu=B$ *vel* $mu \backsim B$, *et* $nu=A$, *atque* $mv=D$ *vel* $mv \backsim D$, *et* $nv=C$, *tum*

$$A:B=C:D,$$

adeoque proportio ita designari. Atque si

$$B:A=Q$$

sit, B *per* AQ *et* D *per* CQ *exprimi poterit. Conversim quoque si*

$$A:B=C:D,$$

aut

$$B=AQ \quad \text{et} \quad D=CQ,$$

proportio est.

Hosted by Google

Nam mensurato A per B, construatur schema divisionis (pro $A:B=q$ et pro $B:A=Q=\frac{1}{q}$ in præcedentibus)

$$m\frac{1}{m}=1,\quad n\frac{1}{m}\backsim q;\quad m\frac{B}{m}=B,\quad n\frac{B}{m}\backsim A;$$

$$n\frac{1}{n}=1,\quad m\frac{1}{n}\backsim Q;\quad n\frac{A}{n}=A,\quad m\frac{A}{n}\backsim B.$$

Nempe

$$n\frac{B}{m}=n\frac{mu}{m}+\frac{n\omega}{m}=$$
$$=nu+\frac{n\omega}{m}$$

(pro $B=mu+\omega$), ubi item $\frac{n}{m}$ manet minus certo integro (ut supra), ω vero adeoque et $\frac{n\omega}{m}$ tendit ad zero (XXV., 1.). Est igitur in hoc casu q æquale $\frac{A}{B}$, et item q prodit pro $\frac{C}{D}$, cum (ut antea) q unicum sit. Si $\omega=0$ sit, tum pro signo limitis erit signum æqualitatis, et

$$q=\frac{n}{m}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

Conversim quoque, si

$$A:B=q,\quad C:D=q,$$

tum proportio est.

Nam si q loco secundo stet, schema prius esse debet, ubi patet esse

$$m\frac{B}{m}=B,\quad n\frac{B}{m}\backsimeq A,$$

adeoque

$$mu'=B,\quad nu'\backsimeq A,\qquad \left[\text{pro } u'=\frac{B}{m}\right];$$

ita pro C, D prodit

$$mv'=D,\quad nv'\backsimeq C,\qquad \left[\text{pro } v'=\frac{D}{m}\right].$$

Patet etiam e schemate secundo, quod, si proportio sit, Q sit quotus ex B per A, et pariter ex D per C divisis; atque

$$B=AQ,\quad D=CQ.$$

Hosted by Google

Conversim si $B = AQ$ sit, schema posterius esse debet; pariter si $D = CQ$; adeoque cum sit

$$A = n\frac{A}{n}, \quad m\frac{A}{n} \asymp B; \quad n\frac{C}{n} = C, \quad m\frac{C}{n} \asymp D,$$

proportio est.

Si q loco tertio stet, tum quoque factorem alterum eundem esse oportet (10.).

14. *Si $x \backsim a$ et $y \backsim b$, et nec $y = 0$, nec $b = 0$; tum $\frac{x}{y}, \frac{x}{b}, \frac{a}{y}$ tendunt ad limitem $\frac{a}{b}$.*

Nam denotationibus (11.) retentis construantur schemata divisionum quotis A, B, C, D pro $\frac{a}{b}, \frac{x}{b}, \frac{a}{y}, \frac{x}{y}$ dictis. Erit:

$$\begin{array}{llll}
b'.\frac{1}{b'} = 1, & a'.\frac{1}{b'} \backsim A; & b'.\frac{b}{b'} = b, & a'.\frac{b}{b'} \backsim a, \\
b'.\frac{1}{b'} = 1, & a''.\frac{1}{b'} \backsim B; & b'.\frac{b}{b'} = b, & a''.\frac{b}{b'} \backsim x, \\
b''.\frac{1}{b''} = 1, & a'.\frac{1}{b''} \backsim C; & b''.\frac{y}{b''} = y, & a'.\frac{y}{b''} \backsim a, \\
b''.\frac{1}{b''} = 1, & a''.\frac{1}{b''} \backsim D; & b''.\frac{y}{b''} = y, & a''.\frac{y}{b''} \backsim x.
\end{array}$$

Nempe in (11.) erat:

$$x = a''\frac{1}{n} + p = \frac{a' + \omega'}{n} + p$$

et

$$y = b''\frac{1}{n} + q = \frac{b' + \lambda'}{n} + q;$$

inde dum x certum (omnino determinatum aliquod) cum ei respondente y dividitur, juxta integros b'', a'' construi schema potest, pro n, m, u, v accipiendo b'', a'', $\frac{1}{b''}$, $\frac{y}{b''}$; quod vero semel prodit, ei inæquale nullo alio modo prodire potest (10.). Si vero in aliqua linea alicubi signum $=$ loco signi $\backsim$ est, in tota linea signum $=$ est (XXII.), et tum quoque facile patet. Considerentur singulorum ad limitem B vel C vel D tendentium differentiæ ab $\frac{a'}{b'}$ (quod tendit ad limitem $A = \frac{a}{b}$), necnon

Hosted by Google

eorum, quæ ad a, respective x tendere dicuntur, differentiæ ab a, respective x. Est

$$a' . \frac{b}{b'} = a' \left(\frac{b'}{nb'} + \frac{t}{b'} \right) = \frac{a'}{n} + \frac{a't}{b'},$$

et

$$a = \frac{a'}{n} + z,$$

differentia enim eorum

$$a - a' . \frac{b}{b'} = z - \frac{a't}{b'},$$

quod tendit ad limitem 0 (ut supra).

Ita est

$$a'' . \frac{b}{b'} = (a' + \omega') \left(\frac{b'}{nb'} + \frac{t}{b'} \right)$$
$$= \frac{a' + \omega'}{n} + \frac{a' + \omega'}{b'} t,$$

cuius differentia ab x tendit ad 0, quia p et t tendunt ad 0, et $\frac{a' + \omega'}{b'}$ manet certo finito minus; secus enim

$$\frac{a' + \omega'}{n} : \frac{b'}{n} = x - p : b - t$$

quovis integro maius fieret, et hoc ab eo omni dabili pluries contineretur.

Ita

$$a' . \frac{y}{b''} = \frac{a'(b' + \lambda')}{(b' + \lambda')n} + \frac{a'q}{b' + \lambda'},$$

et

$$a = \frac{a'}{n} + z;$$

differentia enim eorum:

$$a - a' . \frac{y}{b''} = z - \frac{a'q}{b' + \lambda'},$$

ubi item q et z tendunt ad 0, et (ut prius) $\frac{a'}{b' + \lambda'}$ manet integro quodam minus, adeoque differentia (ut supra) limite 0 gaudet.

Atque demum

$$a'' . \frac{y}{b''} = \frac{a' + \omega'}{b' + \lambda'} \left(\frac{b' + \lambda'}{n} + q \right),$$

Hosted by Google

et

$$x = \frac{a'+\omega'}{n} + p,$$

quorum differentia:

$$x - a''.\frac{y}{b''} = p - \frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'}\,q,$$

ubi item p et q tendunt ad 0 et $\frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'}$ manet (ut prius) integro quodam minus.

Consequenter tendentiæ quartorum ad limitem rite positæ, et A, B, C, D quoti et quidem unici sunt (10.), exceptione ibidem facta.

Sunt autem A, B, C, D æqualia. Nam (pro α, β, h, k ad limitem 0 tendentibus) est

$$A = \frac{a'}{b'} + \alpha, \quad B = \frac{a''}{b'} + \beta,$$
$$C = \frac{a'}{b''} + h, \quad D = \frac{a''}{b''} + k,$$

atque

$$D - A = \frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'} + k - \frac{a'}{b'} - \alpha = \frac{\omega' b' - a'\lambda'}{b'(b'+\lambda')} + k - \alpha,$$

ubi $\frac{\omega'}{b'} \backsim 0$ et $\frac{\lambda'}{b'} \backsim 0$, dum $x \backsim a$, ac $y \backsim b$; $\frac{b'}{b'+\lambda'}$ vero et $\frac{a'}{b'+\lambda'}$ certo integro minus manet. Itaque differentia ista tendit ad 0, quia et $k \backsim 0$ et $\alpha \backsim 0$.

Pariter quotorum ceterorum limites ipsi $\frac{a}{b}$ esse æquales patet.

XXVI. In præcedenti schemate primo divisor b non erat 0; si tamen y non sit quidem 0, sed $y \backsim 0$, manifesto quotus omni dabili maior fiet: ponatur nempe in schemate tertio ex y fieri $\frac{y}{n}$, fiet $\frac{a'y}{b''}$ æquale $\frac{na'y}{nb''}$; itaque ex a' fiet na', et ex $\frac{a'}{b'}$ fiet $\frac{na'}{b'}$, quod si n tendat ad infinitum, fiet omni dabili maius. Et hinc sensu (§ 32, pag. 46) fit $\frac{1}{0} = \infty$.

Ita si y crescat, fiatque ny ex y, fiet $\frac{b''ny}{nb''}$ ex $\frac{b''y}{b''}$, ac $\frac{a'ny}{nb''}$ tendet ad a; et loco secundo fiet $\frac{a'}{nb''}$, quod tendit ad 0, si n tendat ad ∞; et $nb''.\frac{1}{nb''} = 1$, atque $\frac{a}{\infty} = 0$, sensu (§ 32. pag. 46).

Hosted by Google

Posset quidem definitio ita extendi, ut omnia hæc aliaque comprehendantur; si quid elegantiæ simplici labem aliquam adferre deposceret.

Quæstio alia est: si tam $x \backsim 0$, quam $y \backsim 0$, num $\frac{x}{y}$ limite et quonam gaudeat? Ex. gr. sit

$$x = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{n+1};$$

est

$$\frac{x}{y} = \frac{n+1}{n}$$

quod gaudet limite 1, si $n \backsim \infty$, quamvis tunc $\frac{1}{n} \backsim 0$ et $\frac{1}{n+1} \backsim 0$.

Etiam tunc quidem verum est, limitem ipsius $\frac{x}{y}$ esse quoto limitum æqualem, in quantum $\frac{0}{0}$ cuilibet æquale est (§ 32.); sed quisnam sit valorum innumerabilium quæsitus, infra dicetur. De casu tantum maximi momenti speciali, ubi pro x et y ad limitem 0 tendentibus $\frac{x}{y}$ limite 1 gaudet, aliquid heic prævie addere libet.

XXVII. Si lege certa simul variatorum u, u', v, v', t, t' plura occurrant, simultanea intelligantur, et maioritas sensu (§ 21.) accipiatur.

1. *Si* $\frac{u}{u'} \backsim 1$, *id est pro quovis utvis magno* N *dentur talia* u, u', *ut sit* $\frac{u}{u'} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$, *tum*:

$$\frac{u-u'}{u'} \lessdot \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad u - u' \lessdot \frac{u'}{N}.$$

Hinc si $u - u'$ dicatur ω, datur

$$\omega \lessdot \frac{u'}{N},$$

et tum

$$N\omega \lessdot u', \quad \text{atque} \quad \frac{\omega}{u'} \lessdot \frac{1}{N}.$$

2. *Si* $\frac{u}{u'} \backsim 1$, *etiam* $\frac{u'}{u} \backsim 1$.

Erat enim $u - u' = \omega$, adeoque

$$u = u' + \omega, \quad \text{et} \quad u' = u - \omega,$$

itaque

Hosted by Google

$$\frac{u'}{u} = \frac{u-\omega}{u} \quad \text{et} \quad \frac{u'}{u} - 1 = -\frac{\omega}{u'+\omega}.$$

Sed $u' \not> N\omega$, itaque

$$u' + \omega \not> (N-1)\omega,$$

(etsi ω et u' opposita essent). Consequenter

$$\frac{\omega}{u'+\omega} \not< \frac{1}{N-1}$$

est, et cum N utvis augere liceat,

$$\frac{u'}{u} - 1 \backsim 0.$$

3. *Si pro dato quovis N potest $\omega' \not< \frac{u}{N}$ fieri, ac $\frac{u}{u'} \backsim 1$, tunc etiam $\frac{u+\omega'}{u'} \backsim 1$.* Nam

$$\frac{u+\omega'}{u'} = \frac{u'+\omega+\omega'}{u'}$$

unde subtracto 1 manet $\frac{\omega+\omega'}{u'}$; sed $\frac{\omega}{u'} \backsim 0$ (ex 1.) et $\omega' \not< \frac{u}{N}$, adeoque

$$\frac{\omega'}{u'} \not< \frac{u}{Nu'} = \frac{1}{N} \cdot \frac{u}{u'},$$

quod (XXV, 11.) tendit ad 0; nam $\frac{1}{N} \backsim 0$, $\frac{u}{u'} \backsim 1$; consequenter $\frac{\omega+\omega'}{u'} \backsim 0$.

4. *Hinc* (per 2.) *etiam $\frac{u'}{u+\omega} \backsim 1$. Imo si et $\lambda \not< \frac{u'}{N}$ fieri potest, etiam $\frac{u'+\lambda}{u+\omega} \backsim 1$.* (Per præcedentia.)

5. *Si $\frac{u}{u'} \backsim 1$, ac $\frac{v}{v'} \backsim 1$, etiam $\frac{u+v}{u'+v'} \backsim 1$.*

Nam $v - v'$ dicatur k; erit

$$\frac{u+v}{u'+v'} = \frac{u'+\omega+v'+k}{u'+v'},$$

unde subtracto 1 manet $\frac{\omega+k}{u'+v'}$; sed $\omega \not< \frac{u'}{N}$, ita $k \not< \frac{v'}{N}$ fieri (ex 1.) potest; et hinc

$$\frac{\omega+k}{u'+v'} \not< \left(\frac{u'}{N} + \frac{v'}{N}\right) : (u'+v'),$$

Hosted by Google

id est

$$\frac{\omega+k}{u'+v'} \prec \frac{1}{N}$$

fieri potest. — Si vero de m eiusmodi quotis valet, valet etiam de $m+1$. Sit enim $(m+1)$-tus $\frac{p}{p'}$, et $\frac{z}{z'}$ quod ex m quotis prodiit; tum quoque $\frac{z+p}{z'+p'} \backsim 1$.

6. *Si* $\frac{u}{u'} \backsim 1$, *ac* $\frac{v}{v'} \backsim 1$, *etiam* $\frac{uv}{u'v'} \backsim 1$.

Nam

$$\frac{uv}{u'v'} = \frac{u'+\omega}{u'} \cdot \frac{v'+k}{v'} = \frac{u'v'+\omega v'+u'k+\omega k}{u'v'},$$

unde subtracta unitate manet

$$\frac{uv}{u'v'} - 1 = \frac{\omega v'+u'k+\omega k}{u'v'} = \frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'},$$

quod tendit ad 0; nam $\frac{\omega}{u'} \backsim 0$ (ex 1.) ita $\frac{k}{v'}$, adeoque et

$$\frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'}$$

tendit ad 0 (XXV, 11).

Et hic (ut in præc.) de m ad $m+1$ progrediendo, patet quotcunque quotorum ad limitem tendentium factum ad limitem 1 tendere.

7. *Si* $\frac{u}{u'} \backsim 1$, *ac* $\frac{u'}{v} \backsim 1$, *etiam* $\frac{u}{v} \backsim 1$.

Nam tunc etiam $\frac{uu'}{u'v} \backsim 1$, consequenter $\frac{u}{v} \backsim 1$.

XXVIII. Sæpe quotus formæ $\frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}$ occurrit; sive plures sive pauciores fuerint superius literæ quam inferius, et sive omnes commensurabiles fuerint, sive non, utcunque discerptis permutatisque factoribus superius inferiusve, quotus idem prodit. Ex. gr.

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = \frac{\beta}{a} \cdot \frac{\alpha}{cb} \cdot \gamma = \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\gamma}{a} = \gamma\alpha\beta . \frac{1}{abc} .$$

Nam si (pro integris $\alpha', \beta', \gamma', a', b', c', n$)

$$\frac{\alpha'}{n} \backsim \alpha, \quad \frac{\beta'}{n} \backsim \beta, \quad \frac{\gamma'}{n} \backsim \gamma, \ldots$$

Hosted by Google

$$\frac{a'}{n} \backsim a, \quad \frac{b'}{n} \backsim b, \quad \frac{c'}{n} \backsim c, \ldots$$

tum

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} \backsim \alpha\beta\gamma, \text{ et } \frac{a'b'c'}{nnn} \backsim abc,$$

(XXV, 9. pag. 84); et

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} : \frac{a'b'c'}{nnn} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{a'b'c'} =$$
$$= \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{a'}{n}\right)\left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{c'b'}{nn}\right)\frac{\gamma'}{n} =$$
$$= \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{c'}{n}\right)\left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{b'}{n}\right)\left(\frac{\gamma'}{n} : \frac{a'}{n}\right) =$$
$$= \frac{\gamma'\alpha'\beta'}{nnn}\left(1 : \frac{a'b'c'}{nnn}\right),$$

quod $\backsim \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$ (XXV, 14.); nempe tot n prodibunt ut factores superius, quot inferius, iis, qui sub literis inferioribus sunt, supra, et iis, qui sub superioribus sunt, infra cadentibus; atque literæ superiores accento insignitæ constituunt dividendum, inferiores divisorem; adeoque utcunque discerpantur, prodibit quoto ad limitem dictum tendenti æquale. Idem ad quotvis extendi patet.

At quæritur; quidsi integrorum dictorum quilibet aliquo signorum $+$, $-$ afficiantur?

1. $\frac{\vdash\!\dashv\alpha'}{n}$ gaudet limite negativo; nam si $\frac{\vdash\!\dashv\alpha'}{n}$ tendat ad $\vdash\!\dashv\alpha$,

$$\vdash\!\dashv\alpha - \left(\frac{\vdash\!\dashv\alpha'}{n}\right) = \vdash\!\dashv\alpha \vdash\!\dashv \frac{\alpha'}{n}$$

non tendit ad 0.

2. Quocunque signo afficiatur quodvis eorum $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$, quovis ordine, signum facti idem prodibit. Nam quæ signo $+$ gaudent, factum reliquorum non mutant, quocunque illa inserantur; itaque nonnisi de $-$ quæritur; si numero pari adsint, cum reliqui utcunque misceantur, signum non mutent; erit factum idem, quam si post omnia $+$ ponerentur omnia $-$; ita si præter signo $+$ gaudentia maneant signo $-$ gaudentia numero impari.

3. In tali quoto vero (qui sit ex. gr. $-$, ita si $+$ sit patet) erunt

Hosted by Google

quoti dicti (factores partiales novi) aut aliqui signo — gaudentes, aut non; in casu primo erunt hi aut numero pari aut impari; fit vero hoc, quoties dividendi divisorisque signa contraria sunt; si hoc numero pari sit, factum dividendorum illorum et factum divisorum illis respondentium signo eodem gaudebunt; nam ubi dividendus + habet, divisor — habere debet, et ubi is +, hic — habet, ut quotus — habeat; adeoque si + sit numero m, et — numero m' superius, erit — numero m, et + numero m' inferius; et si m par sit, etiam m' par, si m impar, etiam m' impar esse debet, (ut numerus eorum par prodeat); si m par sit, factum et supra et infra + habebit, si m impar sit, factum superius ex m' prodibit —, manens — etiam per m, infra pariter ex m (impari) prodibit —, manens per m'. Signum quoti vero, ex his quotis tanquam factoribus prodeuntis, per factores reliquos signo + gaudentes relinquitur; uti etiam signum facti e dividendis cum signo facti e divisoribus manet idem; (nam in quovis reliquorum supra et infra signum idem est); atque adeo factum superius primum per factum inferius primum divisum daret + (contra hypothesim); quamobrem quoti dicti (ut factores partiales) signo — gaudentes, numero pari esse nequeunt; sunt igitur numero impari, et tum etiam hoc pacto signum — prodit. Reliqua pariter patent.

XXIX. *Quod potentia possibilis sit*, (§ 34, pag. 50), sive commensurabile sit q, sive non et sive positivum, sive negativum, patet sic.

1. Si q integer sit, erit ex. gr. $a^2 = aa$, si

$$\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAA}{AA}, \quad (\text{seu } aa = A),$$

et dicitur per definitionem

$$a^{\frac{4-2}{3-2}} = A,$$

atque

$$a = \sqrt[2]{A},$$

(seu brevius $\sqrt{A}$); ita

$$a = A^{\frac{3-2}{4-2}} = A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}.$$

Hosted by Google

Ita pro m integro positivo est

$$\sqrt[m]{A} = A^{\frac{1}{m}} = a, \quad \text{si} \quad a^m = A,$$

Est etiam

$$\sqrt[m]{a^m} = \sqrt[m]{A} = a.$$

Si vero $a = \frac{b}{c}$, *tum* $a^m = \frac{b^m}{c^m}$.

Nam tum $\frac{b}{c}$, adeoque tam b superius, quam c inferius (per præced.) ponitur m-ies.

Est etiam conversim

$$\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}} = \frac{\sqrt[m]{b^m}}{\sqrt[m]{c^m}} = \frac{b}{c},$$

nam

$$\left(\frac{b}{c}\right)^m = \frac{b^m}{c^m}.$$

2. Si $\frac{aaa}{aa}$ sit $\frac{AAA}{AA}$, adeoque $a = A$, tum

$$a^{\frac{3-2}{3-2}} = A = a = a^1,$$

et

$$\sqrt[1]{a} = a.$$

Patet autem quotcunque factores sive ad sinistram sive ad dextram adnecti posse, dummodo tam superius quam inferius numero eodem sint.

3. Si $\frac{aa}{aa} = \frac{AAA}{AA}$ [seu $1 = A$], tum

$$a^{\frac{2-2}{3-2}} = a^0 = 1,$$

et

$$\sqrt[0]{1} = a,$$

adeoque quantitati cuilibet æquale.

4. Si $\frac{aa}{aaaa} = \frac{AAA}{AA}$, (seu $\frac{1}{aa} = A$), tum

$$a^{\frac{2-4}{3-2}} = A = a^{-2}$$

et per definitionem

$$\sqrt[-2]{A} = a;$$

Hosted by Google

et

$$\frac{1}{A} = aa,$$

adeoque (per 1.) est

$$\frac{1}{\sqrt[2]{A}} = a$$

nempe

$$a = \sqrt[2]{\frac{1}{A}} = \sqrt[-2]{A}.$$

Si vero $\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAAAA}{AA}$ (seu $aa = AAA$), tum

$$a^{\frac{4-2}{5-2}} = a^{\frac{2}{3}} = A, \quad \text{et} \quad \sqrt[\frac{2}{3}]{A} = a.$$

Ita si $\frac{aa}{aaaa} = \frac{AAAAA}{AA}$ (seu $\frac{1}{a^2} = A^3$);

est

$$a^{\frac{2-4}{5-2}} = a^{\frac{-2}{3}} = A, \quad \text{et} \quad \sqrt[\frac{-2}{3}]{A} = a.$$

5. Sed quæritur, num detur tale A, ut $aa = AAA$? nempe *num pro quovis K positivo et quovis integro m detur tale k, ut $k^m = K$?*

Si $K = 0$ sit, tum patet $0^m = K$ esse.

Si non, tum datur tale z, ut $z^m < K$, et tale Z, ut $Z^m > K$ sit. Nam accipiatur talis integer n, ut $\frac{1}{n} < K$, erit

$$\left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n} < K;$$

item pro integro $N > K$, est

$$N^m > N > K.$$

Itaque (E, pag. 20) datur (Fig. 16.) a $\mathfrak{p}$ incipiendo quantitate usque ad $N > K$ crescente punctum aliquod $*$, intra quod quidvis tale est ut id, quod a $\mathfrak{p}$ eo usque est, ad m elevatum sit $< K$; eritque in $*$ aut *ultimum tale* aut *primum non tale.*

Dicatur x' id, quod a $\mathfrak{p}$ usque in $*$ est; erit, quod a $\mathfrak{p}$ usque ad quidvis intra $*$ est, $x' - \omega$, et, quod a $\mathfrak{p}$ usque ad quidvis ultra $*$ est, $x' + \omega$ (pro x' et ω positivis). Si ω tendat ad 0, tum $x' \pm \omega$ tendit ad

Hosted by Google

x', adeoque $(x' \pm \omega)(x' \pm \omega)$ tendit ad $x'x'$ (XXV, 11. pag. 85) et $(x' \pm \omega)^m$ tendit ad x'^m; atque cum $x' + \omega$ ultra $*$ sit, est $(x' + \omega)^m$ aut $= K$, aut $> K$.

Hinc in $*$ non erit ultimum tale, ergo primum non tale, nec enim plus quam K producit; nam si illorum ultimum esset, sit $x'^m = K - b$; si primum non tale eiusmodi esset, sit $x'^m = K + c$, pro b et c constantibus positivis; erit (cum statim demonstretur, crescente factore crescere factum, nisi factor aliquis 0 sit)

$$(x' + \omega)^m > x'^m > (x' - \omega)^m;$$

sit (λ et λ' 0 vel positiva denotantibus)

$$(x' + \omega)^m = K + \lambda, \quad (x' - \omega)^m = K - \lambda';$$

adeoque si

$$x'^m = K - b,$$

erit

$$(x' + \omega)^m - x'^m = K + \lambda - (K - b) = \lambda + b,$$

quod non tendit ad 0, cum utrumque positivum et b constans sit.

Si vero

$$x'^m = K + c,$$

tum

$$x'^m - (x' - \omega)^m = K + c - (K - \lambda') = c + \lambda',$$

quod pariter non tendit ad 0.

Est igitur x'^m neque $> K$, neque $< K$, adeoque ipsi K æquale est.

6. *Quod crescente factore, crescat factum, (omnibus positivis)* adeoque maius ad idem m elevatum fiat maius, patet inde, quod si manente multiplicando α sit prius multiplicator $\frac{m}{n} + p$, dein $\frac{m+1}{n} + p'$ (ubi $p < \frac{1}{n}$ et $p' < \frac{1}{n}$) erit factum in casu primo $< (m+1)\frac{\alpha}{n}$; in posteriore ve $=$ vel $> (m+1)\frac{\alpha}{n}$, patet vero, quod si $B > A$ fuerit, mensurato quoad 1 utroque, poterit 1 per talem integrum n dividi, ut $\frac{1}{n}$ in B saltem uno pluries contineatur; alioquin si

$$A = \frac{m}{n} + p, \quad B = \frac{m}{n} + p' \quad \left(p < \frac{1}{n}, \quad p' < \frac{1}{n}\right),$$

Hosted by Google

pro $n \backsim \infty$, $p \backsim 0$, $p' \backsim 0$ et $A = B$. Si etiam α crescat, manifesto adhuc magis crescet factum. Unde patet, maius ad exponentem integrum elevatum dare maius.

Ast etiamsi exponens crescat, dum radix > 1, maius prodit. Sit enim $a^{\frac{4}{3}}$ et $a^{\frac{5}{3}}$ (denominatore exponentium prius eodem); erit schema (per præcedentia):

$$\begin{matrix} a & . & a & . & a & . & a \\ xxx & . & xxx & . & xxx & . & xxx \end{matrix}$$

et

$$\begin{matrix} a & . & a & . & a & . & a & . & a \\ xxx & . & xxx & . & xxx & . & xxx & . & xxx \end{matrix}$$

Nempe quodvis a est æquale $x.x.x$, et prima x accipiendo erit

$$x.x.x.x = a^{\frac{4}{3}} \quad \text{et} \quad x.x.x.x.x = a^{\frac{5}{3}},$$

ubi patet unum factorem x accedere; adeoque si x est unitate maius, maius prodire; sed x nonnisi tunc fractio vera est, si a talis sit, quia si x fractio vera est, etiam xxx talis et adhuc minor erit.

Possunt vero *exponentes* (ut fractiones) *ad denominationem eandem reduci valore immutato.*

Sit enim

$$a^{\frac{2}{3}} = x,$$

nempe $aa = xxx$; erit etiam

$$a^{\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}} = x;$$

nam tum

$$a^{2 \cdot 5} = x^{3 \cdot 5},$$

quia

$$\begin{aligned} a^{2 \cdot 5} &= aa \;.\; aa \;.\; aa \;.\; aa \;.\; aa \\ &= xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx, \end{aligned}$$

nempe a^2 ponitur 5-ies, adeoque x ponitur $3 \cdot 5$-ies.

Hinc etiam (pro integris n et m) est

$$a^n = a^{\frac{n}{1}} = a^{\frac{mn}{m}}.$$

Numeros 2, 3, 5 scilicet quorumque integrorum positivorum vices subire manifestum est.

Hosted by Google

7. Sit prius a positivum, et (pro integris positivis n et m) sit $\frac{n}{m}$ tendens ad limitem q, nempe

$$1 = mu, \quad q = nu + \omega, \quad \omega < u, \quad u \backsim 0.$$

Erit crescente $\frac{n}{m}$ sine fine (pro $a > 1$) semper (per præc.)

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^{\frac{n}{m}}, \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{m} > q,$$

atque

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q.$$

Fiat n' ex n, et m' ex m; reducendo ad denominationem eandem erit

$$a^{\frac{nm'}{mm'}} < a^{\frac{mn'}{mm'}},$$

nam

$$nm' < mn'.$$

Crescit igitur valor A ipsius $a^{\frac{n}{m}}$ sine fine, manens tamen minor primo $a^{\frac{n+1}{m}}$, itaque $a^{\frac{n}{m}}$ tendit ad limitem aliquem B, dum $\frac{n}{m}$ tendit ad q; adeoque (per definitionem) est

$$B = a^q, \quad \text{et} \quad a = \sqrt[q]{B}.$$

Si $a = 1$, manifesto $a^{\frac{n}{m}}$ semper unitati æquale erit; nam

$$a^n = 1, \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{1} = 1, \quad \text{quia} \quad 1^m = 1;$$

et non erit $A \backsim B$, sed est $A = B = 1$, et cum a^n semper æquale est B^m, atque $\frac{n}{m}$ tendit ad q, est (per definitionem)

$$a^q = B, \quad \text{id est} \quad 1^q = 1.$$

Si vero $a < 1$ sit, tunc crescente $\frac{n}{m}$ decrescet $a^{\frac{n}{m}}$; nam si a fractio vera sit, crescente n decrescet a^n, atque (ut antea ad denominationem eandem reducendo) erit

$$a^{mn'} < a^{m'n} \quad \text{et} \quad \sqrt[mm']{a^{mn'}} < \sqrt[mm']{a^{m'n}},$$

seu

$$a^{\frac{n'}{m'}} < a^{\frac{n}{m}}.$$

Hosted by Google

Decrescit itaque sine fine $a^{\frac{n}{m}}$, nunquam tamen fiens 0; itaque limite gaudet, qui (per definitionem) est potentia exponentis q ipsius a.

Si q negativum sit (pro $\frac{n}{m}$ posito $\frac{-n}{m}$), et a positivum sit, erit

$$a^{-n} = A^m,$$

nempe datur tale A, ut sit

$$\frac{1}{a^n} = A^m,$$

nimirum

$$A = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}},$$

quod, si $a > 1$, decrescit, cum denominator crescat, nunquam tamen fiens 0; si $a = 1$, semper 1 erit; si $a < 1$, crescet manens tamen certo finito minus, cum denominator limite finito gaudeat. Unde patet et hic dari potentiam exponentis q ipsius a.

Hinc etiam, cum $\frac{-n}{m} \backsim q$ atque $\frac{n}{m} \backsim -q$, est

$$a^q = \frac{1}{a^{-q}}, \quad \text{et} \quad a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

Unde potentia e divisore in dividendum poni potest, exponente in oppositum mutato. Ex. gr.

$$\frac{b}{a} = ba^{-1}.$$

8. Notatu dignum est, quod *quodvis datum N et quaevis fractio vera f sit, tam $\sqrt[m]{N}$ quam $\sqrt[m]{f}$ tendit ad unitatem, si integer $m \backsim \infty$.*

Nam quivis integer n sit, est

$$(n+1)^2 > n^2 + 2n,$$

et si

$$(n+1)^i > n^i + in^{i-1}$$

sit, multiplicando per $n+1$ erit

$$(n+1)^{i+1} > n^{i+1} + (i+1)\,n^i,$$

atque adeo

$$(n+1)^m > n^m + mn^{m-1},$$

Hosted by Google

et

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n^m + mn^{m-1}}{n^m},$$

et dividendo per n^{m-1} patet

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n+m}{n}.$$

Sed m, adeoque $\frac{m}{n}$ tendit ad infinitum, cum n maneat.

Ita

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m < \frac{n^m}{n^m + mn^{m-1}}$$

$$< \frac{n}{n+m},$$

ubi $\frac{n}{n+m} \backsim 0$.

9. *Est* $a^q . a^Q = a^{q+Q}$.

Sit enim (pro integris n, m, ν ad denominationem eandem reducendo)

$$\frac{n}{m} \backsim q, \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{m} \backsim Q;$$

erit

$$a^{\frac{n}{m}} \backsim a^q, \quad \text{et} \quad a^{\frac{\nu}{m}} \backsim a^Q,$$

atque

$$a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{\nu}{\mu}} \backsim a^q . a^Q.$$

Sit

$$a^n = x^m \quad \text{et} \quad a^\nu = y^m,$$

erit

$$x = a^{\frac{n}{m}}, \quad y = a^{\frac{\nu}{m}} \quad \text{et} \quad xy = a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{\nu}{m}};$$

atque

$$x^m y^m = a^n a^\nu, \quad \text{seu} \quad (xy)^m = a^{n+\nu},$$

consequenter

$$xy = a^{\frac{n+\nu}{m}},$$

quod tendit ad a^{q+Q}; nam $\frac{n}{m}$ tendit ad q et $\frac{\nu}{m}$ ad Q, adeoque (XXV, 3. pag. 80) $\frac{n+\nu}{m} \backsim q + Q$.

Est igitur (XXV, 11. pag. 85)

$$a^q a^Q = a^{q+Q}.$$

Si n aut etiam ν negativum sit, pariter patet.

Hosted by Google

Unde etiam

$$\frac{a^q}{a^Q} = a^{q-Q}.$$

Nam

$$a^Q a^{q-Q} = a^{Q+q-Q} = a^q.$$

10. Si $\frac{n}{m} = q$, *et* $a^n = B^m$, *tum non tantum*

$$a^{\frac{n}{m}} = B, \quad \textit{sed etiam} \quad B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}},$$

quia $\frac{m}{n} = 1 : \frac{n}{m}$.

At etiam si $\frac{n}{m} \backsim q$, *et* $a^q = B$, *est*

$$a = B^{\frac{1}{q}}.$$

Nam

$$\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m};$$

itaque (7. pag. 101)

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q > a^{\frac{n}{m}};$$

et hinc

$$a^{n+1} > B^m > a^n,$$

atque

$$B^{\frac{m}{n+1}} < a < B^{\frac{m}{n}}.$$

At

$$B^{\frac{m}{n+1}} - B^{\frac{m}{n}} \backsim 0,$$

adeoque etiam (XXV, 5. pag. 81)

$$a - B^{\frac{m}{n}} \backsim 0,$$

nempe

$$\frac{n}{m} \backsim q, \quad \text{et} \quad \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} \backsim 0;$$

consequenter (XXV, 4. pag. 81)

$$a = B^{\frac{1}{q}}.$$

Hinc etiam, si

$$B^{\frac{1}{q}} = a,$$

Hosted by Google

est

$$B = a^{1:\frac{1}{q}} = a^q;$$

ita sive $a = \sqrt[q]{B}$, sive $a = B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est.

11. *Pro integris n et m est $(\sqrt[m]{B})^n$, id est $(B^{\frac{1}{m}})^n = \sqrt[m]{B^n}$.*

Nam sit

$$B = z^m,$$

adeoque

$$z = B^{\frac{1}{m}}, \quad z^n = \sqrt[m]{z^{mn}}.$$

12. *Est $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}}$.*

Nam

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}} = \frac{x}{y},$$

si

$$x^m = b^n \quad \text{et} \quad y^m = c^n;$$

nam

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

Est vero tunc

$$x = b^{\frac{n}{m}}, \quad y = c^{\frac{n}{m}},$$

adeoque

$$\frac{x}{y} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Si vero $\frac{n}{m} \backsim q$, tum

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} \backsim \left(\frac{b}{c}\right)^q,$$

item $b^{\frac{n}{m}}$ tendit ad b^q, et $c^{\frac{n}{m}}$ tendit ad c^q; consequenter (XXV, 14. pag. 89.)

$$\left(\frac{b}{c}\right)^q = \frac{b^q}{c^q}.$$

Ita

$$\sqrt[q]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[q]{b}}{\sqrt[q]{c}};$$

nempe tum $\frac{m}{n}$ tendit ad $\frac{1}{q}$, atque

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{b^{m:n}}{c^{m:n}},$$

unde reliqua patent.

13. *Pro n, m, ν, μ integris est*

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\nu}{\mu}} = a^{\frac{n\nu}{m\mu}}.$$

Nam sit

$$a = x^{m\mu}, \quad \text{adeoque} \quad \sqrt[m\mu]{a} = x,$$

erit

$$a^n = x^{nm\mu},$$

et $\sqrt[m]{a^n}$, nempe

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^{nm\mu}} = x^{n\mu};$$

itaque

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\nu} = x^{n\mu\nu},$$

atque

$$\sqrt[\mu]{\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\nu}} = \sqrt[\mu]{x^{n\mu\nu}} = x^{n\nu} = \left(\sqrt[m\mu]{a}\right)^{n\nu},$$

porro (per 11., pag. 105)

$$= a^{\frac{n\nu}{m\mu}}.$$

Unde etiam si $\frac{n}{m} \backsim q$ et $\frac{\nu}{\mu} \backsim p$, adeoque $\frac{n\nu}{m\mu} \backsim pq$, et $a^{\frac{n}{m}} \backsim a^q$, atque

$$a^{\frac{n\nu}{m\mu}} \backsim a^{pq} = (a^q)^p.$$

Nam

$$\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m},$$

adeoque

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q > a^{\frac{n}{m}},$$

ita

$$\frac{\nu+1}{\mu} > p > \frac{\nu}{\mu};$$

itaque erit etiam

$$\left(a^{\frac{n+1}{m}}\right)^{\frac{\nu+1}{\mu}} > (a^q)^p > \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

(Posito $a > 1$; pro $a < 1$ esset $<$ loco $>$)

Consequenter

$$a^{\frac{(n+1)(\nu+1)}{m\mu}} > (a^q)^p > a^{\frac{n\nu}{\mu m}},$$

ubi differentia postremi a primo tendit ad 0; nam $a^{\frac{(n+1)(\nu+1)}{m\mu}}$ et $a^{\frac{n\nu}{m\mu}}$ limite communi gaudent (ut in 10. pag. 104), nam $\frac{n+\nu+1}{m\mu}$ tendit ad 0, quia $\frac{n}{m}$ et $\frac{\nu}{\mu}$ manet finito minus, $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{m}$ vero limite 0 gaudent. Unde (XXV, 8. pag. 81) $a^{\frac{n\nu}{m\mu}} - (a^q)^p$ tendit ad 0, et (XXV, 4. pag. 81) cum $a^{\frac{n\nu}{m\mu}}$ tendit ad a^{pq}, est

$$a^{pq} = (a^q)^p.$$

Hinc etiam $\sqrt[k]{a^q}$ est æquale $a^{\frac{q}{k}}$. Nam

$$\sqrt[k]{a^q} = (a^q)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{q}{k}}.$$

14. Si $a < 1$ aut exponens uterque (aut unus tantum) negativum fuerit tum quoque omnia mutatis mutandis (7. pag. 101 sequ.) dicta valent. Ex. gr.

$$(a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \left(1 : \frac{1}{a^p}\right)^q = (a^p)^q = a^{pq}.$$

Ita

$$(a^{-\alpha})^{\frac{1}{\beta}} = a^{\frac{-\alpha}{\beta}} = a^{-\frac{\alpha}{\beta}};$$

nam

$$a^{\frac{-\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{a^{-\alpha}} = \sqrt[\beta]{\frac{1}{a^\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[\beta]{a^\alpha}} = \frac{1}{a^{\alpha:\beta}};$$

atque etiam

$$a^{\frac{\alpha}{-\beta}} = \sqrt[-\beta]{a^\alpha} = \sqrt[\beta]{\frac{1}{a^\alpha}} = \frac{1}{a^{\alpha:\beta}}.$$

Ita

$$a^{\frac{-\alpha}{-\beta}} = \sqrt[-\beta]{a^{-\alpha}} = \sqrt[-\beta]{\frac{1}{a^\alpha}} = \sqrt[\beta]{1 : \frac{1}{a^\alpha}} = \sqrt[\beta]{a^\alpha} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Hinc si

$$\frac{\alpha}{\beta} = q \quad \text{et} \quad a^\alpha = b^\beta,$$

est quoque

$$(a^\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = (b^\beta)^{\frac{1}{\beta}},$$

seu

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b,$$

seu

$$a^q = b.$$

Hosted by Google

Conversim etiam si

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b,$$

est

$$a^{\alpha} = b^{\beta};$$

nam

$$\left(a^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\beta} = b^{\beta} \quad \text{seu} \quad a^{\alpha} = b^{\beta}.$$

15. *Est* $(abc\ldots)^q = a^q . b^q . c^q \ldots$

Nam si $\frac{n}{m} \backsim q$ (ut supra), erit

$$(abc)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(abc)^n} = \sqrt[m]{a^n b^n c^n} = \sqrt[m]{x^m y^m z^m} = xyz,$$

si

$$a^n = x^m, \quad b^n = y^m, \quad c^n = z^m.$$

Est vero tum

$$x = a^{\frac{n}{m}}, \quad y = b^{\frac{n}{m}}, \quad z = c^{\frac{n}{m}},$$

adeoque

$$xyz = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{n}{m}} = (abc)^{\frac{n}{m}} \backsim (abc)^q;$$

porro

$$a^{\frac{n}{m}} \backsim a^q, \quad b^{\frac{n}{m}} \backsim b^q, \quad c^{\frac{n}{m}} \backsim c^q,$$

consequenter

$$(abc)^q = a^q . b^q . c^q.$$

Unde etiam

$$\sqrt[k]{abc} = (abc)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} c^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}\ \sqrt[k]{b}\ \sqrt[k]{c}.$$

16. Si *(nunc ut inferius quantitatibus ad potentiam elevandis et negativis admissis)* a negativum sit et $\frac{n}{m}$ gaudeat limite q, poterit n aut m, aut utrumque sive par, sive impar accipi, semper prouti visum fuerit; nam $\frac{n \pm 1}{m}$ aut $\frac{m \pm 1}{n}$ ita $\frac{n \pm 1}{m \pm 1}$ quoque tendunt ad q (XXV, 6. 7. pag. 81). Si n par sit, erit a^n positivum, et si m quoque par sit, $a^{n:m}$ duos valores, unum positivum alterum negativum habet, alioquin æquales; si m impar sit, unus datur valor positivus, nam negativum ad numerum imparem elevatum negativum est. Si vero n impar sit, erit a^n negativum, et pro m impari habet $a^{n:m}$ unum valorem negativum, at positivum non, quia huius potentia positiva, non negativa est.

Hosted by Google

Si igitur q incommensurabile sit, duobus valoribus gaudet a^q æqualibus uno positivo, altero negativo, sive positivum sive negativum sit a; si vero $q = \frac{n}{m}$, et n impar, atque a negativum, et m quoque impar sit, unus erit valor et quidem negativus; sed si pro n impari m par sit, nec positivus nec negativus valor datur, quod ad numerum parem elevatum negativum sit. Dicuntur eiusmodi quantitates imaginariæ, ut $\sqrt{-4}$; nempe tam $+2$ quam -2 per se multiplicatum fit $+4$, non -4.

XXX. At priusquam de imaginariis ageretur, sit fas de logarithmo elementari, ad quem (pagina 50.) conceptus potentiæ deduxerat, et hic aliquid referre.

1. Si basis a *(positiva)* >1, vel <1 sit (pag. 50), quomodo reperiatur pro quovis P positivo tale p, ut $a^p = P$ sit, infra dicetur. Patet autem, si $a < 1$ sumeretur, crescente p, decrescere a^p, et crescere crescente $-p$.

Erit:

$$\log. a = 1, \quad \text{quia} \quad a^1 = a$$

$$\log. 1 = 0, \quad \text{quia} \quad a^0 = 1.$$

2. Si $a^p = P$ et $a^q = Q$, tum $p = \log. P$ et $q = \log. Q$ quoad basim eandem a, atque etiam (XXIX, 9. pag. 103)

$$a^{p+q} = PQ,$$

et

$$p + q = \log. P + \log. Q = \log. PQ.$$

Unde, de n ad $n+1$ progrediendo, *logarithmus facti aequalis est summae logarithmorum factorum. Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est* $p + q + \ldots$, *est* $a^p . a^q \ldots$, *nempe haec talis est, cuius logarithmus est* $p + q + \ldots$

Si $q = 0$, est $Q = 1$.

3. Quum sit

$$a^p : a^q = P : Q = a^{p-q},$$

atque $p - q$ sit $\log. (P:Q)$, est *logarithmus quoti differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi*, nempe

Hosted by Google

$$\log. \frac{P}{Q} = \log. P - \log. Q$$

Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est $p - q$, erit $a^p : a^q$. Hinc pro basi $a > 1$ fractionis verae logarithmus negativus est, et logarithmo negativo respondens quantitas fractio vera est; nam

$$\log. \tfrac{2}{3} = \log. 2 - \log. 3\,;$$

et conversa (XXIX, 6. pag. 99) quoque valet, nempe etiam idem positivum et > 1 ad maius elevandum est, ut maius prodeat; quia ad exponentem minorem elevatum dat quantitatem minorem, ad idem elevatum dat idem. Et vicissim negativo fractio vera respondet; nempe tum a ad $-k$ elevatur (pro k positivo), id est unitas per a^k dividatur (XXIX, 7. pag. 101); est vero $a > 1$ et a^k etiam positivum et unitate maius; nam $1^k = 1$ et si $a > 1$, etiam $a^k > 1$.

4. *Erit* $(a^p)^q = P^q = a^{pq}$. (XXIX, 13. pag. 106) Itaque *logarithmus potentiae est aequalis logarithmo quantitatis elevandae per exponentem multiplicato.*

Nam

$$pq = \log. P^q = q \log. P.$$

Et vicissim quantitas ipsi pq tanquam logarithmo respondens est aequale P^q. Hinc

$$\log. P + 2 \log. Q = \log. P.Q^2$$

et

$$\log. P - 3 \log. Q = \log. \frac{P}{Q^3}.$$

5. *Est* $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{P}$.

Est vero

$$\frac{p}{q} = \frac{\log. P}{q} = \log. \sqrt[q]{P}.$$

Itaque *quotus e logarithmo quantitatis, e qua radix extrahenda est, per exponentem radicalem diviso, est logarithmus radicis quaesitae.*

Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est $\frac{\log. P}{q}$, est $\sqrt[q]{P}$.

Hosted by Google

6. Hinc etiam, si pro basi quavis aliqua dati sint logarithmi, *pro quovis α reperitur tale x, ut α^x aequale dato β sit*; nempe (4. pag. 110.)

$$x \log. \alpha = \log. \beta,$$

adeoque (per $\log. \alpha$ dividendo utrinque) est

$$x = \frac{\log. \beta}{\log. \alpha}.$$

De hisce operationum commodis inferius plura. Quum pro exponentibus integris manifestum esset in multiplicatione addi, in divisione subtrahi, in elevatione multiplicari, in radice (ex. gr. in $\sqrt[3]{a^6}$) dividi: idem ad exponentem fractum extendere pronum erat; atque tum quæstione pagina 50. proposita satagere, ut compendiis his numeri omnes subjiciantur.

Notandum adhuc est, quod si basis logarithmica $a < 1$ (ex. gr. $\frac{2}{3}$) poneretur, pro q positivo et in infinitum crescenti $\left(\frac{2}{3}\right)^q$ tendit ad limitem 0, (patet ex XXIX, 8. pag. 102); adeoque (sensu pag. 46) $\log. 0$ esset $+\infty$, uti pro basi positiva et < 1 est $-\infty$. Pro $q = 1$ fit potentia ipsa basis $\frac{2}{3}$, et pro $q = 0$ fit 1; postea vero crescente exponente negativo in infinitum $\left(\frac{2}{3}\right)^{-q}$ crescit in infinitum.

De logarithmo elementari ac sublimiori adhuc quædam paulo inferius dicenda erunt.

XXXI. Ad omnes istas operationes autem unitatem determinatam eandemque pro omnibus suppositam esse dictum supra est. At quæstio oritur, *quidsi alia unitas poneretur? idemne maneret, aut in quem mutaretur expressionis valor? aut expressiones quoad diversas unitates factae quomodo ad eandem reduci queant?*

Quantitates (uti certum tempus, certa recta &c), quarum unitas u talis in intuitu exhiberi potest, ut non aliud, nisi quod æquale u est, pro illo casu unitas esse queat, *concretas*, easque *generales* sive *abstractas* dicere licet, quæ cuivis unitati sed nulli exclusive appertinent; nempe in quo conveniunt plura (quovis quoad suam unitatem relato), ex. gr. $\frac{2}{3}$ dici de quovis potest, quod suæ unitatis tertiam bis continet; hoc sensu est (§ 32., pag. 44.) quotus ex. gr. e duobus pedibus per tres pedes divisis

Hosted by Google

unicus, cum alioquin quidvis, quod suæ unitatis tertiam bis continet, quotus sit. Si quantitas abstracta sit multiplicator aut divisor, utcunque mutata multiplicandi (dividendive) unitate, resultatum idem est; imo etiamsi abstracta multiplicetur per concretam, si in hoc casu expressio prodiens semper ad unitatem concretæ referatur, resultatum idem manet; ex. gr. si a denotet quinque pedes, sitque prius unitas $u = 1'$, dein sit $U = \frac{u}{2}$, erit

$$\frac{2}{3} \cdot a = \frac{2 \cdot 5'}{3} = \frac{5 \cdot 2'}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{3} \frac{1'}{2};$$

itaque factores abstracti, ubivis occurrant, factum non mutant; idem est si in divisore occurrat abstracta; nam

$$a : \frac{2}{3} = a \cdot \left(1 : \frac{2}{3}\right).$$

Concreta per concretam homogeneam divisa quoque, utcunque mutata unitate, quotum eundem dat; sed si in divisore plures factores concreti sint, quam in dividendo, ex. gr. sit $\frac{\alpha\beta}{abc}$, atque unitas sit u, resultatum manebit idem, si supra quodvis tale concretum (ut c) ponatur u, ut sit $\frac{\alpha\beta u}{abc}$; ita si sit ex. gr. $\frac{2}{c}$ et ponatur $\frac{2u}{c}$, manebit valor idem, alioquin mutata unitate mutatur. At quæritur, quomodo factum concretorum mutetur unitate mutata? et idem etiam ad quotos, quorum et dividendus et divisor factum e factoribus concretis est, applicari poterit.

Exprimantur quantitates concretæ a et b prius quoad $u = 1$, tum quoad unitatem ex u in $U = ku$ mutatam; sitque $\frac{\nu u}{\mu} = U$ vel $\backsim U$, et pro integris ν, μ, a', b', n

$$\frac{a'u}{n} = \text{vel} \backsim a, \qquad \frac{b'u}{n} = \text{vel} \backsim b;$$

erit

$$\frac{\mu a' U}{\nu n} = \text{vel} \backsim a, \qquad \frac{\mu b' U}{\nu n} = \text{vel} \backsim b;$$

nam aut

$$U = \frac{\nu u}{\mu}$$

Hosted by Google

et tum

$$\frac{\mu U}{\nu} = u,$$

aut

$$U - \frac{\nu u}{\mu} \backsim 0,$$

et multiplicando per $\frac{\mu}{\nu}$, finito certo minus etiam

$$\frac{\mu}{\nu}\left(U - \frac{\nu u}{\mu}\right) = \frac{\mu U}{\nu} - u \backsim 0.$$

Si iam a per b quoad $u = 1$ dividendum sit, erit

$$\frac{a'u}{n} : \frac{b'u}{n} = \frac{a'}{b'} = \text{vel} \backsim \frac{a}{b};$$

et operatione quoad $U = 1$ facta quoque erit idem, nempe

$$\frac{\mu a' U}{\nu n} : \frac{\mu b' U}{\nu n} = \frac{a'}{b'} = \text{vel} \backsim \frac{a}{b},$$

(XXV, 14. pag. 89.) itaque nec eiusmodi factores, ut $\frac{a}{b}$, factum mutant.

At si factores numero m singuli quantitates concretae et homogeneae sint, ex. gr. $a, b, c, \ldots$, *atque factum quoad* $u = 1$ *sit* f, *factum quoad* $U = 1 = ku$ *sit* F; *erit*

$$f = F.k^{m-1} \quad \text{et} \quad F = \frac{f}{k^{m-1}},$$

ubi k et m quantitates abstractæ adeoque expressiones determinatæ sunt.

Unde etiam (signo $[A^m]_{u=1}$ pro quantitate A quoad $u = 1$ ad m elevatam &c.)

$$[a^m]_{u=1} = k^{m-1}[a^m]_{U=1},$$

atque

$$[a^m]_{U=1} = \frac{[a^m]_{u=1}}{k^{m-1}}.$$

Constructis tam quoad $u = 1$, quam quoad $U = 1$ schematibus patet (etsi pro $\backsim$ stet $=$):

Hosted by Google

$$n\frac{u}{n}=u=1, \qquad b'\frac{u}{n}\backsim b; \qquad n\frac{a}{n}=a, \qquad b'\frac{a}{n}\backsim ba,$$

$$n\nu\frac{U}{n\nu}=U=1, \quad b'\mu\frac{U}{n\nu}\backsim b; \quad n\nu\frac{a}{n\nu}=a, \quad b'\mu\frac{a}{n\nu}\backsim\frac{ba}{k};$$

prius factum quoad $u=1$, posterius quoad $U=1$ est; sed

$$\frac{\mu}{\nu}\backsim\frac{1}{k},$$

itaque

$$\frac{\mu b'a}{\nu n}\backsim\frac{f}{k}.$$

Si novus factor eiusmodi accedat, manifestum est, factum istud denuo per k dividi; adeoque si tres factores eiusmodi sint, exponens ipsius k erit 2, et ulterius progrediendo erit exponens apud m-tum factorem $m-1$.

Hinc etiam superius pro exponente m integro patet. At sit exponens q; erit hic aut quantitas abstracta uti $\frac{2}{3}$ aut pariter divisore $u=1$ subposito evadet $\frac{q}{u}$ determinatum; aut erit q tantum quantitas concreta, cuius expressione quoad unitatem novam mutata potentia eatenus quoque mutatur. Sit prius casus prior; dicaturque r valor, qui prodit a ad $\frac{q}{u}$ quoad $u=1$ elevato, et R valor qui fit elevatione quoad $U=ku=1$ facta; erit

$$R=r.k^{1-\frac{q}{u}}=\frac{r}{k^{\frac{q}{u}-1}},$$

et

$$r=R.k^{\frac{q}{u}-1}.$$

Sit $\frac{n}{m}=q$ (pro integris n et m), seu

$$\frac{q}{u}=\frac{n}{m};$$

inde etiam casus, quodsi $\frac{n}{m}\backsim q$, sequitur. Erit tunc:

$$[\sqrt[m]{a^n}]_{u=1}=r \quad \text{et} \quad [\sqrt[m]{a^n}]_{U=1}=R;$$

est vero

$$[a^n]_{U=1}=\frac{[a^n]_{u=1}}{k^{n-1}},$$

Hosted by Google

atque

$$[r^m]_{u=1} = [a^n]_{u=1} = k^{n-1}[a^n]_{U=1}.$$

Vero est

$$[r^m]_{U=1} = \frac{k^{n-1}}{k^{m-1}}[a^n]_{U=1} = \frac{1}{k^{m-1}}[r^m]_{u=1}$$

per præcedentia. Hinc dividendo utrinque per $\frac{k^{n-1}}{k^{m-1}}$ fit

$$\frac{k^{m-1}}{k^{n-1}}[r^m]_{U=1} = k^{m-n}[r^m]_{U=1} = [a^n]_{U=1};$$

atque radicem m gradus sumendo est

$$rk^{1-\frac{n}{m}} = \left[\sqrt[m]{a^n}\right]_{U=1} = \left[a^{\frac{n}{m}}\right]_{U=1}.$$

Consequenter

$$R = rk^{1-\frac{q}{u}} = \frac{r}{k^{\frac{q}{u}-1}},$$

et

$$r = Rk^{\frac{q}{u}-1}.$$

Si $\frac{n}{m}$ tendat ad $\frac{q}{u}$, tum

$$rk^{1-\frac{n}{m}} = \frac{rk}{k^{n:m}}$$

tendit ad

$$rk^{1-\frac{q}{u}} = \frac{rk}{k^{q:u}},$$

et tum $R = [a^{n:m}]_{U=1}$ tendit ad $[a^{q:u}]_{U=1}$.

Si vero quantitas concreta ex. gr. recta sit exponens, muteturque eius expressio mutata unitate, ut nempe si q erat $\frac{nu}{m}$, nunc sit $\frac{n\mu U}{m\nu}$

$$\text{pro } U = ku = 1, \quad \text{et} \quad k = \frac{\nu}{\mu},$$

atque ex $\frac{q}{u}$ fiat $\frac{q}{ku}$: erit quoad $U = 1$ elevando

$$[a^{\frac{q}{ku}}]_{U=1} = \left[R^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1} = \left[\left(rk^{1-\frac{q}{u}}\right)^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1}.$$

Hosted by Google

Nam quoad $U=1$ elevando est

$$R=\left[a^{\frac{q}{u}}\right]_{U=1} \quad \text{et} \quad \left[a^{\frac{q}{ku}}\right]_{U=1}=\left[\left(\left[a^{\frac{q}{u}}\right]_{U=1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1}$$

Idem patet, si $\frac{n}{m} \backsim \frac{q}{u}$ et $\frac{\nu}{\mu} \backsim k$, nempe tum $\frac{n\mu}{m\nu} \backsim \frac{q}{ku}$, et $a^{n\mu:m\nu}=a^{\frac{n}{m}:\frac{\nu}{\mu}} \backsim a^{\frac{q}{u}:k} \backsim a^{\frac{q}{ku}}$

Exempla. Sit

$$q=3^\circ, \quad u=1^\circ, \quad a=1^\circ, \quad U=\frac{1^\circ}{2};$$

erit quoad $u=1$

$$r=a^q=1^\circ,$$

et a^q quoad $U=1$ est a^6 (quoad $\frac{1^\circ}{2}=1$ facta elevatione) $=32^\circ$.

Estque (quoad $U=1$ facta elevatione)

$$R=a^3=1^\circ\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4^\circ,$$

atque $R^{\frac{1}{k}}$ id est R^2 quoad $U=\frac{1^\circ}{2}$ elevando fit æquale 32°; nempe pro $\frac{1^\circ}{2}$ æquale unitati, et factore utroque æquali $4^\circ=8$ schema est:

$$1\left[\frac{1^\circ}{2}=1\right]=1, \quad 8.1=4^\circ; \quad 1.4^\circ=4^\circ, \quad 8.4^\circ=32^\circ.$$

Ita æquatio omnium linearum secundi ordinis inferius (ubi ad repetitionem evitandam hæc citabuntur), pro coordinatis rectangulis erit

$$y^2=x-\frac{x^2}{\pm a},$$

adeoque ordinata

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{\pm a}},$$

ubi unitas, ad radicis extractionem requisita, dicitur *parameter* lineæ; a sumitur positivum, et quod ipsorum $+a$, $-a$, ponitur, dicitur *axis maior* lineæ, meditullium eius *centrum* audit, duplum ordinatæ e centro *axis minor*, et punctum abscissæ, e quo duplum ordinatæ est æquale unitati id est parametro, *focus* vocatur, ac recta e foco ad quodvis lineæ punctum *radius vector*.

Hosted by Google

Dicitur vero linea *parabola*, si $a \backsim \infty$, et ex $x - \frac{x^2}{\pm a}$ fiat (§ 32, 3.) x, *ellipsis* si ante a sit $+$, et *hyperbola* si $-$ sit.

Patebit etiam quamvis coni verticaliter producti sectionem cum plano ita exprimi posse veluti lineam, cuius æquatio superior est, quantumvis sit a, et quantavis sit unitas, nempe parameter, lineam eius e sectione plani per conum produci posse. Si a æquale est unitati, id est parametro, linea, cuius æquatio est

$$y^2 = x - \frac{x^2}{-a} = x + x^2,$$

dicitur *hyperbola aequilatera*, si vero $+a$ sit,

$$y^2 = x - x^2$$

æquatio *circuli* erit pro diametro $=$ axi maiori $= 1 =$ parametro.

Si iam manente linea et parametro, unitas alia ponatur ex. gr. radius, adeoque priore unitate u dicta, sit nova unitas $U = ku = \frac{1}{2}u$; et quæratur pro eadem abscissa x eiusdem ordinatæ y expressio quoad U; erit idem

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} . \sqrt{2}$$

(operatione quoad $U = 1$ facta) seu:

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \sqrt{2x - x^2}$$

(quoad radium æqualem unitati, sed qui iam parameter non est, æquatione mutata).

Quod $\sqrt{x - x^2}$ quoad $u = 1$ in dictam mutetur, patet e præcedentibus; nam recta x manet æquale x, utcunque mutetur unitas, at ex x^2 (quoad u) fit $\frac{x^2}{2}$ (quoad $U = \frac{1}{2}u = 1$); radix secundi gradus quoad $U = 1$ vero, nempe R multiplicari per

$$k^{\frac{q}{u} - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} - 1} = \sqrt{2}$$

debet (per antea dicta).

Hosted by Google

Ita si quinta pars diametri ponatur $=1$, idem y pro eodem x erit $\sqrt{5x-x^2}$ (operatione quoad $U=\frac{1}{5}u=1$ facta).

Pro abscissis in hyperbola æquilatera ad asymptotam sumtis, et ordinatis ad asymptotam alteram parallelis, est

$$y=\frac{q^2}{x}=q.\frac{q}{x}$$

(per q intelligendo ordinatam e vertice hyperbolæ): patet vero $q.\frac{q}{x}$ (per dicta) pro quavis unitate manere, itaque $q=1$ poni potest; quo pacto (ut suo loco dicetur), erit area quævis inter asymptotam et y, hyperbolam et q *logarithmus* (*naturalis* dictus) abscissæ e centro acceptæ.

Interim altera quæstio est, quanta fiat ordinata pro eadem abscissa et alio parametro? Erat pro parabola:

$$y=[x^{\frac{1}{2}}]_{u=1};$$

eritque

$$Y=[x^{\frac{1}{2}}]_{U=ku=1}=$$

$$=k^{\frac{1}{2}}[x^{\frac{1}{2}}]_{u=1};$$

nempe ordinatæ pro eadem abscissa in diversis parabolis sunt, uti radices quadratæ parametrorum; (in eadem vero secundæ potentiæ ordinatarum sunt, uti abscissæ).

Logarithmus etiam quantitatis concretae P quoad unitatem ex u in $U=ku=1$ mutatam reperiri potest. Quivis logarithmus est quoad certam basim et certam unitatem; atque dum ex

$$\alpha^z=P$$

concluditur (pag. 111.)

$$z\log.\alpha=\log.P,$$

intelligitur pro basi a et $u=1$ esse

$$[a^y]_{u=1}=\alpha,$$

atque

$$[\alpha^z]_{u=1}=P;$$

Hosted by Google

adeoque

$$zy = z \log. \alpha$$

(quoad basim a et $u = 1$)

$$= \log. P.$$

Sit

$$[a^p]_{u=1} = P,$$

erit

$$p = \log. P \quad \text{quoad basim } a \text{ et } u = 1.$$

Sit quantitas abstracta k, et

$$\left[\left(\frac{a}{ku} . u\right)^x\right]_{u=1} = \left(\frac{P}{ku}\right) u,$$

erit

$$x \log. \left(\frac{a}{ku} . u\right) = \log. \frac{P}{ku} . u,$$

seu

$$x (\log. a - \log. ku) = \log. P - \log. ku$$
$$= x (1 - \log. ku),$$

quia $\log. a = 1$ (XXX. 1. pag. 109); hinc

$$x = \frac{\log. P - \log. ku}{u - \log. ku}$$

(omnia quoad basim a et $u = 1$ intelligendo); eritque $\frac{au}{ku}$ quoad $u = 1$ elevatum ad x æquale $\frac{P}{ku} u$; atque tum etiam $\frac{a}{ku}$ U quoad $U = 1$ elevatum ad x erit æquale $\frac{P}{ku} . U$ (ut statim patebit). Est vero

$$\frac{a}{ku} . U = a, \quad \text{et} \quad \frac{P}{ku} . U = P \text{ (pro } U = ku).$$

Consequenter $[a^x]_{U=1} = P$.

Sit nempe (pro casu commensurabilitatis, unde per superiora generaliter patet)

$$k = \frac{\nu}{\mu}, \quad a = \frac{a'u}{N}, \quad P = \frac{P'u}{N}, \quad \text{et} \quad x = \frac{n}{m},$$

(denotantibus a', N, P', ν, μ, n, m integros); erit

Hosted by Google

$$\frac{a}{ku} = \frac{a'u}{N} : \frac{\nu u}{\mu} = \frac{a'\mu}{N\nu};$$

adeoque si

$$\left(\frac{a}{ku}.u\right)^x = \frac{P}{ku}.u,$$

erit

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu}u\right)^n = \left(\frac{P'\mu}{N\nu}u\right)^m,$$

seu

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu}\right)^n.u = \left(\frac{P'\mu}{N\nu}\right)^m.u;$$

nempe pro $n = 2$ fieret schema:

$$\frac{N\nu.u}{N\nu} = u = 1, \quad \frac{a'\mu.u}{N\nu} = \frac{a}{ku}.u, \quad \frac{N\nu.a'\mu u}{N\nu.N\nu} = \frac{a'\mu}{N\nu}.u$$

et factum est

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu}\right)^2 u.$$

Pariter patet schema idem manere, nonnisi $U = 1$ in locum ipsius u posito, ut sit

$$N\nu\frac{U}{N\nu} = U = 1.$$

Est hinc

$$\left[\frac{a'\mu}{N\nu}U\right]^n_{U=1} = \left[\frac{P'\mu}{N\nu}U\right]^m_{U=1},$$

adeoque

$$\left[\frac{a'\mu}{N\nu}U\right]^{\frac{n}{m}}_{U=1} = \frac{P'\mu}{N\nu}U,$$

id est

$$\left[\frac{a}{ku}U\right]^x_{U=1} = \frac{P}{ku}U.$$

Ex. gr. Sit prius

$$u = 1, \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{10}, \quad a = 10u, \quad P = 100u;$$

erit

$$a^2 = 100u = P,$$

atque (pro $u = 1$ et basi a)

$$\log. P = 2u,$$

Hosted by Google

$$\log. ku = 0 - (\log. 10)\, u = -1\, u,$$

quia

$$\log. a = 1\,;$$

adeoque

$$\frac{\log. P - \log. ku}{1.\, u - \log. ku} = \frac{2\, u - (-1\, u)}{1\, u - (-1\, u)} = \frac{3\, u}{2\, u},$$

est vero

$$[a^{\frac{3}{2}}]_{U=1} = \sqrt{1\,000\,000}\, U = 1000\, U =$$
$$= 100\, u = P.$$

XXXII. Si quodvis a ut radix secunda ex aliquo $\pm B$ spectetur, *realitas ipsius* a, prouti quoad $+1$ vel -1 multiplicatum per se producat $\pm B$, *multiplicationi quoad* $+1$ *vel* -1 *innixa* dicitur, et ob determinationem hanc, (uti positiva et negativa in § 10.) nova oriuntur nomina. Nempe unitas (pag. 37.) arbitrarie positiva accipitur et $\sqrt{-4}$ nonnisi propter multiplicationem huic hypothesi innixam caret realitate; quidsi unitas negativa poneretur? manifesto (ut p. 42.) signa æqualia darent —, et inæqualia darent +. Sit igitur fas, ea, quorum realitas multiplicationi quoad $+1$ innititur, *realia quoad* $+1$ (breviter *realia*), illa vero, quorum realitas multiplicationi quoad -1 innixa est, *realia quoad* -1, sive *pure imaginaria* dicere. ($\sqrt{-a}$ potest reale esse, si a denotet ex. gr. -4.) Insigniantur realia quoad -1 litera i postposita vel anteposita; ex. gr. $\sqrt{-4} = \pm 2i$, $\sqrt{4} = \pm 2$; *atque realia quoad* -1 *seorsim addita, cum summa realium quoad* $+1$ *connexa non commixta efficiant summam* (pag. 31); ex. gr. $2i + 1 - 3i = 1 - 1i$. Dicitur hoc (latius) *imaginarium*.

Quantitates imaginarias et fractos exponentes *Des Cartes** introduxit, eoque plurimum ad generalitatem elegantiamque contulit, campumque ad nova invenienda patefecit. Quem in finem, ut operationes sub velo generalitatis continuari queant, nec, in quantum fieri potest, generalitas exui

* Cartesio nimium tribuitur; nescio quomodo mihi tanquam certo genio eius conveniens inhæserat, quod nuper eum revolvens, haud reperi; quanquam sequentibus verbis pulchris præfationem suæ Geometriæ claudat: ‚Spero posteris mihi gratiam habitum iri, non solum pro iis, quæ hic explicui, sed etiam pro iis, quæ consulto omisi, quo ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem.'

Montucla refert Wallisium prius exponentem integrum negativum introduxisse; sed opera eius hic non habentur; quicunque introduxerit et fractos imaginariaque primus, adsunt, et (ut numeratione) grati iis utimur. (Annotatio autoris, ed. or. t. I. Errata pag. XXXVII.)

Hosted by Google

debeat, sequentes regulæ ponuntur multiplicationis quoque conceptu eatenus extenso (p. 42.) Manent quidem etiam alioquin casus generalitatis exuendæ, ubi nempe (aliis verbis) generalitas non perfecta sed cum exceptione certa est; ex. gr. ex eo, quod $ba=ca$, non sequitur pro quibusvis valoribus, esse $b=c$; si nempe $a=0$, $b=2$, $c=3$ (p. 45.).

1. Pro duobus eiusmodi factoribus, quorum neuter est summa e reali quoad $+1$ et reali quoad -1, multiplicatio tunc et nonnisi tunc instituatur quoad -1, si uterque factor quoad -1 realis sit; adeoque si alteruter quoad $+1$ realis sit, multiplicatio quoad $+1$ fiat. Ex. gr. $2.3i=6i$.

2. *Determinatio quoad realitatem* facti et multiplicandi eadem vel diversa sit, prouti multiplicatoris et unitatis eadem vel diversa est (ad instar legis determinationum positivorum et negativorum pag. 42.).

$$\sqrt{-9}.\sqrt{-9}=\pm 3i.\pm 3i=-3^2,$$

juxta schema

$$-1,\quad \pm 3i;\quad \pm 3i,\quad -3.3.$$

Accipi vero aut ubique $+3i$ debet, aut ubique $-3i$, quod de aliis quoque imaginibus æqualibus tenendum est; at $\sqrt{4}\sqrt{9}$ potest esse ± 2.3.

3. Unde si in facto occurrat $\sqrt{-1}$ ut factor pluries, pro quovis pari numero factorum $\sqrt{-1}$ ponatur -1, et quod hoc pacto manet aut prodit, illud per factum cœfficientium multiplicatum accipiatur pro facto. Si non alius cœfficiens adsit, pro tali reputetur $+1$ ipsius $\sqrt{-1}$ et -1 ipsius $-\sqrt{-1}$. Quivis factor vero ita expressus cogitetur (quod fieri posse patebit), ut radicis ex -1 nullibi binario altior exponens sit.

Hinc

$$-\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=+1.$$

Regula tertia ex duobus prioribus fluit.

Atque iam hoc pacto dicitur F factum expressionum E et e (absque eo, ut mentio multiplicationis respectivæ quoad $+1$ aut -1 fieret), si pro quovis valore $Q'+Qi$ ipsius E et pro quovis valore $q'+qi$ ipsius e gaudeat F valore tali, qui sit æqualis summæ omnis cuiusvis ipsorum

Hosted by Google

Q' et Qi per quodvis ipsorum q' et qi iuxta regulas plane præscriptas multiplicatorum; nec F alium valorem habeat. *Quo conceptus multiplicationis* (§ 26.) *extenditur*, fitque generalis primitivum conceptum continens.

Si quivis terminus quantitatis complexæ C per quemvis alterius c iuxta regulas dictas multiplicetur, demonstrabitur factorum partialium summam esse facto ex C et c æqualem.

Expressionum multarum plures valores dantur: quamobrem æqualitatis earum casus strictius determinandus est.

$\sqrt{1}$ habet duos valores, nempe

$$+1 \quad \text{et} \quad -1;$$

ita $\sqrt[3]{1}$ habet tres valores, nempe

$$1 \text{ et } \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{atque} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

seu si radix positiva ex 3 dicatur α, erunt valores

$$1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}i \quad \text{ac} \quad -\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}i,$$

quorum quivis per regulas dictas ad 3 elevatas dat 1, ut statim patebit.

Ita pro integro m et

$$x^m \pm 1 = 0 \quad \text{seu} \quad x^m = \mp 1, \quad \text{seu} \quad x = \sqrt[m]{\mp 1}$$

totidem nec plures valores dari dicetur, quorum quilibet ipsi x salva æquatione substitui potest, uti in

$$x^3 - 1 = 0$$

quilibet valorum trium dictorum. Ita duæ valores sunt (nempe 2 et 3), quorum quivis in

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

in locum ipsius x positus valorem expressionis ad 0 reducit; ubi notandum, quod si dicatur, quantitatem aliquam $Q = 2$ talem esse, cuius quintuplum secundam potentiam senario superet, minime asseratur quidvis,

Hosted by Google

quod tale est, ipsi Q æquale esse. Potest autem $z \Subset y$, aut $y \Supset z$ denotare, cuivis valori ipsius z dari valorem ipsius y æqualem; $z \Subset\Supset q$ vero potest significare, cuivis valori cuiusvis ipsorum z, q dari valorem alterius æqualem.

Ex. gr.

$$\sqrt{1} \Subset \sqrt[4]{1},$$

ita

$$1^{\frac{1}{2}} \Subset 1^{\frac{1}{4}}, \quad \text{sed} \quad 1^{\frac{1}{2}} \quad \text{non} \quad \Supset 1^{\frac{1}{4}};$$

nam $\sqrt{1}$ habet duos valores 1 et -1, $\sqrt[4]{1}$ vero habet 4 valores nempe ± 1, et $\pm\sqrt{-1}$.

Interim inde, quod $x \Subset y$ et $z \Subset y$, non sequitur, dari ullum valorem ipsius x valori ulli ipsius z æqualem; possunt enim valores ipsius z plane illis valoribus ipsius y æquales esse, quos y præter valores valoribus ipsius x æquales (D p. 15.) habet; sed si $x \Subset y \Subset z$, tum $x \Subset z$. E contextu etsi aliud signum haud adoptetur, quo sensu veniat $=$ perspici potest.

Radix realis positiva insigniatur stellula sub $\sqrt{}$ posita.

1. Estque $\sqrt{-4} = \underset{*}{\sqrt{4}} . \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i$ nam $2 . \pm 1i = \pm 2i$, (per schema $1, \pm 1i$; $2, \pm 2i$, vel $1, 2$; $\pm 1i, \pm 2i$), patet per 1. et 2., e quo fluit 3. pag. 122. Nempe per schemata $(\pm 1i)^{2n}$ pro n pari est $+1$, pro impari est -1, ac $(\pm 1i)^{2n} . \pm 1i$ pro n pari est $\pm 1i$, pro n impari $\mp 1i$. Sit factum f e factoribus realibus, hoc accedentibus quotvis factoribus $\sqrt{-1}$ manet, nisi quod si unus tantum sit (ubivis), in $\pm fi$, per adhuc unum in $-f$, tum in $\mp fi$, dein in $\pm f$ varietur &c.

$$\sqrt{-4} . \sqrt{-9} \Supset \sqrt{4} . \sqrt{-1} . \sqrt{9} . \sqrt{-1} = -1 . \sqrt{4 . 9} = \mp 6,$$

quia

$$\sqrt{4 . 9} = \pm 6, \quad \text{et} \quad -1 . \pm 6 = \mp 6.$$

$$\sqrt{-4} . \underset{*}{\sqrt{9}} = \sqrt{4} . \sqrt{-1} . \underset{*}{\sqrt{9}} = \sqrt{4 . 9} . \sqrt{-1} = \pm 6i.$$

Imo si $a = -4$ sit, etiam tum

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} = \sqrt{-4}\sqrt{-1} = \pm \underset{*}{\sqrt{4}} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \mp \underset{*}{\sqrt{4}}.$$

Unde a, b qualiavis realia denotent est $\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; atque de quotvis ad uno plura concludere fas est.

Hosted by Google

2. Sed valet idem etiam generaliter: nempe denotante P positivum, exprimitur radix imaginaria ex P generaliter (pro integro n) per $\sqrt[2n]{-P}$; atque $\sqrt[2n]{-P} = \sqrt[2n]{P}.\sqrt[2n]{-1}$. Potest enim *quivis valor ipsius* $\sqrt[2n]{-1}$ per $a + b\sqrt{-1}$ *exprimi, denotantibus* a, b *realia (haud excluso* 0*)*; quod breviter huc adnectere fas sit (post Trigonometriam facile intelligendum).

Est

$$(\cos.\ a + \sqrt{-1}\sin. a)^2 = (\cos. a)^2 + 2\cos. a \sin. a\sqrt{-1} - (\sin. a)^2 =$$
$$= \cos. 2a + \sqrt{-1}\sin. 2a;$$

atque si

$$\cos. ma + \sqrt{-1}\sin. ma$$

per

$$\cos. a + \sqrt{-1}\sin. a$$

multiplicetur, fit

$$\cos. ma . \cos. a + \sqrt{-1}(\sin. ma . \cos. a + \cos. ma . \sin. a) - \sin. ma . \sin. a =$$
$$= \cos. (m+1)a + \sqrt{-1}\sin. (m+1)a,$$

seu (pro quovis integro n)

$$\cos. \alpha + \sqrt{-1}\sin. \alpha = \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin. \frac{\alpha}{n}\right)^n;$$

$\left(\text{nam } \alpha = \frac{n.\alpha}{n}\right)$.

Ponatur iam prius

$$1 = \cos. \alpha + \sqrt{-1}\sin. \alpha;$$

fieri hoc potest, si $\sin. \alpha = 0$ et $\cos. \alpha = 1$, quod fit, si $\alpha = \mu . 2\pi$ (pro ntegro μ, haud excluso 0, et π æquali dimidiæ peripheriæ pro radio 1).

Substituendo itaque ipsi μ integros $0, 1, 2, \ldots, n-1$, exhibebit

$$\cos. \frac{2\mu\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin. \frac{2\mu\pi}{n}$$

radices n-ti gradus ipsius 1, numero n.

Ita poni potest

$$-1 = \cos. \alpha + \sqrt{-1}\sin. \alpha,$$

pro $\cos. \alpha = -1$ et $\sin. \alpha = 0$, quod fit pro

$$\alpha = 2\mu\pi + \pi,$$

Hosted by Google

adeoque substituendo ipsi μ hic quoque $0, 1, 2, \ldots, n-1$, prodibunt ipsius -1 radices gradus n-ti numero n; erunt vero manifesto duæ tantum radices ipsius 1 reales pro n pari, et una pro n impari, ipsius -1 vero una realis pro n impari, omnes aliæ radices vero ipsius ± 1 erunt sub formam dictam $a + b\sqrt{-1}$ venientes; nam terminus prior in expressione utraque realis est, alter vero factum e reali in $\sqrt{-1}$ est.

Nulla vero est radicum dictarum ipsius ± 1 ulli alii earundem plane æqualis, quamvis in paria (a signis abstrahendo æqualia) dispesci possint. Sit nimirum n prius par, ex. gr. 6, tum sit impar, ex. gr. 5; erit $\frac{\alpha}{n}$ pro casu primo

$$0, \frac{1}{6}2\pi, \quad \frac{2}{6}2\pi, \quad \frac{3}{6}2\pi, \quad \frac{4}{6}2\pi, \quad \frac{5}{6}2\pi;$$

pro secundo vero

$$0, \frac{1}{5}2\pi, \quad \frac{2}{5}2\pi, \quad \frac{3}{5}2\pi, \quad \frac{4}{5}2\pi;$$

in casu primo est $n - 1 = 5$, atque

$$\frac{5}{6}2\pi + \frac{1}{6}2\pi = 2\pi,$$

ita

$$\frac{4}{6}2\pi + \frac{2}{6}2\pi = 2\pi;$$

et ita si numerus par n quantusvis esset, a dictis extremis æquidistantium summa est toti peripheriæ æqualis, usque quo ad medium perveniatur, (uti hic $\frac{3}{6}2\pi$ est) qui semper $= \pi$ est. Si n impar sit quoque, idem est, præterquam quod ibi medius non detur. Sunt vero (in Trigonometria) sinus arcuum, quorum summa est æqualis toti peripheriæ, oppositi (alioquin æquales); ita $\cos. 0 = 1$ et $\cos. \pi = -1$, in casu primo sunt oppositi; et in omni casu arcu a 0 ultra π crescente, utrinque æquidistantes efficere 2π facile patet, adeoque manifestum est omnes radices differre. Plures vero esse nequeunt, nam infra probabitur x, ut $x^n + \beta = 0$ sit, nonnisi n valores habere.

Exempla. Pro $n = 3$, et $r = \sqrt[*]{3}$, adeoque $\sqrt{-3} = \sqrt[*]{3} \cdot \sqrt{-1} = \pm ri$ erunt valores ipsius $\sqrt[3]{1}$ sequentes:

Hosted by Google

$$1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ri, \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ri,$$

quorum quivis iuxta datas regulas multiplicando elevatus producit 1.

Valores ipsius $\sqrt[3]{-1}$ vero sunt:

$$-1, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}ri, \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}ri.$$

Ita valores ipsius $\sqrt[4]{1}$ sunt:

$$1, \ -1, \ +\sqrt{-1}, \ -\sqrt{-1}, \text{ id est } \pm 1 \text{ et } \pm 1\,i.$$

Valores ipsius $\sqrt[4]{-1}$ autem sunt:

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}.$$

Pro quovis integro n sinus cosinusque adeoque radices approximando (quam proxime) exhiberi possunt.

Hinc si $\sqrt[m]{P}$ *sit* p, *quivis valor ipsius* $\sqrt[m]{-P}$ *per*

$$p(a+b\sqrt{-1})$$

exprimi poterit, pro a, b, *realia juxta praecedentia talia denotantibus, ut sit*

$$(a+b\sqrt{-1})^m=-1.$$

Erit enim

$$[p(a+b\sqrt{-1})]^m=p^m(a+b\sqrt{-1})^m=P.-1=-P.$$

Namque

$$p^2(a+b\sqrt{-1})^2=(ap+bp\sqrt{-1})^2,$$

peracto calculo patet. Si vero de μ-ta potentia valet, de $(\mu+1)$-ta quoque valet: nempe tum

$$p^\mu(a+b\sqrt{-1})^\mu=(ap+bp\sqrt{-1})^\mu,$$

seu brevius

$$p^\mu(A+B\sqrt{-1})=A'p^\mu+B'p^\mu\sqrt{-1};$$

Hosted by Google

nimirum $(a+b\sqrt{-1})^{\mu}$ manifesto nonnisi e factoribus a, b, $\sqrt{-1}$ coaluit, ubi $\sqrt{-1}$ in nullo termino ut factor bis manet per 3. pag. 122.; adest præterea p in quovis termino; et quovis per quemvis multiplicato, exponens ipsius p (prius æqualis exponenti elevationis 2) semper uno crescit simul cum hoc. Unde etiam patet

$$A+B\sqrt{-1}=A'+B'\sqrt{-1}$$

esse, adeoque reale æquale reali, et imaginarium imaginario; et hinc

$$A=A', \quad \text{et} \quad B=B'$$

Consequenter etiam

$$p^{\mu+1}(A+B\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})=(A'p^{\mu}+B'p^{\mu}\sqrt{-1})(ap+bp\sqrt{-1});$$

seu

$$p^{\mu+1}(Aa+Ab\sqrt{-1}+Ba\sqrt{-1}-Bb)=$$
$$=p^{\mu+1}A'a+p^{\mu+1}A'b\sqrt{-1}+p^{\mu+1}B'a\sqrt{-1}-p^{\mu+1}B'b.$$

Est igitur etiam

$$(p\sqrt[m]{-1})^m=-P$$

et

$$\sqrt[m]{-P}=\underset{*}{\sqrt[m]{P}}.\sqrt[m]{-1}.$$

Ita

$$\sqrt[m]{-P}.\sqrt[m]{Q}=\underset{*}{\sqrt[m]{P}}.\sqrt[m]{-1}.\sqrt[m]{Q}=\sqrt[m]{-PQ}.$$

Nam si

$$\underset{*}{\sqrt[m]{P}}.\sqrt[m]{-1} \quad \text{per} \quad a+b\sqrt{-1}$$

et

$$\sqrt[m]{Q} \quad \text{per} \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

exprimi possit; erit:

$$(a+b\sqrt{-1})^m(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m=(a\alpha+b\alpha\sqrt{-1}+a\beta\sqrt{-1}-b\beta)^m.$$

Est enim hoc manifestum pro $m=2$ peracto calculo; valetque de quovis exponente $\mu+1$, si de μ valet. Sit enim

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu}=A+B\sqrt{-1},$$

Hosted by Google

et

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}=A'+B'\sqrt{-1},$$

atque

$$[(a+b\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1})]^{\mu}=A''+B''\sqrt{-1},$$

(patet nempe in elevatione ista, ut supra, præter reale nonnisi tale manere, cuius unus factor realis, alter $\sqrt{-1}$ est). Erit (per hyp.)

$$AA'+AB'\sqrt{-1}+A'B\sqrt{-1}-BB'=A''+B''\sqrt{-1};$$

adeoque partes reales, uti partes imaginariæ utrinque æquales erunt; nempe

$$AA'-BB'=A''; \quad A'B+AB'=B''.$$

Multiplicetur iam $A+B\sqrt{-1}$ per $a+b\sqrt{-1}$, ut prodeat

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu+1},$$

et multiplicetur $A'+B'\sqrt{-1}$ per $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ut prodeat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu+1},$$

ac multiplicentur hæc duo facta in se invicem; atque multiplicetur etiam

$$A''+B''\sqrt{-1} \quad \text{per} \quad (a+b\sqrt{-1})(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

ut prodeat huius potentia $(\mu+1)$-ta; et substituantur ipsis A'', B'' valores supradicti; calculo peracto, terminos terminis singillatim æquales esse patebit.

Potest vero de quotvis ad uno plura pariter concludi, ut

$$\sqrt[n]{A}\,\sqrt[n]{B}\,\sqrt[n]{C}\ldots=\sqrt[n]{ABC\ldots}$$

sit (etsi imaginaria adfuerint).

Patet vero $\sqrt[m]{-P}\,\sqrt[m]{Q}$ esse $=\sqrt[m]{-PQ}$.

Nam $\sqrt[m]{-PQ}$ habet m valores;

$$\sqrt[m]{-P} \quad \text{seu} \quad \underset{*}{\sqrt[m]{P}}\sqrt[m]{-1}$$

Hosted by Google

item m valores habet, qui per quemvis valorem x ipsius $\sqrt[m]{Q}$ multiplicati dant m valores, quorum quivis ad m elevatus $= -PQ$; neque si per aliud x fiat multiplicatio, ullus alius valor prodire potest, quia tum $-PQ$ plures numero m radices haberet. Aliud est, si id tantum constet, esse $z = \sqrt[m]{P}$, et $y = \sqrt[m]{Q}$, tum sequitur tantum $zy = \sqrt[m]{PQ}$.

3. *Atque porro si*

$$\sqrt[m]{a} = x,$$

est

$$x^m = a,$$

adeoque

$$x^{mn} = a^n;$$

consequenter

$$x = \quad \textit{sed non} \quad = \sqrt[mn]{a^n};$$

nam x^m ponitur n-ies ut factor in a^n (id est n-ies posito a), et x ipsum ponitur mn-ies; adeoque x adest inter valores ipsius $\sqrt[mn]{a^n}$, sed hoc habet valores numero mn, x vero nonnisi m valores habet. Patet etiam esse $x = \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}$; ita $x^n = \sqrt[m]{a^n}$, adeoque

$$x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}$$

$$= \sqrt[mn]{a^n}.$$

Unde

$$\sqrt[2.5]{-1} = \sqrt{-1},$$

nempe $\sqrt{\sqrt[5]{-1}}$ unum valorem $\sqrt{-1}$ æqualem habet.

Ita $\sqrt{-1}$ seu $(-1)^{\frac{1}{2}} =$ sed non $= (-1)^{\frac{2}{4}}$ seu $\sqrt[4]{1}$; valores nimirum ipsius $\sqrt{-1}$ sunt $+1i$, $-1i$, qui inter ipsius $(-1)^{\frac{2}{4}}$ quatuor valores

$$1, \ -1, \ +1i, \ -1i$$

adsunt; sed hic præter illos duo adhuc sunt. Non tamen hoc pacto reale ex imaginario fiet; neque enim scribitur $(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}}$, uti nec $1^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{2}{4}}$ scribi potest; sed scribitur tantum $(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}}$.

4. Quoad elevationem imaginariorum, quæstio ad $\sqrt[2n]{-1}$ redit. Est $2n$ aut potentia ipsius 2 integra, aut factum e tali et numero impari; nempe si non formæ $2.2\ldots2$ est, aliquem factorem imparem esse oportet.

Hosted by Google

$\sqrt[2^p]{-1}$ nonnisi ad $m.2^p$ elevatum dat reale, et quidem $+1$ pro m pari, -1 pro m impari.

Nam $\sqrt[2^p]{-1}$ est ipsum -1 præposito p-ies signo $\sqrt{}$; elevatur hoc ad 2, delebitur unum $\sqrt{}$, et si quid maneat, item ad 2 elevato, item unum $\sqrt{}$ delebitur: atque demum omnia $\sqrt{}$ (quæ numero p sunt) nonnisi operatione p-ies facta delebuntur, prodibitque -1; est vero tum tota prior expressio ad 2^p elevata. Si vero idem ad 2^p+1 elevetur, prodibit $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^1$, si ad 2^p+2 elevetur, fiet $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^2$, et ita porro dum ad 2^p+2^p elevatum fit $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^{2^p}=-1.-1=+1$. Ita elevando ad 3.2^p prodit $-1.-1.-1=-1$; atque continuando alternatim prodeunt -1 et $+1$, prouti cœfficiens ipsius 2^p impar aut par erit; pro aliis exponentibus elevationis autem signum $\sqrt{}$ cum exponente pari ex -1 haud delebitur.

Si vero m sit impar; tum

$$\sqrt[m2^p]{-1}=\sqrt[2^p]{\sqrt[m]{-1}}=\sqrt[2^p]{-1},$$

nam unus valor ipsius $\sqrt[m]{-1}$ est -1, adeoque si $\sqrt[m2^p]{-1}$ ad 2^p elevetur, gaudebit uno valore reali.

Ex. gr. $(\sqrt[2]{-1})^2=-1$; $(\sqrt[2^2]{-1})^2=\left(\sqrt{\sqrt{-1}}\right)^2=\sqrt{-1}$; $\sqrt[3.2]{-1}=\sqrt{-1}$, adeoque $(\sqrt[3.2]{-1})^2=-1$; $(\sqrt[2^3]{-1})^2=\left(\sqrt{\sqrt[4]{-1}}\right)^2=\sqrt[4]{-1}$; $(\sqrt[5.2]{-1})^2=-1$ et ita porro exponenti radicali semper binarium addendo et elevando ad 2, alternatim prodibunt imaginarium et unus valor realis.

5. *Etiamsi $p, q, r, \ldots$ potentiae integrae fuerint ipsius 2, et*

$$p<q<r<\ldots$$

adeoque

$$q=p'p, \quad r=q'q, \ldots$$

($p', q', \ldots$ potentias integras ipsius 2 denotantibus):

$$\sqrt[p]{-1}.\sqrt[q]{-1}.\sqrt[r]{-1}\ldots$$

nullum reale dare potest.

Hosted by Google

Sit enim

$$\sqrt[p]{-1}.\sqrt[pp']{-1}=x;$$

erit

$$x^p=-1.\sqrt[p']{-1};$$

nam

$$x^p=(\sqrt[p]{-1}.\sqrt[p]{\sqrt[p']{-1}})^p$$

$$=(\sqrt[p]{-1})^p.(\sqrt[p]{\sqrt[p']{-1}})^p.$$

Est porro

$$(x^p)^{p'}=x^{pp'}=(-1.\sqrt[p']{-1})^p$$

$$=(-1)^{p'}.-1$$

$$=+1.-1$$

$$=-1,$$

(nam p' est numerus par); itaque

$$x=\sqrt[pp']{-1}$$

est imaginarium; nam pp' est par.

Si vero de binis factoribus valet, valet de tribus, et ita de quotvis ad uno plures ascendere licet. Si enim novus $\sqrt[r]{-1}$ accedat, erit (substituendo)

$$x\sqrt[r]{-1}=\sqrt[pp']{-1}.\sqrt[pp'q']{-1};$$

sit hoc y;
erit

$$y^{pp'}=-1.\sqrt[q']{-1}$$

et elevando ad q' erit

$$y^{pp'q'}=+1.-1=-1,$$

atque

$$y=\sqrt[pp'q']{-1}$$

item imaginarium est.

6. *Radices ipsius* -1 *exponentis* 2^n (pro quovis integro n) *eaedem quidem cum iis, quas formula superior pro hoc exponente dat, sed alia via formaque prodeunt.*

Paulo inferius tradita æquatione quadratica facile perspici potest. Occurrunt nempe expressiones formæ

Hosted by Google

$$\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

quod simplicius redditur modo sequenti (et ad repetitionem evitandam post æquationem quadraticam citabitur).

Si ponatur

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{z},$$

atque

$$a=x+z;$$

demonstrabitur tam x quam z habere valorem, ut substituendo æquationi utrique satisfiat; valores quoque statim proditurus tales esse patebit.

E prima æquatione sequitur (elevando ad 2)

$$a+\sqrt{b}=x+z+2\sqrt{xz},$$

et substituendo $a=x+z$, fiet

$$\sqrt{b}=2\sqrt{xz},$$

et hinc

$$b=4xz,$$

et hinc (quia $a=x+z$)

$$x=a-z=\frac{b}{4z};$$

unde

$$b=4az-4z^2;$$

et hinc

$$z^2-az+\frac{b}{4}=0,$$

adeoque

$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{b}{4}}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

atque cum $x=a-z$ sit, $\sqrt{x}+\sqrt{z}$ quoque datur.

Applicatur hoc pro scopo præsenti sic:

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{0+\sqrt{-1}},$$

ubi

$$a=0, \quad \text{et} \quad b=-1;$$

Hosted by Google

adeoque

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}=\frac{1}{2}=z,$$

et

$$x=a-z=-\frac{1}{2},$$

atque

$$\sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{-\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt[4]{-1};$$

ita $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}$ hoc pacto prodit

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}+\sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}=\sqrt[2^3]{-1}.$$

Unde si ulterius quoque continuetur, lex formationis perspicitur facile demonstranda. Erit

$$\sqrt[2^4]{-1}=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}+\sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}};$$

Nimirum quævis radix exponentis 2^n ex -1, constat ex duobus terminis alioquin æqualibus per $+$ connexis, præterquam quod posteriori adnectitur ut factor $\sqrt{-1}$, atque post illud $\frac{1}{2}$ quod primum signum $\sqrt{}$ excipit, in priore termino signum $+$, in posteriore signum $-$ est; semper autem dum uno altius ascenditur, in utroque termino, ultimo $\frac{1}{2}$, additur $+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, post quodvis signum novum $\sqrt{}$ (præter ultimum) in quovis terminorum, (prioris posteriorisve) parenthesi nova interius posita; ita ut in $\sqrt[2^n]{-1}$ sint in quovis amborum terminorum signa $\sqrt{}$ (excepto factore $\sqrt{-1}$) numero $n-1$; nempe pro $n=2$ est 1, et semper dum n uno crescit, unum novum signum $\sqrt{}$ in utroque accedit. Notandum vero est quodvis $\sqrt{}$ duos valores habere, quorum quemvis accipere licet, et nonnisi tunc valores æquales accipiendos esse, si æqualibus imaginibus præfixa sint. Ex. gr. in ultima expressione pro exponente 2^4, (pro quo 16 valores sunt), $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$ habet 4 valores, nam uterque valor ipsius $\sqrt{\frac{1}{2}}$ combinatur cum utroque valore signi $\sqrt{}$ prioris; at pro quovis casu valor

Hosted by Google

iste in termino priore et posteriore, ubi signo contrario afficitur, idem esse debet; interim in termino priore signum primum $\sqrt{}$ numerum valorum item per 2 multiplicat, et numerum hunc item duo signa $\sqrt{}$ in posteriore item per 2 multiplicant; ut numerus valorum fiat $2.2.2.2 = 16$.

Facile vero patet, quod si formula dicta pro $\sqrt[2^n]{-1}$ elevetur ad 2, ut prodeat $\sqrt[2^{n-1}]{-1}$, deleatur in termino utroque ad lævam unum signum $\sqrt{}$ (ut statim ostendetur), operatione eadem secunda deleatur item unum $\sqrt{}$ in utroque ad lævam; et ita porro, donec $(n-2)$-ta operatione $n-2$ signis $\sqrt{}$ deletis, maneat

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1},$$

quo item ad 2 elevato prodit $\sqrt{-1}$, et hoc ad 2 elevato, operatione n-ta demum prodit -1.

Si nempe u nominetur generaliter quod post secundum signum $\sqrt{}$ in primo termino est; erit formula sequens:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{u}} + \sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{u}};$$

et hoc ad 2 elevatum est

$$\sqrt{u} + 2\sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}u} = \sqrt{u} + \sqrt{-1}\,\sqrt{1-u}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}} + \sqrt{-1}\,\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}}$$

quia

$$u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}\,.$$

Ubi patet unum signum radicale ad lævam in utroque termino deleri, exponente ipsius 2 in signo radicali unitate imminuto; nempe ex $\sqrt[2^n]{-1}$ facto $\sqrt[2^{n-1}]{-1}$ et ita porro, donec operatione n-ies facta, -1 prodeat.

7. Radix igitur cuiusvis exponentis paris m e quocunque negativo etiam, sub formam $a + b\sqrt{-1}$ venit (p. 125.); sed quæritur num summa

Hosted by Google

quantitatum, quæ sub hanc formam veniunt, aut hæc per reale, aut per eiusdem formæ quantitatem multiplicata aut divisa, imo etiam $(a+b\sqrt{-1})^q$ sub eandem formam veniat? Quamobrem de quantitatum complexarum, quæ terminis talibus quoque gaudere possunt, additione, subtractione, multiplicatione et divisione agere convenit. Notandum vero est, quantitatem pure imaginariam nonnisi determinatione dicta, qua afficitur (XXXII.) a reali differre, uti $+4$ a -4, adeoque omnes in intuitu exhiberi; nec scientiam, quæ præcisione evidentiaque gloriatur, meris imaginibus nullo originali gaudentibus contentam esse posse. Vide mox, dum $\sqrt{-1}$ etiam in exponentem ascendit.

XXXIII. Summa totalis est summa realium connexa cum summa pure imaginariorum (p. 121.); summa realium est illud reale positivum vel negativum, quo summæ realium positivorum et summæ realium negativorum alterutrum superat alterum, aut 0, si æquales sint; summa pure imaginariorum pariter est 0, si positivum æquale sit negativo, aut illud, quo summæ positivorum et summæ negativorum alterutrum alterum superat (p. 30). Regula additionis est:

Pro quovis pari terminorum præter cœfficientes æqualium (id est factore communi gaudentium), scribatur factor eorum communis, cum cœfficiente æquali summæ cœfficientium; summa omnium terminorum hoc modo prodeuntium, nec non terminorum reliquorum, erit æqualis summæ omnium priorum terminorum. Si inter hos terminos quoque adsint termini factore communi gaudentes, operatio toties quoties repeti poterit, donec summa quæsita forma simplicissima exhibeatur.

Quod hoc pacto summæ quæsitæ æquale prodeat, patet sic. Sint prius tantum realia.

1. *Regula valet de duobus terminis.* Sint enim

$$\alpha c+\beta c, \quad \text{aut} \quad -\alpha c-\beta c, \quad \text{aut} \quad \alpha c-\beta c,$$

(neque alius casus datur); erit c aut positivum aut negativum, pariter α et pariter β. Sint (pro α', β', n integris positivis)

$$\alpha=\pm\frac{\alpha'}{n}, \quad \beta=\pm\frac{\beta'}{n} \quad \text{et} \quad \frac{c}{n}=u.$$

Hosted by Google

Percurrendo casus singulos prodibit per regulam pro casu primo

$$(\alpha+\beta)c,$$

pro secundo

$$(-\alpha-\beta)c,$$

pro tertio

$$(\alpha-\beta)c.$$

Summa vera quoque eadem erit; ex. gr. pro α positivo et β negativo erit

$$\alpha c=\alpha' u, \quad \beta c=-\beta' u,$$

atque

$$\alpha c+\beta c=\alpha' u-\beta' u=(\alpha'-\beta')u=\frac{(\alpha'-\beta')c}{n}=\left(\frac{\alpha'}{n}-\frac{\beta'}{n}\right)c$$
$$=(\alpha+\beta)c$$

Ita reliqui casus patent.

Si vero $\frac{\alpha'}{n}$ tendat ad α et $\frac{\beta'}{n}$ tendat ad β, tum $\frac{\alpha'\pm\beta'}{n}$ tendit ad $\alpha\pm\beta$ et $\frac{(\alpha'\pm\beta')c}{n}$ tendit ad $(\alpha\pm\beta)c$.

2. *Si vero certorum quotvis terminorum summa S iuxta regulam vera prodierit atque accedat novum par terminorum factore communi gaudentium, quorum summa sit s; erit summa prius additorum simul cum novo pari ipsi $S+s$ aequalis.*

Sit enim in prius additis summa omnium positivorum A, et $-B$ sit summa negativorum in iis; in S vero sit a summa positivorum et $-b$ summa negativorum; atque novum par sit ex. gr. (pro k positivo) $2k-k=k$, Aut erit $A=B$, aut $A=B+B'$ aut $A+A'=B$ (pro A, B, A', B'. positivis).

Si $A=B$, etiam $a=b$; quia $A-B=a-b$ per hypothesim; sed $A-B=0$, ergo et $a-b=0$ quod, nisi $a=b$ sit, esse nequit.

Si $A<B$ et $A+A'=B$, tum

$$A-B=A-A-A'=-A'=a-b;$$

adeoque b superat ipsum a quantitate A'; nempe $b=a+A'$ esse debet, ut sit

$$a-(a+A')=-A' \quad \text{et} \quad a=(a+A')-A'=b-A'.$$

Hosted by Google

Superius (XIX. 2. pag. 64.) dictum est, demtione etiam per partes undevis facta, prodire æqualia, quod hic tenendum est; substitutiones etiam rite fieri statim dicetur.

Si $A=B+B'$; tum $A-B=B+B'-B=a-b$; adeoque $B'=a-b$; et hinc $a=b+B'$.

Quod substitutiones factas attinet; dum ex. gr. $a=b-A'$ substituitur ipsi a in $a-b$, est tum

$$B=A+A',$$

adeoque $-B=-A-A'$ et $A-B=A-(A+A')$; ubi manifesto $-A'$ manet, (partem A ipsius B ex A demendo); unde a prodit $=b-A'$, et simul $b=a+A'$. Si iam in $a-b$ ponatur in locum ipsius a valor dictus, erit $b-A'-b$, et si in locum primi b ponatur valor eius $a+A'$, erit $a+A'-A'-b$, quod demto A' ex A' erit ipsum $a-b$. Quicunque iam fuerit casus; ex. gr. si $A+A'=B$, erit summa vera $A-B+k$

$$A-A-A'+k=-A'+k;$$

summa iuxta regulam autem est (quia tum $a=b-A'$)

$$a-b+k=b-A'-b+k=-A'+k;$$

adeoque summa iuxta regulam est summæ veræ æqualis. Manifesto vero de quotvis ad novum par concludere licet, donec (terminis quorum nulli duo factore communi gaudent omnibus præmissis) nullus amplius supersit. Possunt quidem demum termini prodeuntes ordine quocunque poni, cum per superius dicta summa prodeat eadem.

3. *Imo etsi imaginaria adfuerint, regula eadem valet.*

Exprimantur enim hæc per X, Y, Z, V,... sitque

$$X=x+x'\sqrt{-1},\quad Y=y+y'\sqrt{-1}\ldots.$$

$x, x', y, y',\ldots$ realia denotandibus, ex. gr. si $X=2-3\sqrt{-1}$, est $x=2$, $x'=-3$; atque $\pm x'i$ exprimit valores ipsius $-3\sqrt{-1}$.

Substituatur (in 1.) X ipsi c, erit pro omni casuum ibidem dictorum summa iuxta regulam summæ veræ æqualis, notando quod ibi $\frac{c}{n}=u$

Hosted by Google

sit $= \frac{x}{n} + \frac{x'\sqrt{-1}}{n}$, ubi c aut tota (id est pars utraque tam realis quam imaginaria) positiva esse potest, aut utraque negativa, aut una positiva, altera negativa. Singulis casibus percursis, regulam de duobus terminis $\alpha X + \beta X$ valere patet.

Si vero de quotvis et qualibusvis terminis, quorum summa iuxta regulam sit S, valeat; valebit, etiamsi novum par accedat. Namque sit summa omnis realis in eousque additis A, et $-B$ summa negativi, ac summa omnis pure imaginarii positivi sit I, et $-K$ sit summa negativi; summaque omnis realis positivi in S sit a, et $-b$ summa realis negativi, imaginarii puri vero positivi summa sit j, et negativi sit $-k$ (ubi horum quodvis etiam 0 esse possit). Erit non solum $A - B = a - b$, sed etiam $I - K = j - k$ (per hyp.): atque ut supra, pro quovis casuum, ubi aut $A = B$, aut $A + A' = B$, aut $A = B + B'$, erit aut $I = j$, aut $I + I' = K$, aut $I = K + K'$; quos singulos combinando regulæ generalitas prodit.

Ex. gr. Sit $A = B + B'$, et $K = I + I'$; erit (per superiora) $a = b + B'$, et $j = k - I'$, omnibus literis positiva denotantibus; accedat novum par, ex. gr. $3X - 2X$; erit summa iuxta regulam $a - b + j - k + X$; est vero summa vera $A + x - B + I + x'\sqrt{-1} - K$; sint nunc reale x et pure imaginarium $x'\sqrt{-1}$ positiva, pariter pro aliis valoribus patet. Substituendo valores ipsorum A, K, a, j in summa vera, et summa iuxta regulam, erit prior

$$B + B' + 3x - B - 2x + I + 3x'\sqrt{-1} - I - I' - 2x'\sqrt{-1},$$

et posterior est

$$b + B' + x - b + k - I' + x'\sqrt{-1} - k;$$

atque utrumque demtis demendis est

$$= B' + x + x'\sqrt{-1} - I'.$$

Consequenter quum et hic semper ad novum par assurgere liceat (ut antea), evidens est, sive tantum realia, sive tantum imaginaria, sive permixta fuerint, regulam additionis valere. Imo etiam si expressioni e

Hosted by Google

quotvis terminis constanti, cujus valor sit ex. gr. $+\alpha - I$, addatur per regulam expressio, cuius valor sit ex. gr. $-\beta + j$; prodibit summa vera $\alpha - \beta + j - I$ (denotantibus j, I pure imaginaria). Unde si expressionibus valorum æqualium expressiones valorum æqualium addantur juxta regulam, æqualia prodibunt.

4. *Regula subtractionis* in promptu est: nempe signis suhtrahendi inversis, mutatur subtrahendus, si reale sit, in oppositum; idem fieri etiam cum imaginariis, clarum est; ex. gr. $-X$ et $+X$ opposita sunt, nam si $X = \boxplus x \boxminus x'i$ erit $-X = \boxminus x \boxplus x'i$, est vero $\boxplus x$ ipsius $\boxminus x$ oppositum, ita $\boxplus x'i$ ipsius $\boxminus x'i$; ita quotvis fuerint $X + Y + \ldots$ erit $-X - Y - \ldots$ oppositum summæ realium, quæ $X + Y + \ldots$ continet, et summæ pure imaginariorum, quæ in iisdem adsunt. Itaque si *subtrahendus* signis inversis alteri *(minuendo)* juxta regulam addatur, *differentia* prodit.

5. *Factum* vero reperitur, si multiplicandi terminus quivis per terminum quemvis multiplicatoris, ubicunque regulæ (pag. 122.) applicari possunt, iuxta illas multiplicetur; aut pro notis quantitatum generalibus factum e dictis terminis eiusmodi omnibus ita exprimatur, ut notis generalibus quidvis substituendo verum factum exhibeatur; aut saltem legem signorum $+$, $-$ tenendo, factores post se invicem scribantur; et factores ita ordinentur formenturque, ut factum eiusmodi quo simplicius prodeat, ac denique facta omnia partialia addantur.

Nam sint prius tantum realia; sitque unus factor $A + B$, alter vero sit C, aut $C + D$, (quodvis ipsorum A, B, C, D sive positivum sive negativum denotaverit): erit factum in casu primo

$$AC + BC,$$

in secundo

$$AC + BC + AD + BD.$$

Denotent enim a, b, c, d positiva, et sit (pro integris a', b', c', d', n)

$$a = \frac{a'}{n}, \quad b = \frac{b'}{n}, \quad c = \frac{c'}{n}, \quad d = \frac{d'}{n},$$

Hosted by Google

sitque ipsius A valor aut a aut $-a$, ipsius B valor aut b aut $-b$, &c. Erunt casus sequentes:

$$(a+b)\ (c+d),\ (-a-b)\ (-c-d),\ (a+b)\ (-c-d)$$
$$(a+b)\ (c-d),\ (a-b)\ (c-d);$$

nempe si in uno factore tantum c sit, $d=0$ poni potest, et aut singuli termini positivi erunt, aut singuli negativi; aut in uno factore ambo positivi in altero ambo negativi, aut in uno uterque terminus positivus et in altero unus positivus, alter negativus; aut in utroque unus positivus, alter negativus.

Percurrantur casus: sicubi $a-b$ est,

$$\text{aut}\quad a=b,\quad \text{aut}\quad a=b+q,\quad \text{aut}\quad b=a+r;$$

et ubi $c-d$ est, pariter est

$$\text{aut}\quad c=d,\quad \text{aut}\quad c=d+s,\quad \text{aut}\quad d=c+t,$$

ipsis q, r, s, t positiva denotantibus.

Est $(a+b)\ (c+d)$ iuxta regulam (pag. 59 et 68)

$$ac+bc+ad+bd=\frac{a'c'}{nn}+\frac{b'c'}{nn}+\frac{a'd'}{nn}+\frac{b'd'}{nn}$$
$$=\frac{a'+b'}{n}\cdot\frac{c'+d'}{n},$$

quæ est summa vera; nam

$$a+b=\frac{a'+b'}{n}\quad\text{et}\quad c+d=\frac{c'+d'}{n}.$$

Si omnia negativa sint, manifesto idem prodit; si vero unus factor negativus sit, idem quidem, sed negativum fit.

Considerentur iam casus $(a+b)\ (c-d)$ omnes. Erit pro $c=d$ factum verum 0, et factum iuxta regulam

$$ac-ad+bc-bd,$$

item 0,

Hosted by Google

Pro $c = d + s$, est factum verum $(a+b)s$, atque et facti iuxta regulam valor est $as + bs$; nam

$$ac = a(d+s) = ad + as,$$

ita

$$bc = b(d+s) = bd + bs;$$

adeoque

$$ac - ad + bc - bd = as + bs.$$

Pro $d = c + t$ factum verum est $-at - bt$, et idem valor facti iuxta regulam est; nam

$$-ad = -ac - at$$

et

$$-bd = -bc - bt;$$

unde patet.

Si vero $(a-b)(c-d)$ fuerit; pro $a = b$ factum verum 0 est, et idem iuxta regulam fieri clarum est. Ita si $b = a + r$ vel $a = b + q$; ex. gr.

Si $a = b + q$, erit factum verum

$$q(c-d) = qc - qd$$

(per præcedentia); iuxta regulam vero

$$(b+q)\ c - bc - (b+q)d + bd = qc - qd.$$

Est vero per superiora factum idem etiam permutatis factoribus, atque monomia per monomiam quoque iuxta legem signorum rite multiplicatur; idemque est, quæcunque per alteram multiplicetur. Consequenter summa duorum terminorum realium qualiumvis per summam duorum realium terminorum qualiumvis multiplicatum, est æqualis summæ factorum e termino utroque multiplicandi et termino utroque multiplicatoris.

Si vero de duobus terminis valet regula, valet de tribus, et ita de quotvis ad uno plura concludere licet. Denotent enim iam literae sive positiva sive negativa, et sit a summa terminorum multiplicatoris, A summa terminorum multiplicandi; atque a' sit unus terminus multiplicatoris, reliquorum summa sit b, et b' unus terminus eorum, quorum summa est b, reliquorum summa sit c; et c' unus terminus eorum, quo-

Hosted by Google

rum summa est c, ac reliquorum summa sit d, et ita porro usque ad terminum ultimum; ita A' sit unus terminus multiplicandi, et reliquorum summa sit B, ac B' sit unus terminus eorum, quorum summa est B, et summa reliquorum sit C &c. Sit ex. gr. ultimus multiplicatoris terminus c, multiplicandi sit D. Erit (per præcedentia)

$$aA = (a'+b)A = a'A + bA,$$

est vero

$$a'A = a'(A'+B) = a'A' + a'B;$$

et

$$a'B = a'(B'+C) = a'B' + a'C,$$

atque

$$a'C = a'(C'+D) = a'C' + a'D.$$

Itaque

$$a'A = a'A' + a'B' + a'C' + a'D,$$

ita

$$bA = (b'+c)A = b'A + cA;$$

eritque ut prius

$$b'A = b'A' + b'B' + b'C' + b'D.$$

Ita

$$cA = cA' + cB' + cC' + cD.$$

Quod cum quotvis fuerint termini, usque ad ultimum in utroque factore continuare liceat; manifesto factum summa ex factis omnibus e singulis terminis multiplicatoris per singulos multiplicandi est.

Quoad casum autem, si imaginaria adfuerint, regulam valere patet sic.

Retentis denotationibus $X, Y, \ldots, Z, V, \ldots$ (p. 138) sed proximis haud retentis, si realium $A, B, C, \ldots$ summa sit α, est

$$AX + BX + \ldots = \alpha X.$$

Nam

$$AX = A(x + x'\sqrt{-1}) = Ax + Ax'\sqrt{-1}$$

(quia AX factum iuxta definitionem denotare debet). Ita

$$BX = Bx + Bx'\sqrt{-1},$$
$$CX = Cx + Cx'\sqrt{-1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Hosted by Google

adeoque

$$\begin{aligned} AX + BX + \ldots &= Ax + Bx + \ldots + Ax'\sqrt{-1} + Bx'\sqrt{-1} + \ldots \\ &= (A + B + \ldots)x + (A + B + \ldots)x'\sqrt{-1} \\ &= \alpha x + \alpha x'\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

quod per definitionem factum ex α et X est. Nempe si (pro integris A', B', n) sit

$$A = \frac{A'}{n}, \quad B = \frac{B'}{n}, \quad u = \frac{x'i}{n},$$

et accipiatur ex. gr. $+1i$ pro valore ipsius $\sqrt{-1}$ ubique, erit:

$$Ax'i = \frac{A'}{n}x'i = A'u;$$

unde

$$A'u + B'u = (A' + B')u = (A + B)x'i.$$

Imo etsi $\frac{A'}{n} \backsim a$, vel etiam $\frac{B'}{n} \backsim B$, erit

$$\frac{A' + B'}{n}x'i \backsim (A + B)x'i,$$

quod ad plura quoque extendi clarum est.

Ita

$$AY + BY + \ldots = \alpha y + \alpha y'i;$$

idem pariter continuari potest, quotvis post $X, Y, \ldots$ fuerint. Consequenter si quodvis ipsorum $X, Y, \ldots$ per quodvis ipsorum $A, B, \ldots$ multiplicetur, prodibit

$$\alpha(x + y + \ldots) + \alpha(x'i + y'i + \ldots),$$

nempe factum iuxta definitionem.

Consideretur iam XZ; exprimet hoc factum ex $x + x'i$ et $z + z'i$ (ubique $+1i$ pro valore ipsius $\sqrt{-1}$ sumendo, posset ubique $-1i$ sumi). Per definitionem multiplicationis XZ denotabit

$$xz + xz'i + zx'i - x'z',$$

nempe $x'\sqrt{-1} \,.\, z'\sqrt{-1} = -x'z'$ (p. 122).

Si ipsius $x'i, y'i, \ldots$ terminus quivis per terminum quemvis ipsius $z'i + v'i + \ldots$ multiplicetur, manifesto (ut pag. 140. sequ.) factum ex

Hosted by Google

$(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)$ prodibit, cum omnia ibidem dicta heic locum habeant, nisi quod ibi quoad $+1$, hic quoad -1 fiat multiplicatio. Erit vero hoc factum

$$-x'z'-x'v'-y'z'-y'v';$$

ita

$$(x'i+y'i)(z'i+v'i)=-(x'+y')(z'+v')$$

Sit iam unus factor

$$A+B+\ldots+X+Y\ldots,$$

alter sit

$$a+b+\ldots+Z+V\ldots;$$

et summa realium $A, B, \ldots$ sit α, summa realium $a, b, \ldots$ sit β, atque, summa realium in $X+Y+\ldots$ sit R, pure imaginoriorum sit I et summa realium in $Z+V+\ldots$ sit r, pure imaginariorum sit j. Multiplicatis singulis terminis unius factoris per singulos alterius prodibit

$$\begin{aligned}
&\beta\alpha+\beta X+\beta Y+\ldots+\alpha Z+\alpha V+\ldots\\
&\quad+ZX+ZY+\ldots+VX+VY+\ldots=\\
&=\beta\alpha+\beta x+\beta y+\ldots+\beta x'i+\beta y'i+\ldots\\
&\quad+\alpha z+\alpha v+\ldots+\alpha z'i+\alpha v'i+\ldots\\
&\quad+zx+zy+\ldots+vx+vy+\ldots\\
&\quad+zx'i+zy'i+\ldots+vx'i+vy'i+\ldots\\
&\quad+xz'i+yz'i+\ldots+xv'i+yv'i+\ldots\\
&\quad+(-x'z'-y'z'-\ldots-x'v'-y'v'-\ldots),
\end{aligned}$$

ubi expressio in parenthesi $=(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)$, quod plane factum iuxta definitionem est, cum

$$\begin{aligned}
R&=x+y+\ldots, & I&=x'i+y'i+\ldots,\\
r&=z+v+\ldots, & j&=z'i+v'i+\ldots,
\end{aligned}$$

adeoque factum esse debet

$$\begin{aligned}
&(\alpha+x+y+\ldots)(\beta+z+v+\ldots)+(\alpha+x+y+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)\\
&+(\beta+z+v+\ldots)(x'i+y'i+\ldots)+(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots);
\end{aligned}$$

Hosted by Google

et hoc prodiisse manifestum est, nempe

$$(\alpha + R)\ (\beta + r) + (\alpha + R)j + (\beta + r)\ I + Ij.$$

6. *Divisio quantitatum complexarum* fit modo sequenti. E quolibet termino dividendi per quemvis divisoris diviso prodeat quotus a, hoc a per totum divisorem multiplicatum e dividendo subtrahatur; atque illi, quod in quoto prodiit, addatur semper quotus novus, quem e quovis termino differentiæ novissimæ per quemvis divisoris diviso reperire licet; atque novissimo quoto per totum divisorem multiplicato, et facto e novissima differentia subtracto, operatio continuetur, donec differentia aut $= 0$ sit, aut si alicubi subsistere libeat, atque summa omnis, quod eousque in quoto prodiit sit q, differentia sit r, divisor sit d, et dividendus D; erit $q + \frac{r}{d} = D : d$. Dicitur $\frac{r}{d}$ complementum quoti.

Prodeat enim prius a, postea b, adeoque $q = a + b$; erit differentia prima

$$= D - da,$$

secunda erit

$$= D - da - db = D - d(a + b) = D - dq,$$

adeoque complementum erit $\frac{D - dq}{d}$; est autem

$$\left(q + \frac{D - dq}{d}\right) d = \frac{qd + D - dq}{d} d = D.$$

Quotvis adhuc post a, b fuerint, idem applicari patet.

Sint exempla quædam ad multiplicationem, divisionemque, in quibus et additio subtractioque occurrit.

7. *Erit*

$$(a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)\ (a - b) = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(\alpha + \beta)\ (\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Ita

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})\ (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

Hinc etiam

$$[(a + b)^2 - c^2]\ [c^2 - (a - b)^2] = (a + b + c)\ (a + b - c)\ (c + a - b)\ (c - a + b),$$

Hosted by Google

si nempe $a+b$ ipsi α et c ipsi β in factore priore, tum c ipsi α et $a-b$ ipsi β in altero substituantur. Idem valor est æqualis facto quod prodit multiplicatione duorum primorum peracta; quod inferius citabitur. Peragatur multiplicatio:

$$\begin{array}{r} (a+b)^2 - c^2 \\ \underline{c^2 - (a-b)^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 c^2 - c^4 - (a+b)^2 (a-b)^2 + c^2 (a-b)^2 = \\ = & (a^2 + 2ab + b^2) c^2 + c^2 (a^2 - 2ab + b^2) - [(a+b)(a-b)]^2 - c^4 = \\ = & 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 + 2a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4; \end{aligned}$$

nam $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ et $(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2 b^2 + b^4$.

8. *Multiplicetur*

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{\beta\alpha b - \beta^2 a}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{-1} \; \textit{per} \; \alpha + \beta\sqrt{-1};$$

prodibit

$$a + \frac{\beta\alpha b - \beta^2 a}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 b - \alpha\beta a}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{-1}$$

$$+ \frac{\beta a}{\alpha} \sqrt{-1} + \frac{\beta^2 \alpha b - \beta^3 a}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \sqrt{-1} + \frac{\beta^2 a - \alpha\beta b}{\alpha^2 + \beta^2};$$

quod si termini quorum $\sqrt{-1}$ factor communis est, ad denominationem eandem reducantur, tertio termino per α, quarto per $\alpha^2+\beta^2$ supra et infra multiplicato, erit pure imaginarii summa $b\sqrt{-1}$, atque summa terminorum reliquorum nempe primi, secundi et ultimi a. Adeoque factum:

$$= a + b\sqrt{-1}.$$

Unde qualiumvis realium et qualiumvis pure imaginariorum summa per $a + b\sqrt{-1}$ expressa, dividatur per summam ipsius α summæ realium et ipsius $\beta\sqrt{-1}$ summæ pure imaginariorum; datur quotus, atque is multiplicandus in schemate est.

9. *Elevetur* $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ *seu* $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha i$ *ad* 3 (p. 123).

Hosted by Google

Erit

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\alpha i \text{ multiplicatum per}$$

$$\underline{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\alpha i}$$

$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\alpha i-\tfrac{1}{4}\alpha i-\tfrac{1}{4}\alpha^2=$$

$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\alpha i-\tfrac{1}{4}\alpha^2, \text{ quo item multiplicato per}$$

$$\underline{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\alpha i} \text{ prodibit:}$$

$$-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\alpha i+\tfrac{1}{8}\alpha^2+\tfrac{1}{8}\alpha i+\tfrac{1}{4}\alpha^2-\tfrac{1}{8}\alpha^2\alpha i,$$

quod substituendo 3 ipsi α^2 (p. 124) est

$$=-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}3+\tfrac{2}{8}3+\tfrac{2}{8}\alpha i+\tfrac{1}{8}\alpha i-\tfrac{3}{8}\alpha i=1.$$

Dictum nimirum (p. 122) est pure imaginaria quoad -1 multiplicari.

10. *Si*

$$a\sqrt[p]{P^n}+\frac{1}{b\sqrt[q]{Q^m}}$$

multiplicandum sit per

$$b\sqrt[q]{Q^m}-\frac{1}{a\sqrt[p]{P^n}}$$

erit factum

$$ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}-\frac{1}{ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}}.$$

Nimirum duorum factorum intermediorum summa est 0; et $P^{\frac{n}{p}}=P^{\frac{nq}{pq}}$ (p. 129.), ita $Q^{\frac{m}{q}}=Q^{\frac{mp}{pq}}$; atque $\sqrt[p]{P^n}$ habet p valores, qui cum $\sqrt[q]{Q^m}$ combinati dant valores numero non maiore, quam pq, qui omnes adsunt inter valores numero pq ipsius $\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}$. Unde etiam regula pro talibus casibus liquet; nempe

$$a\sqrt[p]{P^n}\,.\,b\sqrt[q]{Q^m}=ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}};$$

quod etiam ad plures factores quotvis, exponentibus fractis ad denominationem eandem reductis, extendi patet.

Hosted by Google

11. Evenit etiam sæpius, ut in pluribus terminis expressiones signo $\sqrt{}$ affectæ primo obtuitu quidem per additionem simplicius exprimi nequeant; sed transformatione aliqua hoc obtineatur. Sit ex. gr.

$$2\sqrt{a^2\sqrt{b^2c}} - a\sqrt{b\sqrt{c}};$$

est hoc

$$= a\sqrt{b\sqrt{c}};$$

nam quicunque valores substituantur ipsis a, b, c, est

$$\sqrt{b^2c} = b\sqrt{c},$$

et

$$2\sqrt{a^2\sqrt{b^2c}} = 2a\sqrt{\sqrt{b^2c}} = 2a\sqrt{b\sqrt{c}}.$$

In genere pro $\alpha\sqrt[m]{\beta}$ scribi $\sqrt[m]{\beta\alpha^m}$, atque illud pro hoc potest; est nempe

$$\alpha = \alpha^{\frac{m}{m}},$$

et

$$\alpha^{\frac{m}{m}}\beta^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha^m}.\sqrt[m]{\beta} = \alpha\sqrt[m]{\beta}.$$

Unde patet modus, *factorem signo* $\sqrt{}$ *praepositum introducendi, aut quantitatem, quae signo* $\sqrt{}$ *subest, educendi.*

12. Si $A\sqrt[m]{a}$ *dividendum per* $B\sqrt[m]{b}$ sit, *erit*

$$A\sqrt[m]{a} : B\sqrt[m]{b} = \frac{A}{B}\cdot\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

nam $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ (p. 105.). Ita

$$A\sqrt[p]{P^n} : B\sqrt[q]{Q^m} = \frac{A}{B}\sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{np}}};$$

nam $\sqrt[p]{P^n} = \sqrt[pq]{P^{nq}}$ et $\sqrt[q]{Q^m} = \sqrt[pq]{Q^{mp}}$,

atque

$$\frac{\sqrt[pq]{P^{nq}}}{\sqrt[pq]{Q^{mp}}} = \sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$$

13. *Sit dividendum* $x^n - 1$ *per* $x - 1$, quod item sæpe occurrit. Erit schema operationis sequens.

Hosted by Google

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-1 & x^n-1 & x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1 \\
 & *\mp x^{n-1} & \\
\cline{2-2}
 & \quad x^{n-1}-1 & \\
 & \quad *\mp x^{n-2} & \\
\cline{2-2}
 & \qquad x^{n-2}-1 & \\
 & \qquad \vdots \quad \vdots & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad x^2-1 & \\
 & \qquad\quad *\mp x & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad x-1 & \\
 & \qquad\qquad\quad *\mp 1 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Nempe x^n per x^1 diviso prodit x^{n-1}; nam (p. 103) si quantitas eadem elevata sit, in multiplicatione exponentes adduntur, in divisione subtrahitur exponens divisoris ex exponente dividendi; multiplicando per quotum x^{n-1} divisorem totum, omnino x^n prodit, quo subtracto x^n deletur; adeoque in casibus similibus stellula tantum scribitur; $-1.\ x^{n-1} = -x^{n-1}$ quo ex -1 substracto, (proprie $x^n - x^{n-1}$ esset ex $x^n - 1$ substrahendum), prodit differentia $x^{n-1} - 1$; atque eadem operatione juxta regulam continuata, si n integer positivus sit, aliquando manebit $x^2 - 1$, unde e schemate patet quotum esse seriem ad dextram, et differentiam ultimam 0 esse. Ita:

$$(x^n - a^n) : (x-a) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}.$$

14. *Sit* 1 *per* $1-x$ *dividendum.* Erit schema sequens:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1-x & 1 & 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\dfrac{x^n}{1-x}, \\
 & *\mp x & \\
\cline{2-2}
 & \quad x & \\
 & \quad *\mp x^2 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad x^2 & \\
 & \qquad *\mp x3 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad x3 & \\
 & \qquad \cdot \quad \cdot & \\
 & \qquad \cdot \quad \cdot & \\
 & \qquad \cdot \quad \cdot & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad x^{n-1} & \\
 & \qquad\qquad *\mp x^n & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad x^n &
\end{array}
$$

Hosted by Google

quod, quum complementum adsit, verus quotus est (p. 145); at

$$1 + x^2 + x^2 + x^3 + \ldots$$

tunc tantum quotus est, dum complementum $\backsim 0$, quod fieri, si $x < 1$, statim probabitur.

Dicitur eiusmodi *series convergens*, cuius summa terminorum limite finito gaudet. Seriem, quæ quantitatem finitam exprimit, talem esse debere clarum est, ut valor errore dato quovis minore exhiberi queat; imo eo quoque nitendum est, ut si apud quemvis terminum subsistere libuerit, duæ quantitates quam proximæ assignari queant, intra quas valor complementi cadat.

15. *E schemate hoc etiam fluit sequens:*

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

quod itaque est

$$= \frac{1-x^n}{1-x};$$

et multiplicando utrumque per a est

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} = \frac{a-ax^n}{1-x};$$

dicitur vero series, cujus quivis terminus per idem (quod exponens seriei audit) multiplicatus producit sequentem, *geometrica;* cujus igitur si primus terminus a sit, exponens e, erit n-tus terminus ae^{n-1}; qui si tanquam ultimus u dicatur, erit summa

$$\frac{a-ue}{1-e} = \frac{ue-a}{e-1};$$

quod si $e < 1$ sit, tendit ad $\frac{a}{1-e}$; nam tunc $\frac{ue}{1-e}$ tendit ad 0, quia $ue = ae^n$ et e^n tendit ad 0, si n tendat ad infinitum (ut statim patebit), unde etiam $ae^n \backsim 0$.

Casus si $e = 1$, adeoque $ue = a$ et $\frac{a-eu}{1-e} = \frac{0}{0}$ excipitur (p. 45); quomodo reperiatur in eiusmodi casibus valor verus, formulæ alioquin ge-

Hosted by Google

neralis, infra tradetur. Facile patet esse limitem valoris formulæ, dum e tendit ad 1.

Quod $e^n \backsim 0$, si $e < 1$ et $n \backsim \infty$, patet sic. Etsi denominator ipsius e numeratorem unitate superet, sitque

$$\mp e = \frac{h}{h+1}$$

erit

$$\mp e^n = \frac{h^n}{(h+1)^n};$$

Si $h+1$ per se n-ies multiplicetur, facile patet (tam e binomio statim tradendo, quam de n prius $= 2$ posito et semper uno altius ascendendo) esse priores duos terminos $h^n + nh^{n-1}$ et esse

$$(h+1)^n > h^n + nh^{n-1};$$

itaque

$$e^n < \frac{h^n}{h^n + nh^{n-1}},$$

itaque et numeratorem et denominatorem per h^n dividendo, est

$$e^n < \frac{1}{1 + \frac{n}{h}},$$

quod tendit ad 0, quia n, adeoque $n \cdot \frac{1}{h}$ tendit ad ∞.

Unde etiam supra $\frac{x^n}{1-x} \backsim 0$, si $x < 1$ et $n \backsim \infty$, atque limes summæ seriei

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$\frac{1}{1-x}$ est; nam summa terminorum usque ad quemvis u est $\frac{1-ux}{1-x}$, et differentia huius ab $\frac{1}{1-x}$ est $\frac{ux}{1-x}$, quod tendit ad 0.

16. Series innumerabiles dantur iuxta legem, qua termini se invicem excipiunt. Unam tamen magis obviam, de qua iam (p. 32) mentio facta est, subiungere libet: nempe cuius formula est sequens,

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots,\ a+(n-1)d.$$

cuius summa prodit, si modo sequenti sibi addatur. Dicatur summa s, ultimus nempe n-tus terminus

Hosted by Google

$$a+(n-1)\,d=a+nd-d$$

sit U; eritque

$$a+a+\ d \qquad +a+2d \qquad +\ldots+U=s,$$

et

$$U+a+(n-2)\,d+a+\ (n-3)\,d+\ldots+\ a\ =s,$$

atque

$$(a+U)\,n=2s\,;$$

nam summa paris post $a+U$ eadem erit; quum superius addatur d, inferius subtrahatur et in quovis sequente pari ipsi $a+U$ addatur $d-d$.

Unde

$$s=\frac{(a+U)n}{2}.$$

Exempla.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}+\ldots \backsim \frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

$$1+(1+2)+(1+2\,.\,2)+(1+3\,.\,2)+\ldots+\big(1+(n-1)2\big)=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2,$$

quæ summa numerorum imparium ab 1 usque ad n-tum inclusive est.

17. Dicitur $a,\ a+d,\ a+2d,\ldots,\ a+(n-1)\,d$ *series arithmetica* 0-*ti ordinis*, *si* $d=0$, *secus* dicitur *ordinis primi*; et omnes vocantur series arithmeticæ, quæ ex hac modo sequenti formantur; scilicet series, cuius quilibet n-tus terminus est æqualis summæ terminorum seriei ordinis m-ti a primo usque ad n-tum inclusive, dicitur *series arithmetica ordinis* $(m+1)$-ti.

Si $a=1$ sit, series ordinis secundi

(pro $d=1$)	erit	1, 3, 6, 10, ...
(pro $d=2$)		1, 4, 9, 16, ...
(pro $d=3$)		1, 5, 12, 22, ...

atque series ordinis tertia

(pro $d=1$)	erit	1, 4, 10, 20, ...
(pro $d=2$)		1, 5, 14, 30, ...
(pro $d=3$)		1, 6, 18, 40, ...

Hosted by Google

Vocantur *numeri* serierum harum, priorum (quæ ordinis secundi sunt) *polygonales*, et quidem *numeri* seriei prioris *triangulares*, sequentis *quadrangulares*, insequentis *pentagonales* et ita porro, propter quod globuli numeris illis in tales formas disponi queant. Serierum ordinis tertii numeri vero dicuntur *pyramidales*, cum globuli seriei primæ in pyramides basis triangularis, secundæ in pyramides basis quadratæ, tertiæ in pyramides basis pentagonalis & exstrui queant; nempe si n-tus terminus seriei tertii ordinis sit, pro fundamento ponitur terminus n-tus seriei ordinis secundi, e qua illa exorta est, ei superponitur terminus huius $(n-1)$-tus et ita porro usque quo primus terminus (nempe 1) huius seriei apicem claudat.

18. Erat superius $a+b$ *per se multiplicatum; quaestio succurrit, quidsi adhuc semel per idem multiplicetur, aut quidsi id n-ies fiat?* et quid si eadem operatio cum tribus aut quatuor vel pluribus terminis suscipiatur?

Si $a+b$ per se multiplicetur, prodit

$$a^2+2ab+b^2;$$

si $(a+b+c)$ per se multiplicetur, prodit

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

seu summa cuiusvis termini ad 2 elevati, necnon duplum termini cuiusvis per summan antecedentium multiplicati. Si vero hoc de summa s numero m terminorum constet, etiam de uno pluribus constat; sit enim t terminus novus; erit

$$(s+t)^2 = s^2+2st+t^2;$$

in s^2 adest cuiusvis terminorum priorum potentia secunda, necnon quivis terminus priorum per duplam summam antecedentium multiplicatus, cui modo accessit $2st$ et t^2.

Ita summæ terminorum quotvis potentia tertia est æqualis summæ cuiusvis termini ad 3 elevati, necnon tripli cuiusvis termini per secundam potentiam summæ antecedentium multiplicati, atque termini cuius-

Hosted by Google

vis ad 2 elevati per triplam summam antecedentium multiplicati. Verum enim hoc est $(a+b)$ aut $(a+b+c)$ ad 3 elevato; et si verum de s æquali summæ numero m terminorum, verum etiam accedente termino t est; nempe

$$(s+t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3,$$

unde ut prius patet.

Altior etiam potentia quævis ita elaborari potest; sed reliquis supersedendo expressio tantum ipsius $(a+b)^n$ quæritur pro quovis integro n.

XXXIV. *Quaeritur expressio ipsius $(a+b)^n$ pro quovis integro n.*

Ultro patet formulam simpliciorem fieri, si pro $(a+b)$ stet $(1+x)$; nec difficile est ex $(a+b)$ ipsum a per a dividendo in 1 mutare, sed tum ultro patet totam quantitatem, quæ operationi elevationis subest, dividendam esse, atque tum quærere, quoties sit maior vel minor nova quantitas, nempe $(a+b)$ per a divisa, quam prior, si utraque ad n elevatur? Est

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \frac{(a+b)^n}{a^n};$$

itaque

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n . a^n = (a+b)^n.$$

Transformatio ista sæpius in aliis casibus quoque usui erit. Simili modo quivís factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati tolli potest. Ex. gr.

$$(\alpha^p + \beta y^q)^r = \left(\frac{\alpha^p}{y^q} + \beta\right)^r . y^{rq} = (a^p y^{-q} + \beta)^r . y^{rq},$$

nam

$$\left(\frac{\alpha^p + \beta y^q}{y^q}\right)^r . y^{rq} = \frac{(\alpha^p + \beta y^q)^r}{y^{qr}} y^{rq} = (\alpha^p + \beta y^q)^r.$$

Reperitur quidem sine hoc artificio quoque $(a+b)^n$; sed quia per se simplicior casus est, consideretur $(1+x)^n$. Est

Hosted by Google

$$(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1,$$
$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$(1+x)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$
$$(1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Ita ulterius quoque computando, animadverti possunt sequentia.

1. Exponens summus ipsius x est exponenti binomii æqualis, et in quovis sequenti termino uno decrescit, usquequo in ultimo $x^0 = 1$ fiat. Unde etiam patet idem de quovis exponente uno altiore; nam si talis series per $1+x$ multiplicetur, 1 exponentem ipsius x non, x vero quemvis uno augebit.

2. In quavis harum serierum sunt coefficientes a primo ad dextram usque ad ultimum, et ab ultimo ad lævam usque ad primum iidem.

3. Sint in serie tali per $1+x$ multiplicanda, $\alpha x^m + \beta x^{m-1}$ duo termini quivis proximi; erit $\alpha x^m . 1 = \alpha x^m$, nec ullus alius terminus per 1 multiplicatus x^m producet, $\beta x^{m-1}. x$ vero $= \beta x^m$, neque ullus alius terminus per x multiplicatus x^m producet; itaque coefficiens ipsius x^m in facto erit $(\alpha + \beta)$.

4. Coefficiens termini primi est 1, coeff. secundi est coeff. primi per exponentem, quem x in hoc habet, multiplicatus, at coeff. secundi per exponentem, quem x in hoc habet, multiplicatus, est duplum coefficientis tertii; et ita porro in omnibus his casibus, coefficiens termini m-ti per exponentem, quem x in termino m-to habet, multiplicatus, est m-tuplum coefficientis $(m+1)$-ti.

Unde si hoc de $(1+x)^{n-1}$ valeat, erit

$$(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} x^{n-3} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3} x^{n-4} + \ldots + x^0;$$

nimirum duplum eius, quod quæritur, per 2 dividi debet, uti triplum per 3, in genere m-tuplum per m.

Si vero de $(1+x)^{n-1}$ valet, valet etiam de $(1+x)^{n-1}(1+x)$, id est

Hosted by Google

$(1+x)^n$. Invertatur enim series, ut simplicius fiat (in casibus elaboratis nimirum series coefficientium eadem antrorsum et retrorsum est); erit

$$(1+x)^{n-1} = 1 + \mathrm{I}\,x + \mathrm{II}\,x^2 + \mathrm{III}\,x^3 + \ldots,$$

si

$$\mathrm{I} = n-1,$$

$$\mathrm{II} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{1.2},$$

$$\mathrm{III} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.2.3},$$

et ita porro in infinitum; nam sicubi ex n subtrahitur n, factor is fit 0 in numeratore, adeoque cum factor is iuxta legem hanc semper maneat, abinde omnes termini sunt 0; plane antea vero, dum ipso n uno minus (nempe $n-1$) subtrahitur ex n, manet 1, fitque hoc ad exponentem $(n-1)$ ipsius x: nempe exponens ipsius x est æqualis numero, qui ex n ultimo subtrahitur [pro $(1+x)^{n-1}$], atque tum coefficiens est

$$\frac{(n-1).(n-2).\ldots.2.1}{1.2.\ldots.(n-2)\,(n-1)} = 1.$$

Sit iam in serie ipsius $(1+x)^{n-1}$ quivis exponens ipsius x, ex. gr. sit 5 instar cuiusvis; erit ipsius x^5 in serie ipsius $(1+x)^n$ coefficiens æqualis summæ IV+V (per 3.), hoc vero est

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,n-4)}{1.2.3.4} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.2.3.4.5}$$

$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3.4.5};$$

si nimirum prioris numeratore denominatoreque per 5 multiplicato ad denominationem eandem reducantur, et in numeratoribus factor communis $(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$ eximatur, atque per factorum sociorum summam $5+n-5=n$ multiplicetur.

Ita serie ut prius ab x^{n-1} incipiente, quum sit in casibus computatis

$$(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + \mathrm{I}\,x^{n-2} + \mathrm{II}\,x^{n-3} + \mathrm{III}\,x^{n-4} + \mathrm{IV}\,x^{n-5} + \mathrm{V}\,x^{n-6} + \ldots + x^0,$$

Hosted by Google

erit (cum heic exponentes ipsius x decrescant) ipsius x^{n-5} in $(1+x)^n$ coefficiens $=$ IV$+$V; nam 1 nonnisi per IV x^{n-5} multiplicatum producit x^{n-5}, et x nonnisi per V x^{n-6} producit x^{n-5}; est vero in $(1+x)^n$ terminus, in quo x^{n-5} est, $(5+1)$-tus ab x^n inclusive, uti antea ab 1 usque ad x^5. Unde cum ipsi 5 numerum quemvis sufficere liceat, patet, de quavis binomii potentia uno altius ascendendo, esse coefficientes terminorum ab extremis æquidistantium æquales; atque pro quovis integro n esse

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3 + \ldots;$$

atque si ipsi x substituatur (ex p. 155) $\frac{b}{a}$, est $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n =$

$$(a+b)^n = a^n + na^n\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{2}a^n\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)\,n-2)}{2.3}a^n\frac{b^3}{a^3} + \ldots$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Patet etiam $(a+b)^n$ constare ex $n+1$ terminis; nempe præter primum sunt n termini, donec ex n subtrahatur n.

Est quoque in quovis termino summa exponentium ipsorum a, b plane n; et si μ, ν integri positivi sint, et $\mu+\nu=n$, in aliquo termino adest $a^\mu b^\nu$; nam terminus primus est $a^n b^0$, et exponens ipsius a terminatim uno decrescit ab n usque ad 0, crescente simul exponente ipsius b a 0 ad n.

Sed præter plures alias, etiam via sequenti ad idem perveniri potuit. Quidnam ex $(\alpha+a).(\beta+b)$, quid ex $(\alpha+a).(\beta+b).(\gamma+c)\ldots$ fiat, ultro considerandum venit. Ut res simplicior fiat, ponatur $\alpha=\beta=\gamma=\ldots$, imo ut adhuc simplicius sit, fiat $\alpha=1=\beta=\gamma=\ldots$ Peracta multiplicatione, erit

$$(1+a)\,(1+b) = 1+a+b+ab,$$

quo multiplicato per $1+c$, prodit

$$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc;$$

Hosted by Google

quod continuando facile animadvertitur, primo prodire semper 1, deinde summam singularum literarum, tum summam omnium ambarum, tum omnium ternarum, et ita porro. Unde de m literis ad $m+1$ prona conclusio fit; nempe 1 in novo multiplicatore dat 1 in novo facto, dein summam singularum m literarum, tum omnes ambas, quæ ex m accipi possunt, dein omnes ternas, postea omnes quaternas, et ita porro, usque ad factum ex omnibus m literis; per literam novam multiplicando vero prodit ex 1 multiplicandi litera ipsa nova, qua accedente ad summam singularum m literarum omnes $m+1$ literae aderunt; dein e singulis m literis $a+b+c+\ldots$ per novam multiplicatis omnes ambæ novam literam continentes prodibunt; adeoque cum reliquæ ambæ iam adsint, accedentibus his omnes ambæ, quae ex $m+1$ literis accipi possunt, aderunt in facto; ita quaecunque combinationes omnes m literarum, e literis numero μ constantes, per novam literam multiplicatæ, dabunt omnes combinationes ex $\mu+1$ literis constantes eas, quæ literam novam continent; cum omnes combinationes m literarum e μ literis constantes adsint, nec ulla ex $m+1$ literis combinatio ex $\mu+1$ literis constans novam literam continens datur, nisi in qua litera nova, μ literas e prioribus nanciscitur. Prodibunt itaque omnes combinationes ex $\mu+1$ literis constantes literam novam continentes, reliquæ vero, quæ præter hanc accipi possunt, adsunt, relictæ multiplicatione per terminum priorem 1; adsunt igitur omnes, quæ ex $m+1$ literis accipi possunt. Continuando usque ad finem, donec $\mu=m$ fit, tum is terminus ultimus multiplicandi est, qui per novam literam multiplicatus dat combinationem omnium $m+1$ literarum, quæ sola est, neque in multiplicando adest ulterius combinatio ulla, quæ per 1 multiplicata huic accedat; estque omnino sola, cum ex $m+1$ literis $m+1$ literæ (ab ordine abstrahendo) unico modo accipi queant.

Post hæc, dum de $(1+x)^n$ agitur, facilis reflexio est; casum eundem esse, si $a=b=c=\ldots=x$ ponatur; adeoque nonnisi numerum amborum, ternorum... &c., quæ ex n rebus accipi queunt, quærendum esse, quod facile reperitur.

Sint nempe $a, b, c\ldots$ numero n; et ponatur post quamvis quævis

Hosted by Google

reliquarum, quæ numero $n-1$ sunt; prodibunt imagines, quarum nullæ duæ sunt æquales, et in quarum aliqua litera quævis præposita et quævis alii postposita adest, adeoque numerus omnium amborum simul cum permutationibus literarum, atque numerus imaginum harum est $n(n-1)$; et e qualibet harum imaginum, (in quibus iam 2 literæ sunt), si cuilibet imagini literarum reliquarum (quæ pro quavis imagine numero $n-2$ sunt) quævis postponatur, oriuntur $n(n-1)(n-2)$ eiusmodi imagines, quarum nullæ duæ sunt æquales; nam imagines binarum omnes diversæ sunt, adeoque etsi omnibus eadem litera postponeretur, omnes inæquales manerent; adest quoque quævis permutatio e 3 literis constans inter istas imagines; nam quævis data fuerit, in illa erit litera eius postrema permutationi alicui e 2 literis constanti postposita; adest vero quævis talis permutatio, quavis literarum reliquarum postposita; (nulla nimirum litera in ulla imaginum bis occurrente).

Unde ad uno plura concludere licet. Si nempe ex n literis permutationes ex m literis constantes, numero $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))$ accipi possint, erunt permutationes ex $m+1$ literis constantes numero $n(n-1)\ldots(n-m)$; nam si ut antea cuivis priorum permutationum e literis m constantium quævis reliquarum literarum, (quæ pro quavis permutatione numero $n-m$ sunt) postponatur, orientur $n(n-1)\ldots(n-m)$ permutationes singulæ diversæ, (quia diversæ ante postpositionem erant), et inter quas quævis permutatio ex $m+1$ literis constans aderit; nam ut antea quæcunque talis permutatio detur, erit in ea, litera eius postrema, alicui permutationi ex m literis, (talibus, inter quas illa postrema non adest) constanti postposita; aderant vero omnes permutationes ex m literis constantes, et cuivis quævis ex n literis, quæ in illa non adest, postposita est.

Si vero tantum de numero combinationum quæratur (abstrahendo a literarum earundem ordine in quavis imagine), tum manifesto, cum omnes permutationes quoque adsint, toties plures imagines ex. gr. ex m literis constantes erunt, quoties m literæ permutari possunt; adeoque numerus imaginum per numerum permutationum dividi debet. Sunt vero duarum literarum permutationes duo nempe ab, ba; accedente nova, hæc in quavis harum aut ante aut postponitur, aut inter reliquas; itaque

Hosted by Google

trium rerum erunt permutationes numero 2.3, et si $m-1$ literarum sint $2.3\ldots(m-1)$ permutationes, erunt m literarum $2.3\ldots m$; nam nova litera m-ta in quavis imagine m loca habet; nempe $m-1$ literarum loca intermedia sunt uno pauciora quam literæ, adeoque $m-2$, quod cum locis ante et post literas efficit m; per quod numerus prior multiplicatur.

Hinc ex n literis numerus amborum est

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

numerus ternorum est

$$\frac{n(n-1)\,n-2)}{2.3}$$

et ita porro.

Consequenter

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)\,(n-2)}{2.3}x^3+\ldots,$$

(ut antea).

Dicitur hoc *Theorema Binomiale*, cujus inventio *Paschali* tribuitur, at *Newton* primus animadvertit (exemplis pluribus obviam venientibus), idem ad exponentem quemvis etiam fractum negativumque extendi; fertur quoque, cum hoc tam cardinale in Arithmetica sit, quam *Pythagoricum* in Geometria, formulam binomii sepulchro Newtoni incisam esse, quamvis indemonstratam reliquerit, neque universaliter vera est, nisi $b \lessdot a$ sit. Itaque hae series pro exponente non integro considerandæ veniunt: erit is aut $\lessdot$ aut $\gtrdot 1$, atque aut positivus aut negativus.

XXXV. *Si x et e positiva fuerint, atque pro $(1\pm x)^{\pm e}$ condatur series ea lege, ut pro $(1+z)^E$ sit primus terminus $z^0=1$, et quivis terminus, denotante μ exponentem ipsius z in eo, multiplicatus per $\frac{E-\mu}{\mu+1}.z$ det sequentem* (ut antea); *tum*

1. *Si $e<1$ sit, pro $(1+x)^e$ erit series sequens:*

$$1+ex+\frac{e(e-1)x^2}{2}+\ldots,$$

Hosted by Google

et coefficiens e positivus erit, veluti ubique, ubi exponens ipsius x impar est, et negativus, ubi exponens ipsius x par est; nam si e fractione vera integer subtrahatur, negativum manet; adeoque ad exponentem parem factores negativi numero impari erunt, et pari ad imparem.

Pro $(1-x)^e$ erit

$$1 - ex + \frac{e(e-1)}{2} x^2 - \ldots;$$

ubi coefficiens $-e$ negativum est, quia e per $-x$ multiplicatur, et postea quoque omnes coefficientes negativi erunt; nam ad exponentem parem potentia positiva est, et numerus factorum negativorum est impar, et par ad exponentem imparem ipsius $-x$.

Pro $(1+x)^{-e}$ fit

$$1 - ex + \frac{-e(-e-1)}{2} x^2 + \ldots;$$

ubi coefficientes ad exponentem imparem sunt negativi et positivi ad parem; nam ad imparem exponentem factorum negativorum numerus impar est, et par ad parem. Inverse est, dum tam e, quam x cum $+$ est.

Pro $(1-x)^{-e}$ fiunt omnes termini positivi, quum ad exponentem imparem potentia negativa sit cum numero factorum negativorum impari, et hi numero pari sint ad exponentem parem.

2. *Si* $e > 1$, *erunt pro* $(1+x)^e$ termini priores positivi, usquequo factores cœfficientis fractio vera f prima vice ingreditur (ex e integris ab 1 incipiendo subtractis); et tum terminus sequens fit negativus, nam cœfficienti priori accedit factor $f-1$, quod negativum est; atque deinde termini signa alternabunt; nempe factores cœfficientis sequentis duo negativi et sequentis tres negativi &c., ingrediuntur.

Pro $(1-x)^e$ cœfficiens ipsius x est negativus propter $-x$, et ad exponentem imparem semper negativus erit et positivus ad parem eousque, dum ex e ipso maius subtrahitur, et fractio vera negativa factores cœfficientis prima vice ingreditur; abinde vero erunt vel omnes positivi vel omnes negativi; nempe si factor negativus ad exponentem imparem ipsius $-x$ nascatur, terminus is positivus erit (propter duos factores negativos),

Hosted by Google

et sequens quoque ex exponente pari et numero factorum negativorum pari positivus fiet, et ita porro. Si vero id ad exponentem parem fiat, terminus is negativus erit, et sequens quoque e potentia impari ipsius $-x$ et numero factorum negativorum pari negativus erit &.

Pro $(1+x)^{-e}$ fient termini ad exponentem imparem negativi et positiv ad parem; uti pro $(1+x)^{-e}$ et $e<1$ (in 1.).

Pro $(1-x)^{-e}$ erit cœfficiens ipsius x positivus, uti omnes sequentes: nam ad exponentem imparem, erit factorum negativorum numerus impar, et par ad parem, uti erat pro $e<1$ et $(1-x)^{-e}$.

3. Relatis omnibus casibus, facile patet, quod *cuiusvis serierum harum (excepto, si x non $\lessdot 1$ est) terminus tendit ad 0 et summa limitem habet.*

Nam dicatur generaliter exponens E, et id per quod cœfficiens multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens coefficientis*, id vero per quod seriei terminus multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens seriei*; quo pacto exponens cœfficientis erit

$$\frac{E-\mu}{\mu+1},$$

exponens seriei vero

$$\frac{E-\mu}{\mu+1}\cdot\pm x,$$

prouti $1+x$ vel $1-x$ elevatur.

Si E positivum sit, sive >1, sive <1, dicatur $-f$ prima fractio vera negativa, quam $E-\mu$ dat. Nempe si $E<1$, pro $\mu=0$ est $E-\mu<1$ et pro $\mu=1$ est $E-\mu$ negativum et $\lessdot 1$; ita si $E>1$, aliquando prodit fractio vera positiva et postea statim negativa fit. Est vero tum (pro dicto μ) exponens cœfficientis

$$\frac{-f}{\mu+1}\lessdot 1,$$

et postea quivis per

$$\frac{-f-m}{\mu+1+m}$$

exprimi potest, qui item $\lessdot 1$, quia numerator $\lessdot$ denominatore.

Hosted by Google

Crescit quidem hic exponens (semper $\lessdot 1$) signo — sublato, et tendit ad -1. Nam sequens est

$$= \frac{-f-m-1}{\mu+2+m},$$

adeoque duo proximi (per -1 multiplicati) per $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\alpha+1}{\beta+1}$ exprimi possunt, quibus ad denominatorem eandem reductis numerator prioris manifesto est minor, cum $\alpha < \beta$ sit; at si $\mu \backsim \infty$, ipsum $\frac{E-\mu}{\mu+1} \backsim -1$.

Consequenter ab illo termino, a quo exponens cœfficientis semper unitate minor est, exponens seriei semper $\lessdot x$ est.

Interim usquequo, pro E positivo et > 1, fuerit $E-\mu < 1$, si dentur termini, exponens cœfficientis decrescit eousque. Nam sint duo proximi

$$\frac{E-m}{m+1} \quad \text{et} \quad \frac{E-m-1}{m+2};$$

erit numerator uterque positivus, et priore $\alpha+1$ dicto posterior α erit, adeoque (pro $m+1=\beta$) est

$$\frac{\alpha+1}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta+1}$$

Si E negativum et $\lessdot 1$ sit, tunc iam primus cœfficiens est $E=-f$; atque abinde omnia ut prius valent.

Si vero E negativum et $\gtrdot 1$, sit

$$E=-e, \quad \text{et} \quad x=\frac{l}{L}, \quad \text{atque} \quad L=l+k.$$

Decrescit tum signo — sublato exponens cœfficientis (semper $\gtrdot 1$); nam

$$\frac{-e-\mu}{\mu+1} \gtrdot \frac{-e-\mu-1}{\mu+2}.$$

Ceteroquin $\frac{E-\mu}{\mu+1} \backsim -1$, si $\mu \backsim \infty$.

Seriei ipsius exponens vero fit a certo termino incipiendo fractio vera et quidem semper decrescens et tendens ad limitem $-\frac{l}{L}$. Datur enim tale μ, ut

Hosted by Google

$$\frac{-e-\mu}{\mu+1}\cdot\frac{l}{L}<1$$

sit; fiet hoc, si

$$(e+\mu)\,l<(\mu+1)\,L;$$

seu pro certo p positivo sit

$$e\,l+\mu\,l+p=\mu\,L+L,$$

quod fit pro

$$\mu=\frac{le+p-L}{L-l}=\frac{le+p-l-k}{k}=\frac{le+p-l}{k}-1,$$

ubi positivum p quantumvis accipere licet. Adeoque si p crescere a 0 concipiatur, ubi expressio prima vice integrum positivum dabit, illud erit primum quæsitum μ, atque abinde seriei exponens (<1) semper decrescet; nam

$$\frac{e+\mu}{\mu+1}>\frac{e+\mu+1}{\mu+2}\quad\text{et}\quad\frac{-e-\mu}{\mu+1}\,\frac{l}{L}>\frac{-e-\mu-1}{\mu+2}\,\frac{l}{L}.$$

In prioribus casibus itaque exponens seriei a certo termino α incipiendo semper $<x$ est. Adeoque, cum si $x<1$, etsi ubique exponens $=x$ esset, $\alpha x^m \backsim 0$, si $m \backsim \infty$ (pag. 150.), etiam terminus seriei tendit ad 0. Atque si summa terminorum usque ad α exclusive sit a, etsi omnes termini positivi essent, summa quotvis terminorum maneret (p. 150.)

$$<a+\frac{\alpha}{1-x};$$

nam sequens terminus est $<\alpha x$, postea sequens $<\alpha x^2$ etc. Unde ubicunque subsistatur post α ex. gr. ad terminum t error erit $<\frac{t}{1-x}$.

In postremo casu quoque, si b sit terminus, in quo terminus seriei fractio vera f fit deinde semper decrescens, manifesto $b f^m \backsim 0$, si $m \backsim \infty$; adeoque et terminus seriei tendit ad 0. Atque si summa usque ad b (exclusive) β dicatur, erit summa terminorum quotvis (etsi omnia positiva essent)

$$<\beta+\frac{b}{1-f};$$

nam terminus sequens est $<bf$, postea sequens $<bf^2$ &c.

Hosted by Google

4. *Sed gaudet etiam summa cuiusvis harum serierum limite.* Nam si ab aliquo saltem signo omnes termini positivi vel omnes negativi sint, patet, quum crescat manens tamen certo finito minor. In omni alio casu vero (per præcedentia) signa ab aliquo termino alternabunt; sit A summa usque ad alternantium terminum quendam positivum (hunc excludendo), et accipiantur abinde quotvis paria; erit summa cuiusvis paris (cum terminus quilibet $\succ$ sequente sit) positiva, adeoque A semper incrementa capit, nunquam tamen finitum supra dictum attingens; sit itaque (per pag. 55.) limes S, et sit s summa ipsius A cum summa quotvis parium, atque sit t terminus paria addita excipiens. Erit

$$S - s \backsim 0,$$

et quia $t \backsim 0$, etiam

$$S - (s + t) \backsim 0;$$

adeoque s et $s + t$ utrumque tendit ad limitem S.

5. *Inquirendum etiam, num*

$$1 + ex + \frac{e(e-1)}{2}x^2 + \ldots \backsim (1+x)^e,$$

quodlibet ipsorum x et e sive positivum, sive negativum denotet.

Sit prius $x \prec 1$, et $e = \frac{\pm n}{m}$ (pro n et m integris); id tantum demonstrandum erit, quod

$$\left(1 + ex + \frac{e(e-1)}{2}x^2 + \ldots\right)^m \backsim (1+x)^{\pm n},$$

nam tum (p. 104.)

$$1 + ex + \frac{e(e-1)}{2}x^2 + \ldots \quad \backsim (1+x)^{\frac{\pm n}{m}}.$$

Patebit statim pro quovis reali r, quod si

$$1 + ex + \frac{e(e-1)}{2}x^2 + \ldots \backsim s$$

et

$$1 + rex + \frac{re(re-1)}{2}x^2 + \ldots \backsim S$$

Hosted by Google

etiam

$$1+(r+1)ex+\frac{(r+1)e\big((r+1)e-1\big)}{2}x^2+\ldots \backsim Ss,$$

nempe in prima serie substituto ipsi e ubique re pro secunda serie et $(r+1)e$ pro tertia.

Dicatur s' summa seriei prioris usque ad terminum (inclusive) in quo x^μ est, secundæ sit S', tertiæ sit summæ limes Σ et summa usque ad x^μ inclusive Σ'. Prodibit

$$s'S=\Sigma'+\omega,$$

ubi ω tendit ad 0, si μ tendat ad infinitum. Atque tum $S-S'$ et $s-s'$ tendunt ad 0; adeoque $Ss-S's'$ tendit ad 0, atque etiam

$$Ss-(\Sigma'+\omega)=Ss-\Sigma'-\omega \backsim 0,$$

consequenter

$$Ss-\Sigma' \backsim 0;$$

sed etiam

$$\Sigma-\Sigma' \backsim 0;$$

erit igitur (p. 80.)

$$\Sigma=Ss.$$

Id ergo tantum demonstrandum est, quod usque ad x^μ series tertia rite exhibeat factum, atque ω, quod post x^μ ex $S's'$ prodit, tendit ad 0. Tunc enim ponatur prius 1 pro r, tum 2 et ita porro usque ad m, et prodibit prius s'^2, tum s'^3, et ita porro usque ad s'^m, prodibitque pro $r=m$

$$1+mex+\frac{me(me-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{me(me-1)\ldots(me-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}x^\mu,$$

quod pro $e=\frac{n}{m}$ est

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$=(1+x)^n.$$

Si vero pro e ubique $-\frac{n}{m}$ ponatur, manifesto $(1+x)^{-n}$ prodit.

Designetur hunc in finem cœfficiens seriei prioris tanto numero romano, quantus exponens ipsius x in illo termino est, ita in secunda et tertia

Hosted by Google

quoque eo discrimine, quod numerus romanus insigniatur in secunda uno accento, in tertia duobus, et consideretur quivis exponens ex. gr. 5 instar omnium.

Erit $V''=V'+IV'.I+III'.II+II'.III+I'.IV+V$; namque x^5 nonnisi e facto terminorum prodit, in quibus summa exponentium est 5, quod cum summa numerorum romanorum convenit.

Est

$$V'=\frac{re-4}{5}IV',\quad IV'=\frac{re-3}{4}.III',\quad III'=\frac{re-2}{3}.II',$$

$$II'=\frac{re-1}{2}.I',\quad I'=\frac{re}{1};$$

$$I=e,\quad II=\frac{e-1}{2}.I,\quad III=\frac{e-2}{3}.II,\quad IV=\frac{e-3}{4}.III,\quad V=\frac{e-4}{5}.IV.$$

Hinc substituendo superius in valore ipsius V'', est

$$IV'.I=\frac{re-3}{4}.III'.I;\quad III'.II=\frac{re-2}{3}.II'.II;$$

$$II'.III=\frac{re-1}{2}.I'.III;\quad I'.IV=re.IV;\quad V=V.$$

Consideretur porro, quod si $\frac{\alpha}{k}=\frac{\beta}{h}=u$, atque $k+h=l$ sit, tum $\frac{\alpha+\beta}{l}=u=\frac{\alpha}{k}$ sit; nempe

$$\frac{ku}{l}+\frac{hu}{l}=\frac{(k+h)u}{l}=\frac{lu}{l}=u$$

adeoque

$$\frac{k}{l}\cdot\frac{\alpha}{k}+\frac{h}{l}\frac{\beta}{h}=\frac{\alpha}{l}+\frac{\beta}{l}=\frac{\alpha+\beta}{l}=u=\frac{\alpha}{k}.$$

Erit hinc (quum $V'=\frac{re-4}{5}.IV'$),

$$IV'.I=\frac{re-3}{4}III'.I=IV'\frac{e}{1}=\frac{e}{5}IV'+\frac{re-3}{5}III'.I;$$

Hosted by Google

nam $1+4=5$, uti $k+h=l$ erat. Ita

$$III'.II=\frac{re-2}{3}II'.II=III'.\frac{e-1}{2}I=\frac{e-1}{5}III'.I+\frac{re-2}{5}II'.II,$$

$$II'.III=\frac{re-1}{2}I'.III=II'.\frac{e-2}{3}II=\frac{e-2}{5}II'.II+\frac{re-1}{5}I'.III,$$

$$I'.IV=\frac{re}{1}.IV=I'.\frac{e-3}{4}III=\frac{e-3}{5}I'.III+\frac{re}{5}IV,$$

$$V=\frac{e-4}{5}.IV.$$

Unde pro valore ipsius V'', e quavis linea terminos duos posteriores accipiendo, pro $IV'.I$, $III'.II$, $II'.III$, $I'.IV$ terminis rite dispositis, oritur schema sequens:

$$V'=\frac{re-4}{5}IV',$$

$$IV'.I=\frac{e}{5}IV'+\frac{re-3}{5}.III'.I,$$

$$III'.II=\frac{e-1}{5}.III'.I+\frac{re-2}{5}.II'.II,$$

$$II'.III=\frac{e-2}{5}.II'.II+\frac{re-1}{5}.I'.III,$$

$$I'.IV=\frac{e-3}{5}.I'.III+\frac{re}{5}.IV,$$

$$V=\frac{e-4}{5}.IV.$$

Ubi in quavis columna patet numerum romanum factorem communem esse, et summam factorum sociorum esse $\frac{re+e-4}{5}$; nam ubi orti sunt hi valores, in termino cuiusvis lineæ ultimo numerus romanus convenit cum penultimo lineæ sequentis, atque ex e in quavis linea sequenti uno maius, ex re vero uno minus subtrahitur; quod etiam generaliter ostendi

Hosted by Google

potest. Denotent M, N numeros romanos ita $[M-1]$, $[N-1]$, $[N+1]$, nempe ita ut si ex. gr. $N=V$, $[N-1]$ denotet IV; m, n vero denotent numeros communes, significatione priore haud retenta, ita ut si ex. gr. M denotet V, denotet m tum 5, et accipiantur duo eiusmodi valores proximi ut antea, $M'N$ et $[M'-1][N+1]$; erit

$$M'N=\frac{re-(m-1)}{m}[M'-1]N=M'\frac{e-(n-1)}{n}[N-1],$$

$$[M'-1][N+1]=\frac{re-(m-2)}{m-1}[M'-2][N+1]=$$

$$=[M'-1]\frac{e-n}{n+1}N,$$

adeoque

$$M'N=\frac{e-n+1}{n+m}M'[N-1]+\frac{re-m+1}{n+m}[M'-1]N,$$

$$[M'-1][N+1]=\frac{e-n}{n+m}[M'-1]N+\frac{re-m+2}{n+m}[M'-2][N+1];$$

ubi prioris ultimo et posterioris penultimo est factor $[M'-1]N$ communis, ac summa factorum sociorum est

$$\frac{e(r+1)-(m+n-1)}{m+n}.$$

Facile etiam patet numeros romanos accento insignitos post alterum a summo semper uno decrescere in linea sequenti, et socium accento destitutum ad finem lineæ secundæ esse I, et uno crescere semper, donec in columna ultima summus numerus (heic IV) maneat sine accento, uti in prima idem cum accento uterque bis.

Itaque redeundo ad schema, ut res clarior fiat: substitutis ipsorum V', $IV'.I$, $III'.II$, ... valoribus erit

$$V''=\frac{e(r+1)-4}{5}(IV'+III'.I+II'.II+I'.III+IV)=\frac{e(r+1)-4}{5}.IV'';$$

nam erat $IV'+III'.I+II'.II+I'.III.+IV=IV''$.

Rite igitur prodire superius $S's'$ usque ad x^{μ}, applicando ad I'', II''... patet; ω vero, quod pro $\mu=5$ prodit, est

Hosted by Google

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
V.I' & x^6 + V.II' & x^7 + V.III' & x^8 + V.IV' & x^9 + V.V'\,x^{10}. \\
+ IV.II' & \quad + IV.III' & \quad + IV.IV' & \quad + IV.V' & \\
+ III.III' & \quad + III.IV' & \quad + III.V' & & \\
+ II.IV' & \quad + II.V' & & & \\
+ I.V' & & & &
\end{array}$$

Hoc autem tendit ad 0, si μ tendat ad infinitum. Accipiantur enim positive termini omnes in seriebus

$$1,\ I\,x,\ II\,x^2, \ldots, M\,x^m,\ \ldots, [2M]\,x^{2m},$$
$$1,\ I'x,\ II'x^2, \ldots, M'\,x^m, \ldots, [2M']\,x^{2m},$$

per M, M' cœfficientes ipsius $x^m, \ldots$ per $[2M]$, $[2M']$ vero cœfficientes ipsius x^{2m} intelligendo. Utraque series, etsi omnes termini positive accipiantur, limite gaudet (pag. 166.); sit

$$1 \mathbin{\dot{+}} I\,x \mathbin{\dot{+}} II\,x^2 \mathbin{\dot{+}} \ldots \backsim A,$$
$$1 \mathbin{\dot{+}} I'x \mathbin{\dot{+}} II'x^2 \mathbin{\dot{+}} \ldots \backsim A'.$$

Pro quibusvis datis $\varkappa$ et λ positivis potest utraque series ad tantum exponentem eundem usque sumi, ut si summa prioris usque ad x^m (inclusive) dicatur u et u' posterioris, atque $\overset{*}{u}$ prioris usque ad x^{2m} et $\overset{*}{u}'$ posterioris, tam $A - u$ quam $A' - u'$ sit $\lhd \varkappa$, et $AA' - u\,u' \lhd \lambda$.

Est vero

$$AA' \rhd \overset{*}{u}\,\overset{*}{u}' \rhd u\,u',$$

itaque

$$\overset{*}{u}\,\overset{*}{u}' - u\,u' \lhd \lambda.$$

Estque porro in $u\,u'$ summa potentia in facto partiali $MM'\,x^{2m}$ (neque in ullo alio amplius tanta est). Itaque si ω' dicatur summa omnium factorum partialium illorum, in quibus exponens ipsius x excedit $2m$, quum omnia positive accipiantur, erit ω' pars ipsius $\overset{*}{u}\,\overset{*}{u}' - u\,u'$; nam in hoc adsunt etiam illa, quæ adhuc (uti e schemate videtur) deficiunt ultra x^m usque ad x^{2m}. Est igitur $\omega' \lhd \lambda$.

Sed facta illa partialia, quæ ultra x^{2m} prodeunt (per multiplicationem serierum usque ad x^{2m} sumtarum), sunt præterquam, quod heic omnia

Hosted by Google

positive accepta sint, plane eadem; consequenter si horum summa ω dicatur, ac omnium terminorum positive acceptorum summa $\omega' \lessdot \lambda$ fuerit, et signis terminorum mutatis erit $\omega \lessdot \lambda$; atque si $2m = \mu$ sit, et μ tendat ad infinitum, $\omega \backsim 0$.

Consequenter omnibus, quæ superius requirebantur, demonstratis, pro $x \lessdot 1$ et $e = \pm \frac{n}{m}$ est

$$(1+x)^e = 1 + ex + \frac{e(e-1)}{1.2} x^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

Unde etiam (pag. 158.)

$$(a+b)^e = a^e + e\,a^{e-1} b + \frac{e(e-1)}{1.2} a^{e-2} b^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} a^{e-3} b^3 + \ldots,$$

si $b \lessdot a$.

6. Si vero $b \gtrdot a$, idest $x = \frac{b}{a} \gtrdot 1$, tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit. Nam $(1+x)^e$ determinato finito valore gaudet; si vero $x = \frac{k}{h}$ et $k \gtrdot h$, fiet summa terminorum omni dabili maior. Nam terminus n-tus erit

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-(n-1))}{1.2\ldots n} \frac{k^n}{h^n} = \frac{ek}{1h} \cdot \frac{(e-1)k}{2h} \cdots \frac{(e-(n-1))k}{nh}$$

et exponens seriei per $\frac{e-n}{n+1} \frac{k}{h}$ exprimi potest; fit vero $e-n$ aliquando negativum et ab illo termino incipiendo aut est $\frac{e-n}{n+1}$ semper unitate maius aut quovis dato, quod $\lessdot 1$, maius, adeoque exponens seriei unitate maior fit et abinde semper crescens tendit ad $-\frac{k}{h}$. Nam si e negativum et unitate maius est, exponens cœfficientium semper unitate maior est; si non, et per $\frac{e-n}{n+1}$ exprimatur, pro quavis fractione vera positiva f, quæ $\gtrdot \frac{h}{k}$, fit

$$\frac{e-n}{n+1} \frac{k}{h} \gtrdot 1,$$

si $n \gtrdot \frac{e+f}{1-f}$; nam pro

$$\frac{e-n}{n+1} = -f$$

Hosted by Google

prodit

$$n = \frac{e+f}{1-f},$$

ubi n pro f positivo et unitate minore (si $f \triangleright e$ accipiatur pro casu, si e negativum et unitate minus sit) prodit positivum, uti esse debet; crescente autem n crescit $\frac{n-e}{n+1}$. Atque si

$$f = \pm \frac{h+\lambda}{k}$$

(ita ut h et λ utrumque positivum aut utrumque negativum sit), est

$$\pm f \frac{k}{h} = \pm \frac{h+\lambda}{k} \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} \triangleright 1.$$

Si iam ab aliquo termino incipiendo omnes termini positivi aut omnes negativi sint, manifesto series tenderet ad infinitum. Si non, tum ab aliquo termino incipiendo (ubi iam exponens seriei unitate maior factus est) signa alternabunt; sit terminus aliquis A negativus, sequens B positivus, postea C negativus, D positivus, atque considerentur $A+B$ et $C+D$.

Exprimi B potest per $A \frac{e-n}{n+1} \frac{k}{h}$ et D per $C \frac{e-n-2}{n+3} \frac{k}{h}$, estque

$$A+B = A\left(1 - \frac{n-e}{n+1} \frac{k}{h}\right) \quad \text{et} \quad C+D = C\left(1 - \frac{n+2-e}{n+3} \frac{k}{h}\right);$$

in utraque parenthesi negativum prodit et maius in posteriore, si pro $x = \frac{k}{h}$ positivo sit e positivum, nec integrum, vel negativum et unitate minus.* Præterea $C \triangleright A$, adeoque incrementa semper nova accedunt cum quovis novo pari, et quidem semper maiora.

E pag. 161—163 signa nonnisi pro $(1+x)^e$ et $(1+x)^{-e}$ alternant. Itaque nonnisi de $(1+x)^e$, ubi e negativum et $\triangleright 1$, quæstio fit pro $x = \frac{k}{h}$ et $k > h$, (k et h positivis). Sit

$$x = 1 + q$$

* Nam $\frac{n-e}{n+1}$, quod crescens et ad 1 tendens, maius quam $\frac{h}{k}$ sit, et $\frac{n+2-e}{n+3}$ consideranda veniunt. Accipiatur nempe pro e positivo et > 1, n tantum ut sit $> e$; atque tum patet $\frac{n-e}{n+1} < 1$ esse, uti pro $e \triangleleft 1$ est $\frac{n-e}{n+1} < 1$; est autem in casu utroque $n-e$ positivum; adeoque numeratori fractionis veræ positivo addendo $+2$ et denominatori positivo addito $+2$ maius prodit. Nempe in utraque parenthesi terminus ad dextram negativus et $\triangleright 1$ est; adeoque addito 1 maius negativum in secunda manet.

Hosted by Google

et

$$\frac{e-n}{n+1} = -1 - Q,$$

pro Q positivo; accipiaturque n tantum, ut sit

$$Q < 2q \quad \text{et} \quad Q < q^3;$$

quod fieri potest, quum $\frac{e-n}{n+1}$ tendat ad -1.

Sint termini eiusmodi signis alternantibus A, B, C, D se invicem excipientes, sitque A positivum, B negativum, C positivum, D negativum; exprimentur hi per

$$A, \quad A\frac{e-n}{n+1}x, \quad A\frac{(e-n)(e-n-1)}{(n+1)(n+2)}x^2, \quad A\frac{(e-n)(e-n-1)(e-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}x^3;$$

eritque factor ipsius Ax^2 positivus, quum A et C positiva sint, factor ipsius Ax^3 autem negativus est, quum A et x positivum, D vero negativum sit.

Est autem A tam in duobus prioribus, quam in duobus posterioribus factor communis; estque summa factorum sociorum in duobus prioribus, substituendo valores dictos:

$$1 + \frac{e-n}{n+1}x = -Q - Qq - q;$$

in duobus postremis autem, si in postremo pro $\frac{e-n-2}{n+3}$, quod > -1, tantum -1 ponatur, summa factorum sociorum ipsius A erit

$$> (-x^3 + x^2)\frac{(e-n)(e-n-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Est autem, substituto valore ipsius x,

$$x^2 - x^3 = -q - 2q^2 - q^3,$$

quod per valorem suppositum ipsius n

$$> -q - Qq - Q$$

est. Fit vero adhuc maius negativum, si per coefficientem positivum multiplicetur; fieritque adhuc maius, si pro -1 poneretur $\frac{e-n-2}{n+3}$.

Ita si $a = b$, facile patet formulam nonnisi pro casibus particularibus valere.

Hosted by Google

7. Notandum autem incrementis decrescentibus, imo ad limitem 0 tendentibus etiam posse summam omni dabili maiorem fieri: ex. gr.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots \backsim \infty.$$

Si enim exponens seriei ab aliquo termino incipiendo semper abinde $\geqq 1$, et (ut antea in serie, cuius termini sunt $A+B$, $C+D\ldots$) idem omni dabili pluries accedit: summa seriei tendit ad ∞.

Si vero exponens seriei certa fractione vera f ab aliquo termino α incipiendo abinde nunquam maior fit, etsi semper crescat, summa inde erit $\leqq \frac{\alpha}{1-f}$, cui summa terminorum anteriorum addita, maius tota seriei summa prodit (pag. 151).

At si exponens seriei semper quidem unitate minor sit, sed semper crescat, neque tamen maneat certa fractione vera f minor, tum pro diversis casibus, summa finita aut infinita esse potest. Si pro certo b seriei ab aliquo a incipiendo tot termini accipi possint usque ad aliquem u, ut summa eorum (si exponens seriei illo, qui ad a est, dicto e constans maneret) non sit $\leqq b$, et post quodvis u (sequente termino a' et exponente, qui ibi est, e' dicto), detur talis terminus u', ut summa ab a' usque u' (si exponens constans e' maneret) non sit $\leqq b$, et summæ hæ signo eodem gaudeant, tum manifesto series tendit ad infinitum.

Pro

$$b=\frac{ue-a}{e-1}$$

esset (pag. 151.)

$$u=\frac{a+eb-b}{e};$$

adeoque si exprimantur u, a, e generaliter (pro serie tali aut in talem mutata, ut termini omnes adeoque et a, e, u, b positivi sint et semper sit

$$a+eb>b,$$

(ut u prodeat positivum) atque sit

$$\frac{a+eb-b}{e}<a,$$

Hosted by Google

nam $u < a$ propter exponentem unitate minorem est; tum summa seriei tendit ad infinitum.

Ex. gr. In serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

pro $a = \frac{1}{n}$ est $e = \frac{n}{1+n}$.

Sit $b = 1$; erit $a + eb > b$, nempe

$$\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} = \frac{n+1+n^2}{n^2+n} > 1,$$

atque

$$u = \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} - 1\right) : \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} : \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n^2}.$$

Si $a = \frac{1}{2}$, erit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1,$$

et si $a = \frac{1}{5}$, erit

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{5^2} > 1$$

et ita porro, adeoque prodit

$$1 + 1 + 1 + \ldots \backsim \infty.$$

Pro $b = \frac{7}{8}$, erit primum

$$u = \frac{a + eb - b}{e}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{7}{8} - \frac{7}{8}\right) : \frac{2}{3} = \frac{15}{48};$$

sed in quovis seriei termino numerator 1 est; atque si $\frac{15}{48}$ ad numeratorem 1 reducatur, fiet $\frac{15}{48} = \frac{1}{3 + \frac{3}{15}}$ unde quum u sit $< \frac{1}{3}$, si series usque ad $\frac{1}{3}$ summetur, prodibit ipso b maius.

Hosted by Google

Series $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ e facto numerorum naturalium $1, 2, 3, \ldots$ per $2, 3, 4, \ldots$ diviso oritur: nempe

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Unde etiam

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \backsim 0,$$

si $n \backsim \infty$; imo ubicunque incipiendo, ex. gr.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{3}{n+1} \backsim 0.$$

Criterium divergentiæ aliter exponi potest. Pro

$$U_n = U_{n-1} \frac{n-m}{n}$$

est

$$m = n \frac{U_{n-1} - U_n}{U_{n-1}};$$

et si $\frac{n U_{n-1}}{m}$ sive $\frac{U_{n-1}^2}{U_{n-1} - U_n}$ non gaudeat limite 0, series divergit. Si vero ab aliquo termino porro m semper positivum et maius certo unitatem superante manet, series convergit.

Notandum vero quoad m, primum ipsius n valorem ibi accipi, ubi n prima vice $\succ m$ est. Pro $m = 1$, si primus terminus $= 1$ pronatur, fit

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

et pro $m = 2$, si duo priores termini 1 et $\frac{1}{2}$ accipiantur, fit

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots$$

Quo maius m vero, eo maius subtrahitur ex n, eoque fit exponens minor, terminique minores; decrescenteque m contrarium evenit.

Hosted by Google

8. *Si* $\frac{n}{m}$ *tendit ad* q, *est*

$$(a+b)^q = a^q + qa^{q-1}b + \frac{q(q-1)}{2}a^{q-2}b^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{2.3}a^{q-3}b^3 + \ldots$$

Nam si duæ series fuerint, una terminorum constantium

$$a+b+c+\ldots = \text{ vel } \backsim A,$$

altera

$$a'+b'+c'+\ldots = \text{ vel } \backsim A',$$

et quotvis termini accipiantur prioris, totidem posterioris; si quivis n-tus terminus huius dicatur t', priorisque n-tus t sit, fieri possit pro dato quovis $\alpha = \frac{A}{N}$

$$\frac{t'}{t} - 1 \lessdot \frac{1}{N};$$

et quidem id pro omnibus t et t' simul sit: tum $A = A'$

Namque tum (si ex. gr. termini usque ad f, f' accipiantur),

$$\frac{a'}{a} \backsim 1, \quad \frac{b'}{b} \backsim 1, \quad \frac{c'}{c} \backsim 1, \ldots \frac{f'}{f} \backsim 1;$$

et (pag. 93 sub 5.)

$$\frac{a'+b'+c'+\ldots+f'}{a+b+c+\ldots+f} \backsim 1;$$

atque

$$\frac{a'+b'+c'+\ldots+f'}{a+b+c+\ldots+f} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

fieri potest: adeoque

$$a'+b'+\ldots+f' - (a+b+\ldots+f) \lessdot \frac{a+b+\ldots+f}{N}$$

quod

$$\lessdot \frac{A}{N} = \alpha$$

est. Itaque quotvis terminorum seriei

$$a'+b'+c'+\ldots$$

Hosted by Google

summæ, quæ tendit ad A', differentia ab A quovis dabili minor fieri potest. Unde patet.

Notandum vero, inde quod si duæ series sint totidem terminorum sibi invicem respondentium, et cuiusvis termini differentia ab ei respondenti tendit ad 0, non sequi, summas serierum esse æquales.

Ex. gr.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots$$

non est æquale

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots,$$

si ex. gr. utrumque ex n terminis constet; erit nempe prius $= 1$, posterius $= \frac{1}{2}$, quamvis.

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \backsim 0, \quad \text{si} \quad n \backsim \infty.$$

Applicando hoc ad $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ et $(1+x)^q$, in quovis termino prioris præter potentiam ipsius x nonnisi cœfficiens

$$\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)\ldots}{2.3\ldots}$$

adest; et si hic per

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots}{2.3\ldots}$$

dividatur, quotus pro dato quovis N fieri $< 1 + \frac{1}{N}$ potest; nam

$$\frac{n}{m} : q, \quad \left(\frac{n}{m}-1\right) : (q-1), \quad \left(\frac{n}{m}-2\right) : (q-2), \ldots$$

quodvis $< 1 + \frac{1}{N}$ fieri potest, itaque et factum e factoribus eiusmodi; $2, 3 \ldots$ in utroque denominatore adesse patet.

Hinc si termini ipsius $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ sint

$$a' + b' + \ldots = S',$$

terminique iidem substitituto q ipsi $\frac{n}{m}$ sint

$$a + b + \ldots = S,$$

Hosted by Google

fiet

$$\frac{a'}{a} - 1 < \frac{1}{N}, \quad \frac{b'}{b} - 1 < \frac{1}{N}, \ldots$$

seu

$$a' - a < \frac{a}{N}, \quad b' - b < \frac{b}{N}, \ldots$$

adeoque

$$a' + b' + \ldots - (a + b + \ldots) < \frac{a + b + \ldots}{N},$$

seu

$$S' - S < \frac{S}{N}.$$

Consequenter quum S' et S limite gaudeant, si ii $S' + z'$ et $S + z$ sint, erit $S' + z' = S + z$, quia $z', z, \frac{S}{N}$ tendunt ad 0.

Quod vero pro quovis N detur pro quotvis terminis idem m, patet sic. Dicatur generaliter ν integer ex $\frac{n}{m}$ subtrahendus, ut pro $q = \frac{n}{m} + \omega$ sit

$$\frac{\frac{n}{m} - \nu}{\nu + 1} : \frac{\frac{n}{m} + \omega - \nu}{\nu + 1} - 1 < \frac{1}{N};$$

debet esse

$$\frac{\frac{n}{m} - \nu}{\frac{n}{m} + \omega - \nu} - 1 < \frac{1}{N},$$

id est

$$\frac{-\omega}{q - \nu} < \frac{1}{N},$$

et si $\omega = \frac{k}{m}$, pro quovis ν debet esse

$$\frac{k}{m(q - \nu)} < \frac{1}{N},$$

unde

$$\frac{k}{m} < \frac{q - \nu}{N}.$$

Itaque inter omnia ν, quæ inter terminos datos adsunt, illud accipiendum est, quod quotum $\frac{q - \nu}{N}$ minimum reddit, et si ω illo minus reddatur,

Hosted by Google

tum pro illo m quivis quotus eiusmodi (ut antea) fit $\lessdot 1+\frac{1}{N}$; adeoque et factum ex eiusmodi factoribus est $\lessdot 1+\frac{1}{N'}$, pro certo $N>N'$.

9. Denique omnibus, quæ de elevatione binomii $a+b$ dicta sunt, mutatis mutandis, ad $a+b\sqrt{-1}$ applicatis facile patet, formulam generaliter valere, si $b\lessdot a$; (ita si ponatur $b\sqrt{-1}+a$, et $a\lessdot b$ sit).

Nempe

$$(1+x\sqrt{-1})^q=1+x\sqrt{-1}-\frac{q(q-1)}{2}x^2-\frac{q(q-1)(q-2)}{2\cdot 3}x^3\sqrt{-1}+$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{q(q-1)\ldots(q-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5\sqrt{-1}+\ldots$$

ubi tam summa realium, quam pure imaginariorum limite gaudet, quum etsi omnia realia et positiva essent, limitem haberent, tam termini reales seorsim, quam ubi $\sqrt{-1}$ factor est; nempe ad exponentem parem termini reales sunt, et imaginarii ad imparem; et horum per superiora factore communi $\sqrt{-1}$ omisso summæ limes datur, qui per $\sqrt{-1}$ multiplicatus limes summæ imaginariorum erit.

10. Si exponens binomii sit fractio vera $\frac{n}{n+\nu}$, erit pro $n+\nu=p$ cœfficiens μ-tus

$$\frac{n}{p}\cdot\frac{-\nu}{2p}\cdot\frac{-2\nu-n}{3p}\cdot\frac{-3\nu-2n}{4p}\cdots\frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{\mu p}.$$

Nam

$$\frac{n}{n+\nu}-1=\frac{n-n-\nu}{n+\nu}=\frac{-\nu}{n+\nu},$$

et

$$\frac{n}{n+\nu}-(\mu-1)=\frac{n-n\mu+n-\nu\mu+\nu}{n+\nu}=\frac{2n-\mu n+\nu-\mu\nu}{n+\nu}=$$
$$=\frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{n+\nu}.$$

Ex. gr., si $b\lessdot a$ est

$$\sqrt{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b-\frac{1.1}{2.4}a^{-\frac{3}{2}}b^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}a^{-\frac{5}{2}}b^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}a^{-\frac{7}{2}}b^4+\ldots$$

Idem ad alios exponentes applicari posse patet.

Hosted by Google

XXXVI. Si porro in $(1+x)^n$ sit $x=\frac{1}{m}$, erit

$$(1+x)^n=\left(\frac{m+1}{m}\right)^n,$$

quod (pag. 102, sub 8.) tendit ad ∞, si $n \backsim \infty$, uti

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^n \backsim 0.$$

Sed

1. *Quidsi etiam $m \backsim \infty$, ab n certimodo dependens?*

Sit casus simplicissimus: nempe sit n integer positivus et $=m$; fiet tum

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.n^3}+\ldots.$$

quod pro $n \backsim \infty$

$$\backsim 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots.$$

at series prior manet ista semper minor; nam quotusvis terminus ex. gr. p-tus sumatur, primum non annumerando, erit is

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2.3\ \ldots\ p.n^p}$$

per ei respondentem, nempe per $\frac{1}{2.3\ldots p}$ divisus

$$\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-p+1}{n},$$

quod tendit ad 1, nam

$$\frac{n}{n}=1,\ \frac{n-1}{n}-1=\frac{-1}{n}\backsim 0,\ldots$$

ita etiam

$$\frac{n-p+1}{n}-1=\frac{1-p}{n},$$

quod item tendit ad 0, quum n pro illo p utvis augere liceat; itaque usque ad quotumvis terminum p-tum accipiatur summa, pro dato quovis ω ita accipi n potest, idem pro omnibus, nempe maximum eorum, quem eorundem aliquis requirit, ut quivis terminus seriei prioris a quovis ei respondente differat $<\frac{\omega}{p}$, adeoque omnes simul differant $<\omega$.

Hosted by Google

Interim series prior manifesto est $<$ posteriore; nam $\frac{n-1}{n}$ est <1, ita $\frac{n-p+1}{n}$ fractio vera est, adeoque terminus quivis p-tus prioris $<$ p-to posterioris.

Ita

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \backsim 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}-\ldots$$
$$=\frac{2}{2.3}+\frac{4}{2.3.4.5}+\frac{6}{2.3.4.5.6.7}+\ldots$$

Pariter

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nq}=1+\frac{nq}{n}+\frac{nq(nq-1)}{2n^2}+\frac{nq(nq-1)(nq-2)}{2.3.n^3}+\ldots$$
$$\backsim 1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\ldots,$$

qualevis reale, sive positivum, sive negativum denotet q.

Limes ad quem summa seriei.

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$$

tendit, plerumque litera e insignitur; atque *logarithmi*, qui huic basi superstruuntur, *naturales* dicuntur.

Unde, quum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ elevatum ad q tendit ad e^q et simul tendit ad

$$1+q+\frac{q^2}{1.2}+\frac{q^3}{1.2.3}+\frac{q^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

manifesto e^q per hanc seriem expressa est; cuius, summæ limitis logarithmus naturalis q est. Est nempe series ista convergens; cum quamtumvis sit q, aliquando fiet exponens seriei q divisum per integrum illo maiorem, postea semper crescentem.

2. Sed non tantum e logarithmo quantitas ei respondens, verum ex hac quoque eius logarithmus reperiri potest. Nimirum dari paulo inferius probabitur; sit u positivum et <1, atque nominetur α logarithmus ipsius $(1+u)$, nempe $e^\alpha=1+u$; erit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha<e^\alpha$, (nempe minus positivum); nam $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ (pag. 182 sub 1.), et α positi-

Hosted by Google

vum est, nam $e < 1$, adeoque ad exponentem quemvis negativum elevatum fit < 1; nempe $e^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, et radix quævis exponentis integri positivi e potentia quavis integra ipsius e est > 1. (pag. 102)

Est itaque

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots \backsim 1 + u > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha}$$
$$> 1 + \frac{n\alpha}{n} + \frac{n\alpha(n\alpha - 1)}{2n^2} + \ldots;$$

sed hoc quoque est > 1; erit enim $1 + \frac{1}{n}$ ad quemvis positivum exponentem elevatum > 1; ex. gr.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{1 + \frac{1}{n}} > 1$$

est. Sit id u', quo series posterior ipsum 1 superat, atque sit α semper $\frac{a}{n}$, nempe utcunque crescat n, ex. gr. si n fiat kn, fiat a tum ka, ut $\frac{ka}{kn} = \alpha$ sit. Erit tum

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a} = 1 + u',$$

et hinc

$$\frac{1}{n} = (1 + u')^{\frac{1}{a}} - 1,$$

atque

$$\alpha = \frac{a}{n} = a \,.\, \frac{1}{n} = a\left((1 + u')^{\frac{1}{a}} - 1\right);$$

consequenter est (pag. 172)

$$\alpha = a\left(1 + \frac{1}{a}u' + \frac{1}{a}\,\frac{1-a}{a}\,\frac{u'^2}{2} + \ldots - 1\right)$$
$$= u' + \frac{1-a}{a}\,\frac{u'^2}{2} + \frac{1-a}{a}\,\frac{1-2a}{a}\,\frac{u'^2}{2.3} + \ldots$$

atque, dum n tendit ad ∞,

$$\alpha \backsim u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots = \text{log. nat.}\,(1 + u).$$

Hosted by Google

Nam accipiantur item quotvis termini usque ad p-tum e priore, et dividatur quivis per ei respondentem e posteriore; quivis quotus tendit ad 1; ex. gr.

$$\frac{1-a}{a}\,\frac{u'^2}{2} : -\frac{u^2}{2} = \frac{2(1-a)}{2.a}\,\frac{u'.u'}{u.u},$$

ubi

$$\frac{1-a}{a} \backsim -1,$$

quia $\frac{a}{n}$ quidem est constans, sed dum $n \backsim \infty$, etiam $a \backsim \infty$; porro $\frac{u'}{u} \backsim 1$, nam $1+u' \backsim 1+u$; ita pro p-to termino est

$$\frac{1-a(1-2a)\ldots(1-(p-1)a)}{a\,.\,a\,\ldots\,a\,.}\,\frac{u'^p}{2.3\ldots p} : \frac{u^p}{p}$$

$$= \frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-2a}{a}\cdots\frac{1-(p-1)a}{a}\,\frac{u'^p}{u^p}\cdot\frac{p}{2.3\ldots(p-1)p}$$

quod tendit ad ± 1; nam

$$\frac{1-a}{a} \backsim -1,\ \frac{1-2a}{a} \backsim -2,\ldots\frac{1-(p-1)a}{a} \backsim -(p-1),\ \text{et}\ \frac{u'}{u} \backsim 1.$$

Ita datur eiusmodi exponens $-\beta$ (pro β positivo) ut $e^{-\beta} = 1-u$ (pro quovis u fractione vera positiva); nempe quum $e > 1$ sit, et $e^0 = 1$, 1 per positivam potentiam ipsius e divisum quodvis positivum producere potest, quod <1 est.

Eritque et hic ut antea, $\left(\text{pro } \beta \text{ semper} = \frac{b}{n}\right)$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{b}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{nb}{n}} \backsim e^{-\beta},$$

$$e^{-\beta} = 1-u = 1-\beta+\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^3}{2.3}+\ldots$$

Est nempe summa seriei huius limes summæ seriei

$$1-\frac{b}{n}+\frac{b(b-1)}{2n^2}-\frac{b(b+1)(b+2)}{2.3\,n^3}+\ldots = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

(plane ita uti superius). Est præterea (pag. 182.)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

Hosted by Google

adeoque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b}}<1,$$

atque valor eius per $1-z$ exprimi potest (pro z positivo et <1). Atque pro

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b}=1-z$$

erit

$$1+\frac{1}{n}=(1-z)^{-\frac{1}{b}},$$

adeoque

$$\frac{1}{n}=(1-z)^{-\frac{1}{b}}-1,$$

et

$$\beta=\frac{b}{n}=b\left((1-z)^{-\frac{1}{b}}-1\right)$$

$$=b\left(1+\frac{z}{b}+\frac{1}{b}\,\frac{1+b}{b}\,\frac{z^2}{2}+\frac{1}{b}\,\frac{1+b}{b}\,\frac{1+2b}{b}\,\frac{z^3}{2.3}+\ldots-1\right)$$

$$=z+\frac{1+b}{b}\,\frac{z^2}{2}+\frac{1+b}{b}\,\frac{1+2b}{b}\,\frac{z^3}{2.3}+\ldots;$$

quæ series plane ut antea

$$\backsim u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots,$$

nempe

$$\frac{z}{u}\backsim 1,\ldots$$

Consequenter est

$$-\beta=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\ldots=\log.\,\text{nat.}\,(1-u)$$

Unde cum sit

$$\alpha=\log.\,\text{nat.}\,(1+u)$$

et

$$-\beta=\log.\,\text{nat.}\,(1-u),$$

atque quantitas quævis positiva Q per $\frac{1+u}{1-u}$ exprimi queat, si $u=\frac{Q-1}{Q+1}$ ponatur, quod manifesto <1 est, erit inde

Hosted by Google

$$\text{log. nat. } Q = \text{log. nat. } \frac{1+u}{1-u} = \text{log. nat. } (1+u) - \text{log. nat. } (1-u)$$
$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots - \left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots\right)$$
$$= 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right).$$

Si apud $\frac{2u^\mu}{\mu}$ subsistere libeat, terminorum sequentium summam constat esse minorem eodem termino per $(1-u^2)$ diviso (pag. 150); nam quilibet exponens seriei in posterum est $< u^2$; nempe post $\frac{u^3}{3}$ est $\frac{3u^2}{5}$, postea $\frac{5u^2}{7}$ &c., adeoque semper $\lessdot u^2$, quod $\lessdot 1$ est, quia $u \lessdot 1$.

Alias series citius convergentes vide infra, una cum applicationibus earundem.

3. Sit $e^c = C$; erit $C^b = e^{cb} = C' = 1 + cb + \frac{c^2b^2}{2} + \ldots$, et est

$$cb = \text{log. nat. } C',$$
$$c = \text{log. nat. } C,$$
$$b = \text{log. } C' \text{ (quoad basim } C);$$

diciturque b, si c non est $= 1$, *logarithmus artificialis*.

Ita

$$C^k = e^{ck} = C'' = 1 + ck + \frac{c^2k^2}{2} + \ldots$$

et $k = \text{log. art. } C''$ quoad eandem basim C; atque $\frac{1}{c}$ nempe per quod logarithmus naturalis multiplicatus dat logarithmum artificialem (heic pro basi C) dicitur *modulus systematis*, cuius basis C est; estque

$$\text{modulus} = \frac{1}{\text{log. nat. } C} = \frac{1}{c}.$$

Si $c = 1$, est $\frac{1}{c} = 1$ et $\frac{1}{\text{log. nat. } e} = 1$ est modulus systematis naturalis; nempe log. e, quoad basim e est 1, quia $e^1 = e$.

Unde si modulus dicatur μ, est

$$\mu = \frac{1}{\text{log. nat. } C},$$

Hosted by Google

et hinc

$$\frac{1}{\mu} = \text{lognat } C,$$

adeoque

$$e^{\frac{1}{\mu}} = C;$$

et inde basis C innotescit, nam

$$e^{\frac{1}{\mu}} = 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{2.3\mu^3} + \ldots$$

Si vero fuerint qualesvis duæ bases B et C, et log. N, quoad B sit b, et log. N, quoad C sit c, erit $b:c = \log. C : \log. B$, quoad quamvis basim eandem accipiantur logarithmi basium C, B. Nam tum $B^b = C^c$; et hinc $b \log. B = c \log. C$ (pag. 110).

Notandum etiam, quod

$$\log.(1-u) = -\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\right),$$

quod, si u tendat ad 1, erit

$$\backsim -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = -\infty$$

(pag. 175), atque tum $1-u \backsim 0$ et sensu (pag. 46) fit $\log. 0 = -\infty$.

XXXVII. 1. Si in præc. in serie ipsum e^{cb} exprimenti substituatur ipsi cb quantumvis reale α vel β, sive positivum sive negativum, sive $\alpha+\beta$, vel $\alpha-\beta$ aut $\alpha\beta$, vel $\alpha:\beta$, quævis eiusmodi series ad limitem tendit; excepto si ipsi cb plane 0 substituatur, tunc enim primus terminus est 1, reliqui omnes 0. Imo si

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots \backsim A,$$

$$1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} + \ldots \backsim B$$

erit etiam

$$1 + (\alpha+\beta) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} + \frac{(\alpha+\beta)^3}{2.3} + \ldots \backsim AB,$$

Hosted by Google

atque

$$1+(\alpha-\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{2.3}+\ldots \backsim \frac{A}{B}.$$

Nam $e^\alpha = A$, $e^\beta = B$, $e^\alpha . e^\beta = AB = e^{\alpha+\beta}$; et $e^\alpha : e^\beta = A : B = e^{\alpha-\beta}$; atque $e^{\alpha+\beta}$ est limes seriei prioris, $e^{\alpha-\beta}$ autem posterioris.

Ita

$$(e^\alpha)^\beta = e^{\alpha\beta} = 1+\alpha\beta+\frac{(\alpha\beta)^2}{2}+\frac{(\alpha\beta)^3}{2.3}+\ldots$$

et

$$\sqrt[\beta]{e^\alpha} = e^{\frac{\alpha}{\beta}} = 1+\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 : 2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 : 2.3+\ldots$$

2. Quum hæc ita sint, facile succurrit quærere: quidsi ipsi α, aut etiam β, $r+j$ aut $R+I$ substitueretur, pro R, r realibus, et I, j pure imaginariis; num series eædem tum quoque ad limitem tenderent? et an una per alteram multiplicata, aut divisa &, series eiusmodi ut prius producant?

Sit prius $r=0$, et sit ex. gr. $j=2\sqrt{-1}$; si in serie ipsius e^α, ipsi α substituatur j, fiet $1+2\sqrt{-1}-\frac{4}{2}-\frac{8\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{16}{2.3.4}+\ldots$, et terminorum realium seorsim addendorum, exponens seriei primus est $-\frac{4}{2}$, pure imaginariorum vero est $-\frac{-4}{2.3}$, et postea in utroque, si factor ultimus μ sit in denominatore termini, exponens est $\frac{-4}{(\mu+1)(\mu+2)}$; unde quum numerator constans sit, et $\mu \backsim \infty$, manifesto in aliquo termino primum fiet exponens seriei fractio vera, quæ in posterum quoque semper decrescet; præterea vero terminorum signa in serie utraque alternant; et quilibet maior sequenti atque terminus utriusque $\backsim 0$; itaque ut supra series utraque tam realium quam imaginariorum gaudet limite; adeoque et summa totalis seriei totius.

Ponatur iam $a+b\sqrt{-1}$ pro a, b realibus in locum ipsius α. Si $a+b$ poneretur, summa quotvis terminorum, etsi omnia positive accipiantur, certo finito minor maneret; accedente $\sqrt{-1}$ autem termini manent iidem, præterquam quod quidam signum mutent, quidam factore $\sqrt{-1}$ afficiantur. Itaque et horum summa manet priore finito minor; adeoque tam pars realis quam imaginaria, nisi constans sit, limite gaudet.

Quod multiplicationem serierum eiusmodi attinet; absque eo, ut

Hosted by Google

resultato, quod sub signis generalibus α, β pro casu realitatis prodit, deducatur; e multiplicatione serierum immediata patet sic. Accipiantur termini numero m, tam in

$$\alpha^0 + \alpha^1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots + \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m},$$

quam in

$$\beta^0 + \beta^1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} + \ldots + \frac{\beta^m}{2.3\ldots m};$$

atque instituatur multiplicatio; 1 et potentiæ omnes ipsius α, multiplicabuntur per 1 et potentias omnes ipsius β (usque ad m-tam); adeoque prius prodibit 1, præterea prodibit (pro quovis integro positivo μ quod non $> m$) terminus quivis ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$, divisus per $2.3\ldots\mu$; et quod præterea prodit, $\backsim 0$, dum $m \backsim \infty$. Sit enim generaliter (denotante μ numerum quemvis ab 1 usque ad m inclusive) $\mu = p + q$ pro p, q integris positivis; cuiusvis termini ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$ forma est

$$\frac{\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-q+1)}{2.3\ldots q}\alpha^p\beta^q,$$

ubi $\mu - q + 1 = p + 1$, uti facile e quovis exemplo patet; exsurget vero e termino, in quo α^p est, per terminum, in quo β^q est (quod nonnisi semel est),

$$\frac{\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots p.2.3\ldots q};$$

atque hic erit plane terminus unicus ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$, in quo $\alpha^p\beta^q$ est, per $2.3\ldots\mu$ divisus, uti forma seriei ostendit. Nam multiplicentur numerator denominatorque ipsius $\frac{\alpha^p}{2.3\ldots p}$ per

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-q+1) = (p+1)(p+2)\ldots(\mu-2)(\mu-1)\mu;$$

erit

$$\frac{\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots p.2.3\ldots q} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-q+1)\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots q} : 2.3\ldots p(p+1)\ldots\mu;$$

qui plane terminus superior generalis est, per denominatorem terminis

Hosted by Google

ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$ omnibus communem divisus. Pro quovis μ non $>m$ autem et quibusvis p, q adest α^p in serie superiore, et β^q in inferiore; at non si $\mu>m$ ex. gr. $=m+1$ sumatur. Nam si $\mu=m$, sit $p=0$, (aut $=m$), aderit in serie superiore α^0, infra β^m, ita α^m et β^0; si $\mu<m$, quodvis p et $q<m$ adesse patet; at pro $\mu=m+1$ et $p=m+1$, non adest α^{m+1}, adeoque hic terminus ipsius $(\alpha+\beta)^{m+1}$ deest; adsunt vero omnes ipsius $\alpha+\beta$ potentiæ a 0 usque ad m inclusive; dicatur summa eius, quod e multiplicatione insuper exsurgit, ω. Accipiantur iam termini etiam porro usque ad α^{2m} et β^{2m}; pariter prodibunt etiam post $(\alpha+\beta)^m$ potentiæ omnes ipsius $(\alpha+\beta)$ usque ad $(\alpha+\beta)^{2m}$, in quas ω totum ingreditur, nempe præbendo unicum terminum $\alpha^m\beta^m$ ipsi $(\alpha+\beta)^{2m}$, et reliquos terminos omnes potentiis inferioribus suppeditando; nempe m ipsum quoque, eo magis numerus ipso m minor, cum numero $<m$, summam $<2m$ facit. Si vero $m \backsim \infty$, post $(\alpha+\beta)^m$ summa omnium $\backsim 0$, adeoque et pars $\omega \backsim 0$, ut supra (pag. 167).

Hinc series prior per secundam multiplicata, dat seriem formæ eiusdem, nonnisi $\alpha+\beta$ ipsi α in priore substituto, quidcunque denotent α, β. Nempe ut supra (pag. 167) si de utraque serie usque ad exponentem quemvis accepta valet, de seriebus ipsis valet.

Hinc etiam series prior per secundam divisa, dat quotum

$$=1+(\alpha-\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}+\frac{(\alpha-\beta)^3}{2\cdot 3}+\ldots;$$

nam hoc per seriem secundam multiplicatum, dat priorem (per præcedentia).

Imo hinc etiam, etsi c non sit reale, si $b=\frac{n}{m}$ (pro n, m integris) reale sit, erit

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2\cdot 3}+\ldots\right)^b=1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\frac{(bc)^3}{2\cdot 3}+\ldots$$

Est enim (per præcedentia)

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2\cdot 3}+\ldots\right)^2=1+2c+\frac{(2c)^2}{2}+\frac{(2c)^3}{2\cdot 3}+\ldots,$$

Hosted by Google

et porro eundo, ut (pag. 167) usque ad n-tam potentiam est

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2.3}+\ldots\right)^n=1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots$$

Ita

$$\left(1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots\right)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{nc}{m}+\frac{(nc)^2}{2m^2}+\frac{(nc)^3}{2.3m^3}+\ldots;$$

namque hoc elevatum ad m dat

$$1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots$$

Itaque erit

$$\left(1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\ldots\right)^m=\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\ldots\right)^n,$$

adeoque

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\ldots\right)^{\frac{n}{m}}=1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\ldots,$$

et

$$1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2.3}+\ldots=\sqrt[\frac{n}{m}]{1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\frac{(bc)^3}{2.3}+\ldots},$$

ubi $cb=\frac{cn}{m}$ per $\frac{n}{m}=b$ divisum substituitur ipsi cb in serie posteriore, e qua radix exponentis $\frac{n}{m}$ extrahenda est.

Quæstio etiam suboritur, num pro quovis P, sive reali (positivo vel negativo), sive pure imaginario, sive mixto, detur tale p, ut

$$1+p+\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{2.3}+\ldots\backsim P.$$

Quum dari omnino statim probetur:

3. Animadvertitur, has series, etsi imaginaria contineant, analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius e reales essent; ex. gr. si α, β realia fuerint, sicuti $e^\alpha . e^\beta = e^{\alpha+\beta}$, ita series ipsi α superstructa per seriem ipsi β superstructam multiplicata dat seriem $(\alpha+\beta)$ superstructam, etsi α, β imaginaria contineant... Unde passus ad *novem conceptum latiorem* aperitur; redeundo quasi a serie huius formæ, ad quam conceptus *potentiae elementaris* (pag. 50) deduxit, nempe si ipsi α substituatur ex. gr. $\sqrt[4]{16}$, exprimet series, omnes valores ipsius e elevati ad $\sqrt[4]{16}$, pro duorum valorum realium ipsius $\sqrt[4]{16}$ (nempe $+2, -2$) quovis. Hinc

Hosted by Google

quum operationes potentiarum de seriebus dictis, etsi imaginariis superstructæ sint, valeant, imaginem ex. gr.

$$e^{\sqrt[4]{16}} = 1 + \sqrt[4]{16} + \frac{(\sqrt[4]{16})^2}{2} + \ldots$$

pro quovis valore exponentis retinere libuit, formando conceptum sequentem, quasi *potentiae*, *radicis*, *logarithmique conceptus superior* (in posterum quoque manens) alio nomine signoque designatus fuisset, (quamobrem etiam *elementares* dicti sunt, nomen hoc retinentes).

Si nimirum

$$1 + bc + \frac{(bc)^2}{2} + \frac{(bc)^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \backsim B,$$

et

$$1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \backsim C;$$

atque $bc = r + j$ (pro r reali et $j = 0$ vel pure imaginario): dicatur in posterum B per quamvis potentiam elementarem exponentis r ipsius 1 multiplicatum *potentia exponentis b ipsius C*, et C dicatur *radix exponentis b ipsius potentiae; logarithmus* vero nonnisi *b ipsius B quoad basim C dicatur.*

Si $c = 1$, adeoque $C = e$; est $B = e^b$, et si $C = e^0 = 1$, est $B = e^{0b} = e^0$.

Patet vero conceptum potentiæ hoc sensu extendi, et priore latiorem fieri, logarithmi autem conceptum partim extendi, partim restringi. Nempe si α reale sit,

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$

quoque reale est, et quidem semper positivum, etsi α negativum sit: nam si negativum sit, ex. gr. -3; erit

$$e^{-3} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots = \frac{1}{e^3};$$

adeoque

$$1 = e^3 . \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots\right);$$

ubi e^3 positivum est, consequenter et alter factor positivus est. Itaque

series ista pro α reali nonnisi valores positivos ipsius e^{α} eos quidem omnes exhibet. Quamobrem ut omnes alii quoque valores comprehendantur, fit multiplicatio per 1^r, sensu elementari intelligendo. Ubi nempe (pag. 183) ex $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nq}$ series

$$1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\ldots$$

prodibat, fuisset reipsa ex. gr. $\left(\text{pro } q=\frac{3}{2}\right)$

$$1^{\frac{3n}{2}}+\frac{3n}{2}.1^{\frac{3n-2}{2}}+\ldots,$$

ubi 1^{3n}, 1^{3n-2} semper $=1$, et $\sqrt{1}$ in quovis termino positive aut in omnibus negative accipiendus est; et quum quilibet accipi possit, valor omnis exhibetur; in serie

$$1+q+\frac{q^2}{2}+\ldots$$

autem potentiæ ipsius 1 unicus tantum valor nempe $+1$ ponitur, omissis ceteris valoribus; quos tamen multiplicatio per 1^r, sensu potentiæ elementaris intellectum, omnes exhibet. Per 1^r idcirco semper potentia elementaris intelligenda.

Logarithmus realis autem, sensu proximo, quoad basim e vel e^c pro c reali *quantitati negativae neutiquam competit*; nam B pro quibusvis b, c realibus per dicta semper positivum est; atque nonnisi b logarithmus ipsius B quoad e^c dicebatur. Restringitur itaque logarithmi conceptus, in quantum logarithmo elementari negativa realia quoque gaudent; extenditur vero, quum sensu proximo non solum $A+B\sqrt{-1}$, quæcunque realia denotent A, B, logarithmo gaudeat, sed et ipsum $A+B\sqrt{-1}$ logarithmus esse queat.

Nempe (pag. 51 et 96) est $\frac{-10.-10}{-10.-10}=\frac{1.1.1}{1.1}$, itaque (per definitionem pag. 51) $(-10)^{\frac{2-2}{3-2}}=1$, et $\frac{0}{1}$ seu $0=\log. 1$, quoad -10; ita $\frac{10\cdot 10}{10\cdot 10}=\frac{-1.-1.-1.-1}{-1.-1}$ adeoque $10^{\frac{2-2}{4-2}}=-1$, et $0=\log.(-1)$, quoad 10; ita

Hosted by Google

$$\frac{10.10}{10.10} = \frac{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}$$

ac $10^{\frac{2-2}{6-2}} = \sqrt{-1}$, et 0 est log. $\sqrt{-1}$, quoad 10: atque $10^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{1000}$, adeoque $\frac{3}{2}$ est logarithmus tam positivæ quam negativæ radicis ipsius 1000, quoad basim 10; ita omnes logarithmi in tabulis, ubi radix decies millionesima adeoque exponentis paris extrahitur ex 10 elevato ad logarithmum, qui ibidem est, commate deleto, sensu priore elementari, tam positivo quam negativo competunt. In genere pro quovis reali $R = e^r$, est R non $\backsim$ sed $\backsim e^{\frac{2r}{2}} \backsim \sqrt{e^{2r}}$; atque $\frac{2r}{2} = r$, tanquam logarithmus elementaris tam ipsi R, quam ipsi $-R$ competit.

Datur autem pro quibusvis realibus A, B, etsi aliquod eorum 0 sit, tale x, ut sit

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \backsim A + B\sqrt{-1};$$

atque tum

$$x = \log.(A + B\sqrt{-1}), \text{ quoad basim } e;$$

imo quævis basis $C = e^c$ sit, poterit x in duos factores discerpi, quorum unus c sit; nempe si ponatur $x = bc$, erit $b = \frac{x}{c}$, (quotumque dari, etsi x, c utrumque imaginarium contineat, (pag. 147) dictum est); adeoque hoc b erit logarithmus ipsius $A + B\sqrt{-1}$, quoad basim C. Si $A = 0$ sit, tum idem de $B\sqrt{-1}$ valet; si vero utrumque $= 0$ sit, tum 0 logarithmo nonnisi sensu (pag. 46) gaudet, eo quidem $-\infty$, ut paulo inferius dicetur.

Ratio prioris, Trigonometriæ elementis primis perspectis, (pag. 125) facile intelligitur. Erat ibidem

$$\cos.a + \sqrt{-1}.\sin.a = \left(\cos.\frac{a}{n} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{a}{n}\right)^n$$

quod (si n tam magnum accipiatur, ut $\frac{a}{n}$ dimidio quadrante minus sit adeoque $\cos.\frac{a}{n} \succ \sin.\frac{a}{n}$ sit), erit per (pag. 172)

$$= \left(\cos.\frac{a}{n}\right)^n + n\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-1}\sqrt{-1}\sin.\frac{a}{n} - \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-2}\left(\sin.\frac{a}{n}\right)^2 -$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-3}\sqrt{-1}\left(\sin.\frac{a}{n}\right)^3 + \ldots,$$

Hosted by Google

ubi manifesto *summa terminorum realium est* $=\cos. a$, *et summa reliquorum* per $\sqrt{-1}$ multiplicatorum est $\sqrt{-1}.\sin. a$ atque *deleto* $\sqrt{-1}$ utrinque fit $=\sin. a$.

Si n integer positivus finitus sit, series ex $n+1$ terminis constat exhibens cosinum sinumque arcus n-tupli, nec tum $\sin.\frac{a}{n} \lessdot \cos.\frac{a}{n}$ esse necesse est (pag. 172).

Si vero $n \backsim \infty$, *datur series talis ut supra* (pag. 178), *cuius summa limes huius est, nempe:*

$$1+a\sqrt{-1}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{a^4}{2.3.4}+\frac{a^5\sqrt{-1}}{2\ldots5}-\frac{a^6}{2\ldots6}-\ldots$$

Nam si $n \backsim \infty$, tum $\frac{a}{n} \backsim 0$, et $\cos.\frac{a}{n} \backsim \cos. 0 = 1$, et $\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^n$, $\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n-1}$, uti omnes reliquæ potentiæ ipsius $\cos.\frac{a}{n}$ tendunt ad 1; constabit præterea inferius, quod $\left(\sin.\frac{a}{n}\right):\frac{a}{n} \backsim 1$; adeoque si (ut pag. 179) in quovis termino potentiæ ipsius $\cos.\frac{a}{n}$ substituatur 1, et $\frac{a}{n}$ ipsi $\sin.\frac{a}{n}$ erit

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{2.3\ldots m}\,\frac{a^m}{n^m} : \frac{a^m}{2.3\ldots m} \backsim 1;$$

nam quotus hic est

$$=\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-m+1}{n},$$

ubi

$$\frac{n}{n}=1,\ \frac{n-1}{n} \backsim 1,\ \frac{n-2}{n} \backsim 1,\ldots \text{ et } \frac{n-m+1}{n} \backsim 1,$$

atque omnia ut supra applicari possunt neque heic iam brevitatis studio repetuntur.

Unde etiam, quum hoc pro quovis a valeat, est

$$\cos. a+\sqrt{-1}\sin. a = 1+a\sqrt{-1}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{a^4}{2.3.4}+\ldots;$$

atque, ut prius, $\cos. a =$ summæ realium, nempe

$$\cos. a = 1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2.3.4}-\frac{a^6}{2.3\ldots6}+\ldots$$

Hosted by Google

et $\frac{\sqrt{-1}\sin.a}{\sqrt{-1}} =$

$$\sin. a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3\ldots7} + \ldots$$

Sed ad scopum præsentem sufficit, quod (pag. 193)

$$\cos. a + \sqrt{-1}\sin. a = e^{a\sqrt{-1}};$$

sit K positivum et æquale e^k; erit (pag. 183)

$$K = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

et

$$e^{a\sqrt{-1}} . e^k = e^{a\sqrt{-1}+k} = 1 + (a\sqrt{-1}+k) + \frac{(a\sqrt{-1}+k)^2}{2}$$

$$= K(\cos. a + \sqrt{-1}\sin. a).$$

Si itaque

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}\sin. a) = A + B\sqrt{-1},$$

seu

$$K\cos. a = A \text{ et } K\sin. a = B,$$

erit

$$A + B\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}+k}$$

Id ergo quæritur, num hoc fieri possit?

Sit $B = \frac{A}{p}$, nempe $A = Bp$. Casus si $A = 0$ excluditur, tunc enim facile est a ita accipere ut $\cos. a = 0$ sit. Quæstio igitur eo reddit, num detur tale a, ut

$$\cos. a = p\sin. a$$

sit?

$$p\sin. a = p\sqrt{1 - \cos.^2 a}$$

seu

$$\cos.^2 a = p^2 - p^2\cos.^2 a,$$

unde

$$\cos.^2 a(1 + p^2) = p^2,$$

et

$$\cos. a = \sqrt{\frac{p^2}{p^2+1}},$$

quod cum < 1 sit, omnia pro radio 1 intelligendo, omnino datur, arcuque gaudet. Itaque si pro tali arcu a accipiatur

Hosted by Google

$$K = \frac{A}{\cos. a},$$

quod semper *positivum* esse potest, nam p sive positivum sive negativum sit, $\frac{p^2}{p^2+1}$ positivum est et pro A negativo radix negativa accipi potest; erit

$$K \cos. a = A$$

atque

$$K \sin. a = \frac{K \cos. a}{p} = \frac{A}{p} = B;$$

adeoque

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a) = A + B\sqrt{-1} = e^{k + a\sqrt{-1}}$$

et

$$\log. \text{nat.} (A + B\sqrt{-1}) = k + a\sqrt{-1}.$$

Patet etiam esse

$$K^2 = \frac{A^2}{(\cos a)^2} = A^2 : \frac{p^2}{1+p^2} = \frac{A^2 p^2 + A^2}{p^2} = A^2 + B^2.$$

Si (pag. 125) quivis arcuum sumatur, sive positive sive negative, quorum cosinus $= 1$ et sinus $= 0$, substituiturque ipsi a pro quovis reali $K = e^k$, erit

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a) = K(1 + \sqrt{-1}. 0) = K = e^k e^{a\sqrt{-1}} = e^{k + a\sqrt{-1}}$$

atque

$$\log. \text{nat.} K = k + a\sqrt{-1},$$

cuius valores, propter valores innumerabiles ipsius a, innumerabiles sunt, omnes imaginarii præter unicum, si nempe $a = 0$.

Ita si a ita sumatur, ut $\cos. a = -1$ et $\sin. a = 0$, erit

$$\log. \text{nat.} (-K) = k + a\sqrt{-1};$$

inter hoc valores ipsius a enim 0 non adest, quia $\cos. 0 = 1$, consequenter negativum nullo reali logarithmo (ut supra quoque dictum est) et innumerabilibus imaginariis gaudet, uti etiam positivum, quod tamen unicum realem quoque habet. Si $K = 1$, tum pro $k = 0$ logarithmi omnes pure imaginarii sunt, præter unicum valorem ipsius a, pro $+1$ ipsi 0 æqualem.

Hosted by Google

At quæritur etiam; num pro quovis positivo K detur tale k, ut $e^k = K$ sit? (Quod in demonstratione supponebatur). Sit prius $K > 1$. Si positivum n tendit ad ∞, e^n quoque tendit ad ∞, quum $e > 1$ sit; e^{-n} seu $\frac{1}{e^n}$ vero tendit ad 0, $e^{\frac{1}{n}}$ id est $\sqrt[n]{e}$ vero (semper > 1) tendi ad 1 (pag. 102).

Quæratur (Fig. 17. *bis*) a $\mathfrak{p}$ eundo semper porro in ∞, in quovis puncto $\mathfrak{p}'$, num $e^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} < K$ sit? aliquamdiu prodibit minus, et aliquando maius, nam $e^0 = 1$, et exponens positive crescit a 0 in ∞. Datur itaque (pag. 20) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod et $\mathfrak{p}$ quodvis $\mathfrak{p}'$ tale est, ut $e^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'} < K$ sit; erit vero tum $e^{\mathfrak{p}*} = K = \mathfrak{ab}$; nam secus esset $< \mathfrak{ab}$ aut $> \mathfrak{ab}$; neutrum vero fieri potest.

Sit enim $e^{\mathfrak{p}*} = \mathfrak{ac} = \mathfrak{ab} - \mathfrak{cb}$, erit $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} \backsim \mathfrak{ac}$, quia $e^{\frac{1}{n}} \backsim 1$, adeoque $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} - \mathfrak{ac}$ dato quovis ergo et $\mathfrak{cb}$ minus fieri potest, sit $= \mathfrak{cq}$; erit $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} = \mathfrak{ac} + \mathfrak{cq}$ seu $e^{\mathfrak{p}*+\frac{1}{n}} = \mathfrak{aq}$; adeoque in $*$ non esset ultimum tale punctum, ut dictum est; nam $\mathfrak{p}* + \frac{1}{n}$ ultra $*$ terminatur, attamen $e^{\mathfrak{p}*+\frac{1}{n}} < K$; ad quemvis exponentem minorem elevatum vero minus est.

Neque $e^{\mathfrak{p}*} = \mathfrak{ad}$ esse potest; nam $e^{\frac{-1}{n}} = 1 : \sqrt[n]{e}$ quod < 1, sed tendit ad 1; adeoque $\mathfrak{ad}.\, e^{\frac{-1}{n}} - \mathfrak{ad}$ quovis dato, ergo et ipso $\mathfrak{bd}$ minus fieri potest; differentia negativa est, sit $- \mathfrak{rd}$; erit $\mathfrak{ad}.\, e^{\frac{-1}{n}} - \mathfrak{ad} = - \mathfrak{rd}$, adeoque $e^{\mathfrak{p}*-\frac{1}{n}} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{br}$; itaque e ad exponentem minorem ipso $\mathfrak{p}*$ elevatum $> K$ esset. Est igitur K, si > 1 est, $= e^{\mathfrak{p}*}$. Si vero $K < 1$, tum datur tale $N > 1$, ut $NK > 1$; et tum dantur talia x, z, ut $e^x = NK$ et $e^z = N$; adeoque $\frac{e^x}{e^z} = e^{x-z} = K$.

Exempla.

1. Pro quovis a, cuius cos. $= 1$ et sin. $= 0$, est (pag. 197)

$$\cos. a + \sqrt{-1}.\, \sin. a = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots = e^{a\sqrt{-1}};$$

seriei summa igitur $\backsim 1$; quod fieri nequit, nisi summa realium præter terminum primum $\backsim 0$, et summa pure imaginariorum quoque $\backsim 0$. Est vero pro quovis dicto a, $a\sqrt{-1} =$ log. nat. 1, et inter innumerabiles logarithmos solus 0 est realis, pro $a = 0$.

2. Pro quovis a, cuius cos. $= -1$, et sin. $= 0$, est

Hosted by Google

$$\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a = -1 = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots = e^{a\sqrt{-1}};$$

itaque summa realium præter terminum primum $\backsim -2$, et summa pure imaginariorum $\backsim 0$. Innumerabilium valorum ipsius a unus est π: adeoque $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum naturalium innumerabilium ipsius -1; atque

$$\pi = \frac{\log. \text{nat.}(-1)}{\sqrt{-1}};$$

quod tamen nihil quoad quantitatem ipsius π determinat, quum log. nat. (-1) iam involvat eam, neque aliunde notus sit.

3. Pro $a = 1 =$ radio est

$$\cos. 1 + \sqrt{-1}. \sin. 1 = e^{1\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \ldots$$

et inde

$$\sqrt{-1} = \log. \text{nat.}(\cos. 1 + \sqrt{-1}. \sin. 1),$$

atque

$$e = \sqrt[\sqrt{-1}]{\cos. 1 + \sqrt{-1} \sin. 1}.$$

Itaque (pag. 121.)

$$e^{1i} = 1 + 1i - \frac{1}{2} - \frac{1i}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

Patetque omnia in intuitu exhiberi: imo quum pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione differant, ut positiva a negativis, et maioritatis minoritatisque sensus (pag. 26) ad pure imaginaria cum realibus comparata extendi potest.

4. Pro $\cos. a = 0$, et $\sin. a = 1$, est

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos. a + \sqrt{-1} \sin. a = \sqrt{-1} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots,$$

adeoque pars realis tendit ad 0 et pars imaginaria tendit ad $\sqrt{-1}$; atque

$$\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$$

et

$$a\sqrt{-1} = \log. \text{nat.} \sqrt{-1}.$$

Hosted by Google

5. Si vero (in 4.) sit $a\sqrt{-1}=c$ et $b=\sqrt{-1}$, erit

$$bc=a\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-a,$$

atque

$$e^c=e^{a\sqrt{-1}}=\sqrt{-1},$$

et

$$e^{bc}=e^{-a}=1-a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2.3}+\ldots$$
$$=e^{a\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}$$
$$=(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$$

et inde

$$\sqrt{-1}=\sqrt[\sqrt{-1}]{e^{-a}}.$$

Est vero $\frac{\pi}{2}$ talis valor ipsius a uti in (4.) requiritur; imo (pro n integro quovis) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ tale est.

6. Solet etiam ex $\cos.a+\sqrt{-1}\sin.a$ sequens deduci.

Est nempe (pag. 197)

$$e^{a\sqrt{-1}}-\cos.a=\sqrt{-1}\sqrt{1-\cos^2.a},$$

et hinc elevando ad 2 est

$$e^{2a\sqrt{-1}}+\cos^2.a-2e^{a\sqrt{-1}}\cos.a=-1+\cos^2.a;$$

adeoque

$$2e^{a\sqrt{-1}}\cos.a=1+e^{2a\sqrt{-1}};$$

consequenter

$$\cos.a=\frac{1}{2e^{a\sqrt{-1}}}+\frac{e^{a\sqrt{-1}}}{2}$$
$$=\frac{e^{-a\sqrt{-1}}+e^{a\sqrt{-1}}}{2}.$$

Hinc etiam substituendo $\cos.a+\sqrt{-1}\sin.a$ ipsi $e^{a\sqrt{-1}}$ est

$$\cos.a=\frac{e^{-a\sqrt{-1}}+\cos.a+\sqrt{-1}\sin.a}{2},$$

Hosted by Google

et hinc

$$\sqrt{-1}\,\sin.\,a = \cos.\,a - e^{-a\sqrt{-1}} = \frac{e^{-a\sqrt{-1}} + e^{a\sqrt{-1}}}{2} - e^{-a\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2};$$

consequenter

$$\sin.\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Quæ formulæ sinum cosinumque ita exhibent, ut per $e^{a\sqrt{-1}}$ limes summæ seriei

$$1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2.3}\sqrt{-1} + \ldots$$

per $e^{-a\sqrt{-1}}$ vero limes summæ ipsius

$$1 - a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2.3}\sqrt{-1} + \ldots$$

intelligatur.

7. Quum ut iam sæpius dictum est, pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione alia differant: possunt quantitates pure imaginariæ in Geometria exhiberi, certo modo a realibus distinctæ. Et facile patet æquationem circuli pro diametro $= 1$, nempe

$$y = \sqrt{x - x^2}$$

exhibere valoribus pure imaginariis hyperbolam æquilateram, æquationem ellipseos vero omnes hyperbolas (quoad formam); uti æquatio hyperbolæ æquilateræ exhibet circulum pro valoribus pure imaginariis (ex. gr. serie punctorum, aut alio colore a reali distingvendum), et æquatio hyperbolæ generalis, exhibet omnes ellipses (sensu dicto); æquatio parabolæ dat quoad valores pure imaginarios quoque, parabolam quoad formam æqualem quasi imaginem virtualem sibi æqualem; in prioribus vero imaginariorum forma realibus contraria erat.

8. Si logarithmi sensu elementari accipiantur, est etiam

$$\log.(-2) - \log.(-3) = \log.\frac{-2}{-3} = \log.\frac{2}{3};$$

Hosted by Google

at si logarithmus sensu dicto veniat, tum (pag. 199)

$$\log.(-2) - \log.(-3) = \log.\text{el.}\, 2 + \pi\sqrt{-1} - (\log.\text{el.}\, 3 + \pi\sqrt{-1});$$

at si ex. gr. in posteriore $3\pi\sqrt{-1}$ sit, logarithmus realis ipsius $\frac{2}{3}$ haud exhibetur. Vide infra in differentiatione logarithmi, atque in explicatione spatiorum hyperbolæ asymptoticorum.

Hosted by Google

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO II.

CALCULUS DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS, ET PRIMAE LINEA CALCULI VARIATIONIS.

§. 36.

Filum sectione præcedenti certo respectu interruptum tandem ulterius continuatur: ut Tyrones ex imis radicibus arborem scientiæ cum præcipuis eius ramis excrescentibus in lucem exsurgere cernant.

Mens abstrahendo varia, abstractaque vario modo componens, de omnium illarum operationum, quæ ante sectionem præcedentem prodierant, omnimoda compositione ad conceptum generaliorem ascendit: nimirum qualiumvis operationum, quæ in tempore spatiove suscipi possunt, qualibusvis afficiantur quantitates, expressio id denotans (nomine a *Leibnitio* introducto) vocatur *functio*, et quidem *sensu lato* quantitatis cuiusvis, quæ in expressione adest, *strictius* autem tantum quantitatis variabilis, quæ in expressione est, aut plurium, si plures adsint. Variabiles plerumque postremis alphabeti literis x, y,.., imo p, q,... denotantur, constantes prioribus, nisi aliud monitum fuerit; intelligitur autem per *variabilem* ex. gr. x, certum quantitatum genus, quas nomine generali x denotare libet; ita ut ipsi x quævis quantitas sub eo genere contenta, in expressione substitui possit, nisi id pro certa quæstione aut conditione aliquatenus restringatur; *constans* vero est, quæ utcunque mutata variabili, id est ex. gr. ipsi x quidvis substituatur, eadem manet.

Quum heic (veluti in oceanum omnia confluunt, ut inde sublata in altum variis phænomenis redeant) innumeris functionis modis cam-

Hosted by Google

pus infinitus aperiatur: pronum est vias prospectusque eius patefientes sequi.

Nimirum si quantitates, quarum genus x est, nulla alia operatione afficiantur, nisi quod sub certa conditione acceptæ post se invicem ponantur: oritur *Theoria combinationum*. Ex. gr. conditio esse potest, ut ex 5 rebus, quarum genus x est, accipiantur duæ: ita quoad ordinem aliqua determinatio esse potest, aut ordo in censum non vocatur (pag. 159) et quæri potest quotnam et qui sint functionis valores.

Si vero quantitates operationibus arithmeticis geometricisve aut aliis quoque connexæ sint, variabilis quævis erit genus aut omnis quantitatis (sive realis sive imaginariæ), aut non omnis sed tantum realium, imo tantum numerorum integrorum, aut illarum tantum quantitatum, quæ a valore certo a usque ad valorem b (inclusive) sunt, aut denique variabilis genus certarum functionum esse potest.

In quovis dictorum casuum, ultro succurrit inquirere:

1. Pro certa functionis conditione, in variabilium valores (qualitatesque).

2. Pro certa variabilium conditione, in functionis valorem (qualitatemque).

3. Pro certa functionis qualitate, quicunque fuerit (absque aut sub certa conditione) valor quantatis variabilis, in certorum functionem constituentium qualitatem.

4. Pro certorum functionem constituentium certa qualitate, in functionis qualitatem.

Ex. gr. Si in (1.) conditio ea sit, ut valor functionis 0 sit: quæritur, num detur talis quantitas, quæ si variabili substituatur, functio $= 0$ fiat? et quotnam qualesque dentur? Ita si plures insint functioni variabiles. Huc pertinet *problema aequationum*; ex gr. $x^2 - x - 2 = 0$ nonnisi pro $x = 2$ et $x = -1$ est. Præter alias conditio esse potest, ut *valor* functionis *maximus* vel *minimus* fiat; quærique, num detur eiusmodi valor, qui si variabili substituatur, functionis valor maximus vel minimus omnium eius valorum fiat?

Si vero variabilis ipsa in functione genus certarum functionum sit

Hosted by Google

et quæratur talis, quæ si variabili substituatur, functio certa qualitate prædita sit: *calculus variationum* dicitur. Ex. gr. dum linearum aream certam claudentium minima quæritur (sub hac vel illa conditione).

Si variabilis quævis nonnisi integros denotet: quæstiones e superioribus promanantes naturam numerorum concernunt. Si ex. gr. functio sit $4x+1$ et x tale sit ut $4x+1$ numerus primus sit, functio gaudebit illa qualitate ut duorum integrorum ad 2 elevatorum summa sit (et quidem unico tantum modo); at non ut hac qualitate gaudeat, primus esse debet. Ramus hic Arithmeticæ immensus sagacitatem ingenii maximam postulans flores fructusque veritatis puræ æternæque præbet. Vide opus immortale: *Disquisitiones Arithmeticae Auctore C. F. Gauss 1801 Lipsiae.*

Ad (3.) pertinet: quod si $Ax^a + Bx^b + \ldots$ pro quovis valore ipsius x sit $= 0$, quilibet coefficientium est $= 0$.

E (2.) vero pluribus modis calculus differentialis originem capit et variæ promanant series: si nempe conditio ea sit, ut in functione ipsius x substituatur ipsi x (generi omnis quantitatis, quæ est a 0 usque ad α) prius $\frac{\alpha}{n}$, tum $\frac{2\alpha}{n}$, dein $\frac{3\alpha}{n}$ et ita porro usque ad $\frac{n\alpha}{n}$. Attamen ut clarius exponatur, prius distinctio denotatioque functionum præmittenda.

1. Functio, cuius valor pro quovis determinato valore variabilis, quæ in ea est, numerabilibus eiusmodi operationibus prodit, quarum quævis est *addere* aut *multiplicare* (imo etiam *radicem gradus commensurabilis extrahere*), dicitur *algebraica*; si vero valor dictus nonnisi innumerabilibus eiusmodi operationibus reperiatur, functio *transcendens* audit.

Dicitur porro *quoad valores functio m-formis*, si valores eius numero m sint (pro determinato valore variabilis in ea). Ex. gr. $\sqrt{x}$ est functio biformis.

Si vero $x = a$ per integrum n dividatur et n tendat ad ∞, dicitur x *variabilis absoluta*; atque si valor functionis ipsius x (pro valore eodem ipsius x) pro quovis n sit idem, *functio absoluta* dicitur. Ex. gr. in figura (19.) $F+G+H+f+g+h$ mutato n mutatur.

Hosted by Google

2. Solet vero functio variabilium x vel $x, y, \ldots$ denotari per $f(x)$, $F(x, y, \ldots)$, literis parenthesi præpositis forma functionis denotata, et quidem ita, ut si per $f(x)$ denotetur ex. gr.

$$ax^2 + bx - c,$$

tum $f(a)$ denotet

$$aa^2 + ba - c,$$

et $f(0)$ denotet

$$a.0^2 + b.0 - c = -c,$$

substituendo nempe ubique ipsi x in casu primo a et in secundo 0.

Ita si $f(x) = x^m$, sit $f(x+\omega) = (x+\omega)^m$; et si $F(x, y) = \alpha xy$, sit $F(x+\omega, b) = \alpha(x+\omega)b$; unde et casus alii patent.

Ita mox dicenda modo sequenti significari possunt. *Differentiale absolutum* n-tum functionis variabilium x, vel $x, y \ldots$ quod per $d^n f(x, \ldots)$ denotari solet, scribi potest $\mathfrak{d}^n f(x, \ldots)$, vel si $n = 1$, tantum $\mathfrak{d} f(x, \ldots)$. *Differentiale* n-tum quoad x vero per $\mathfrak{d}^n_x f(x, y, \ldots)$, et si $n = 1$, per $\mathfrak{d}_x f(x, y, \ldots)$, ita *differentiale* sinus x *quoad cotangentem* per $\mathfrak{d}_{*t} \sin. x$, ($*t$ cotangentem significante) denotari potest.

Ita *coefficiens* vel *quotiens differentialis absolutus* n-tus, qui vulgo $\frac{d^n f(x)}{(dx)^n}$, iuxta LAGRANGE vero $f^{(n)}(x)$, et pro $n = 1$ $f'(x)$, pro $n = 2$ $f''(x)$, scribitur, denotari per $\mathfrak{d}^n f(x)$, ($\mathfrak{d} f(x)$, $\mathfrak{d}^2 f(x), \ldots$) potest. Si vero quoad x sit, $\mathfrak{d}^n_x f(x, y, \ldots)$ vel $\overset{n}{\underset{x}{\mathfrak{d}}} f(x, y, \ldots)$ aut $\underset{n,x}{f}(x, y, \ldots)$ scribi potest; et n-tus coefficiens differentialis quoad z m-ti coefficientis differentialis quoad x accepti per $\underset{m,x}{\mathfrak{d}^n_z f}(x, y, z \ldots)$ aut $\overset{n}{\underset{z}{\mathfrak{d}}} f_{m,x}(x, \ldots)$ significari. Ita si $f(x, y, z, \ldots)$ dicatur ex. gr. X, quid $\mathfrak{d}X$, $\mathfrak{d}X$, $\mathfrak{d}^m_x X$, $\overset{m}{\underset{x}{\mathfrak{d}}} X$, $\underset{m,x}{X}$, $\underset{m,x\,;\,n,z}{X}$ significet, patet.

Integrale denotatur per $\int$ præpositum differentiali; potestque tantum coefficienti differentiali præponi: si is ex. gr. 1 sit, scribi potest

$$\underset{x}{\int} 1$$

id est integrale quoad x ipsius 1 tanquam coefficientis differentialis.

Si vero variabili functio certa substituatur, scribi

Hosted by Google

$$A\big(B(x)\big) \quad \text{vel} \quad A\big(B(x), C(y), \ldots\big)$$

potest; et si $A\big(A(A(x))\big)$ esset, per $A^3(x)$ significari potest, quum A non quantitatem denotet, adeoque numerus haud exponens sit; uti $\big(A(x)\big)^3$ denotat tertiam functionis potentiam. Patet hinc $\int^2$ denotare $\int\int$.

Si nulla variabilis postponatur, potest $(\underset{n}{A})$, ita $(\underset{n}{U})$ vel aliud terminum n-tum certæ seriei denotare.

3. Si iam in $A(x)$ substituatur $x+i$ ipsi x, ut sit $A(x+i)$, quæritur expressio prior valorque eius quomodo mutetur? Vocatur hoc *Theorema Tayloriarum*, cuius unus casus est binomiale, si nempe $A(x)=x^p$.

Reflectere ad augmentum positivum vel negativum valoris functionis pronum est, imo id etiam cum augmento ipsius x comparare, et tum comparationem istam inter augmenta simultanea ipsius x et functionis ad diversos valores ipsius i extendere. Casus se offerebant tales, ubi ratio augmentorum simultaneorum pro quantovis i eadem manet, et alii, ubi mutatur, sed decrescente i ad aliquam functionem ipsius x propius venit, imo

$$\frac{A(x+i)-A(x)}{i}$$

tendit ad $A'(x)$, dum i tendit ad 0. Hoc est, quod NEWTON *rationem primam vel ultimam augmentorum nascentium vel evanescentium* dixit, hac via *calculum*, quem *fluxionum* dixit, reperiens. Insignis certe limes iste est, ad quem quotus dictus tendit, priusquam omnino dividendus aut divisor $=0$ fieret, qui plane supponantur ita decrescere, ut zero nunquam attingant: naturam enim eorum, quæ per functionem determinantur (ex. gr. curvæ ☞), quasi in germine continet, quod iam BARROW (cuius NEWTON discipulus fuit) animadverterat. Est vero hoc quod supra per $\partial A(x)$ scriptum est, et coefficiens differentialis dictum est.

4. Quidsi ipsi x substituatur prius 0, dein $\frac{x}{n}$, tum $\frac{2x}{n}$ et ita porro usque ad $\frac{nx}{n}$; ultro succurrit, functione ita mutata, a quovis ad sequen-

Hosted by Google

tem eundo, augmenta adeoque seriem augmentorum considerare. Denotetur $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$; accipiendo certum valorem α ipsius x, erunt valores functionis sequentes:

$$A(0\dot{x}), A(1\dot{x}), A(2\dot{x}), \ldots, A\big((n-1)\dot{x}\big), A(n\dot{x}),$$

id est

$$A(0), A\left(\frac{\alpha}{n}\right), A\left(2\frac{\alpha}{n}\right), \ldots, A\left((n-1)\frac{\alpha}{n}\right), A\left(n\frac{\alpha}{n}\right);$$

atque series augmentorum erit a fine incipiendo

$$A(n\dot{x}) - A\big((n-1)\dot{x}\big), \ldots, A(2\dot{x}) - A(\dot{x}), A(\dot{x}) - A(0),$$

ubi *terminus seriei generalis* obviam venit; nempe si in

$$A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big)$$

ipsi m quicunque integer k ab 1 usque ad n inclusive substituatur, prodit terminus seriei k-tus; ex. gr. $A(3\dot{x}) - A(2\dot{x})$ est a primo incipiendo (inclusive) tertius.

Patet etiam summam seriei, terminis intermediis se invicem destruentibus, esse

$$A(n\dot{x}) - A(0) = A(x) - A(0),$$

nempe *summam incrementorum*, quæ ipsi $A(0)$ usque ad $A(x)$ inclusive accessit, uti pro $n=3$ fig. (18) ostendit.

Series incrementorum eiusmodi (terminorum numero certo n) e functione aliqua $A(x)$ modo dicto derivata dicatur breviter *series ex $A(x)$ derivata* aut brevius *series ipsius $A(x)$*; et terminus generalis huius, nempe

$$A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big)$$

dicatur breviter *terminus seriei generalis ipsius $A(x)$*.

5. Porro alia functio quoque se offerebat, e qua derivatæ seriei totidem terminorum, cuiusvis m-ti termini ad terminum m-tum prioris (adeoque termini generalis huius ad terminum generalem prioris) relatio certa eadem palam fuit; quo sectiones simultaneæ Archimedis (rite

Hosted by Google

intellectæ) viam patefecerant, sed lingua generalitatis nondum fari ceperat. Cartesius dedit pennas, quibus crescentibus oceani continentisque genii e græco nido cœlipeti tractu evolarunt.

Si nimirum functionum absolutarum $A(x)$ et $B(x)$ serierum termini generales denotentur per $a(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})$, aut brevius per $a(x)$ et $b(x)$, nempe

$$a(m\dot{x}) = A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big),$$
$$b(m\dot{x}) = B(m\dot{x}) - B\big((m-1)\dot{x}\big),$$

summa seriei ipsius $A(x)$ autem dicatur A, et B sit summa seriei ipsius $B(x)$, ut sit nempe

$$A = A(x) - A(0), \qquad B = B(x) - B(0),$$

atque pro eodem n quodvis

$$b(m\dot{x}) = \beta a(m\dot{x}),$$

adeoque

$$\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \beta,$$

quicunque numerus ab 1 usque ad n inclusive substituatur ipsi m, manifesto est

$$B = \beta A;$$

atque si $\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = 1$, tum $B = A$; nempe

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0),$$

adeoque

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0).$$

Hinc talibus casibus venientibus, ubi $u(m\dot{x})$, — nempe terminus generalis seriei e functione non absoluta $U(x)$ derivatæ, cuius seriei summa dicatur U, — talis est, ut $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})}$ quidem non est $= 1$, sed aucto n ipsi 1 propius accedit: facilis passus erat quærere, num dato quovis ω propius ire queat? id est num detur tale n (idem pro omnibus terminis), ut quicunque numerus ab 1 usque ad n inclusive substituatur

Hosted by Google

ipsi m, sit $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \omega$? In pluribus casibus ita esse patebat. Et nova quæstio ultro exorta est, num si in $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = 1$ loco signi $=$ signum $\backsim$ tantum locum habeat, pro $U = A$ fiat $U \backsim A$? Responsio in promptu erat:

Si nempe $A(x)$ functio absoluta sit, adeoque A pro quovis n maneat idem, et in serie huius $A(x)$ termini omnes eodem signo gaudeant atque pro quantovis N detur tale n idem pro omnibus, ut

$$\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit, erit

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \lessdot \frac{a(m\dot{x})}{N},$$

et hinc

$$u(1\dot{x}) - a(1\dot{x}) \lessdot \frac{a(1\dot{x})}{N},$$

$$u(2\dot{x}) - a(2\dot{x}) \lessdot \frac{a(2\dot{x})}{N},$$

$$u(3\dot{x}) - a(3\dot{x}) \lessdot \frac{a(3\dot{x})}{N},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u(n\dot{x}) - a(n\dot{x}) \lessdot \frac{a(n\dot{x})}{N};$$

consequenter summa columnarum verticalium priorum duarum est minor quam summa columnæ verticalis tertiæ, id est

$$U - A \lessdot \frac{A}{N},$$

itaque

$$U - A \backsim 0,$$

et

$$U \backsim A,$$

idest A limes ipsius U est.

Ex. gr. si (Fig. 19)

$$A(x) = F + G + H,$$

et sit (pro $n = 3$)

$$a(1\dot{x}) = F, \; a(2\dot{x}) = G, \; a(3\dot{x}) = H,$$

et

$$u(1\dot{x}) = F + f, \; u(2\dot{x}) = G + g, \; u(3\dot{x}) = H + h,$$

Hosted by Google

nempe

$$U(3\dot{x}) = F + f + G + g + H + h,$$
$$U(2\dot{x}) = F + f + G + g,$$
$$U(1\dot{x}) = F + f, \quad U(0) = 0;$$

tum si pro $N = 7$ sit

$$\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N},$$

idest

$$H + h - H \lessdot \frac{H}{7},$$

$$G + g - G \lessdot \frac{G}{7},$$

$$F + f - F \lessdot \frac{F}{7},$$

esset $F + f + G + g + H + h - (F + G + H)$ seu

$$f + g + h \lessdot \frac{F + G + H}{7}.$$

Et si pro N utvis magno daretur tale n (idem pro omnibus terminis), ut schema hoc valeat scribendo in primam columnam verticalem terminos seriei ipsius $U(x)$, in secundam terminos simultaneos ipsius $A(x)$, atque in tertiam quoque hos per N divisos: manifesto esset $U - A \backsim 0$ et $U \backsim A$, dum $n \backsim \infty$.

In fig. (19) facile patet pro quovis N posse n ita augeri, ut quodvis ipsorum $f, g, h, \ldots$ sit minus quam litera magna nominis eiusdem per N divisa, et quidem pro eodem n. Nempe si ordinata prima dicatur y, et secunda ad lævam sit $y - \omega$, erit $h \lessdot \omega\dot{x}$ et $(y - \omega)\dot{x} \lessdot H$; atque si $\omega \lessdot \frac{y - \omega}{N}$, erit et $\omega\dot{x} \lessdot \frac{y - \omega}{N}\dot{x}$; consequenter $h \lessdot \frac{H}{N}$.

Poterit vero, si ex. gr. $\mathfrak{ab}$ recta sit et $y = \beta x + \gamma$ quodvis ω (pro eodem n et certa constante β) per $\beta\dot{x}$ exprimi; et si n non $\lessdot \frac{N\beta x}{\gamma}$ accipiatur, quævis litera parva erit minor quam litera magna nominis eiusdem per N divisa. Nam tum quivis numerus ab 1 usque ad n substituatur ipsi m, erit pro $\gamma + \beta m\dot{x}$ ipsi $m\dot{x}$ respondente

Hosted by Google

$$\frac{\omega}{\gamma+\beta m\dot{x}}=\frac{\beta\dot{x}}{\gamma+\beta m\dot{x}}=\frac{\beta\frac{x}{n}}{\gamma+\beta m\frac{x}{n}}=\frac{\beta x}{\gamma n+\beta m x},$$

quod item valore dicto ipsi n substituto est

$$=\frac{\beta x}{N\beta x+m\beta x}=\frac{1}{N+m}\lessdot\frac{1}{N}.$$

6. Sæpissime tamen est, ut non detur pro dato N tale n, ut quodvis

$$\frac{u(m\dot{x})-a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})}\lessdot\frac{1}{N}$$

sit, nisi m ita accipiatur, ut $m\dot{x}$ non sit $\lessdot zx$ at z dabili quovis minus accipi queat.

Ex. gr. in figura (20) est

$$\text{pro } m=1,\ f=F,$$

$$\text{pro } m=2,\ g=\frac{G}{3},$$

$$\text{pro } m=3,\ h=\frac{H}{5},$$

et ita porro, ut quantusvis sit N, primi denominatores sint 1, 3, 5, . . . At vero quantumvis exiguum sit z (adeoque zx), si omne $m\dot{x}$, quod non est $\lessdot zx$ et non est $\gtrdot n\dot{x}$, dicatur q: erunt duæ ordinatæ proximæ βq et $\beta(q-\dot{x})$, et $\omega=\beta\dot{x}$. Atque

$$\frac{\omega\dot{x}}{\beta(q-\dot{x})\dot{x}}=\frac{\beta\dot{x}}{\beta(q-\dot{x})}=\frac{x}{nq-x},$$

quod item, si $n=$ aut $\gtrdot\frac{(N+2)x}{q}$ accipiatur, est $\lessdot\frac{1}{N}$. Nempe substituendo ipsi n fiet

$$\frac{x}{nq-x}=\frac{x}{(N+2)x-x},$$

quod est

$$=\frac{1}{N+1},$$

quod est $\lessdot\frac{1}{N}$.

Hosted by Google

Est quoque hoc tanto fortius, si n adhuc maius accipiatur. Valent itaque superius dicta omnia de $u(m\dot{x})$ et $a(m\dot{x})$ simultaneis ultra zx acceptis omnibus.

Hinc si demonstretur, quod pro quovis N detur tale n (idem pro terminis omnibus), ut pro z utvis parvo sed determinato sit generaliter

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})-(A(q)-A(q-\dot{x}))}{A(q)-A(q-\dot{x})}=0 \text{ aut} \lessdot \frac{1}{N},$$

erit manifesto

$$U(x)-U(zx) \backsim A(x)-A(zx);$$

atque si

$$U(zx)-U(0) \backsim 0 \text{ et } A(zx)-A(0) \backsim 0,$$

etiam

$$U(x)-U(0) \backsim A(x)-A(0).$$

Dicantur vero $U(q)-U(q-\dot{x})$ et $A(q)-A(q-\dot{x})$ *aequipollentia*; denotarique id per signum $\overset{\circ}{=}$ interiectum potest.

7. At quæritur, num inde, quod pro dato quovis N et dato quovis q (quod non est $\lessdot zx$ et non $\gtrdot x$) detur tale n, omnino finitum, ut

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})}{A(q)-A(q-\dot{x})}-1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit, sequatur dari n integrum, eundem pro omnibus, talem ut

$$u(m\dot{x})-a(m\dot{x}) \lessdot \frac{a(m\dot{x})}{N}$$

sit, quicunque numerus ab 1 usque ad n inclusive substituatur ipsi m, dummodo $m\dot{x}$ non sit $\lessdot zx$?

Cogitetur punctum e fine dati zx porro ferri in x usque ad finem huius et quæratur ubique, num detur pro illo q tale n finitum, ut

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})}{A(q)-A(q-\dot{x})}-1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit; et eo, quo maius non est omnium finitorum n (quasi quodvis n tanquam ordinata finita e loco puncti cogitatione lati, tanquam fine ipsius q erecta esset), accipiatur numerus integer quantovis maior: erit iste

Hosted by Google

integer quæsitum n. Nam tum $\dot{x}$ adhuc minus erit, quam pro quovis q requiritur; et facile in quovis casu patet, quo minus $\dot{x}$, id est quo maius n est, omnia superius dicta tanto fortius valere, quum nonnisi ab aucto n dependeat, ut sit

$$\frac{U(q) - U(q - \dot{x})}{A(q) - A(q - \dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}.$$

8. Sed et alia functio absoluta $B(x)$ obviam venire poterat pro eodem x, e qua derivatæ seriei termino generali $b(m\dot{x})$ dicto

$$\frac{u(m\dot{x})}{b(m\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

fieri possit, quicunque numerus substituatur ipsi m ab 1 usque ad n, saltem si $m\dot{x}$ non est $\lessdot zx$ nec $\gtrdot x$ et quidem pro eodem n; et patebat — summa seriei ipsius $B(x)$ per B denotata — esse $U \backsim B$; atque quum etiam $U \backsim A$, esse $A = B$. Unde manifesto

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0),$$

consequenter

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0).$$

Dicitur $A(x)$ *integrale* ipsius $u(x)$, designaturque per $\int u(x)$; et $u(x)$ *differentiale* tam ipsius $A(x)$ quam ipsius $B(x)$ audit, per $u(x)$ nonnisi $u(m\dot{x})$ sensu superiore intelligendo.

Atque quum $A(0) - B(0)$ constans sit, scribitur

$$\int u(x) = B(x) + c,$$

et constantis c valor quæritur. Si ex. gr.

$$A(x) = \int \frac{\dot{x}}{(1+x)^2} + c = B(x) - B(0) + A(0),$$

et $A(0)$ sit $= a$, erit

$$A(x) = -\frac{1}{1+x} + 1 + a;$$

Hosted by Google

nam patebit infra esse

$$d\left(-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{\dot{x}}{(1+x)^2},$$

et tum

$$B(0)=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

Consequenter est

$$A(x)=-\frac{1}{1+x}+1+a=a+\frac{x}{1+x},$$

quod $=\frac{x}{1+x}$, si $A(0)=0$.

Potest etiam $B(0)=0$ esse; ex. gr. $(1+x)^{-2}\dot{x}$ est differentiale etiam alius functionis, nempe ipsius $\frac{x}{1+x}$ quoque; et si pro $B(x)$ hoc accipiatur, erit $B(0)=0$, et constans erit $a-0=a=0$, si et $A(0)=0$. Interim $-\frac{1}{1+x}$ et $\frac{x}{1+x}$ nonnisi constante 1 differunt.

Constans autem innotescet, si pro valore aliquo α ipsius x, de quo valent quæ dicta sunt, nempe ut sit $A(\alpha)=B(\alpha)-B(0)+A(0)$, constans nota sit, ut sit

$$A(\alpha)=B(\alpha)+c;$$

erit

$$A(0)-B(0)=c;$$

adeoque pro quovis valore tali β ipsius x, ut sit $A(\beta)=B(\beta)-B(0)+A(0)$, eadem constans c nota erit.

Si autem fuerit $A(a)=a'$ et $A(b)=b'$, adeoque

$$\int u(a)=a'+c,\ \int u(b)=b'+c$$

et $a<b$ sit: erit

$$\int u(b)-\int u(a)=b'-a'$$

parti a fine ipsius a usque ad finem ipsius b appertinenti æqualis. Dicuntur in tali casu a et b *limites integralis*, et *integrale ab a usque ad b extendi* dicitur.

9. Unus solus casus, ubi e functione quadam absoluta $A(x)$, cuius valor ignotus erat, derivatæ seriei incrementorum terminus generalis æquipollebat termino generali seriei incrementorum functionis absolutæ

Hosted by Google

$B(x)$, cuius valor notus erat, atque per id valor prioris innotuit, protinus viam ad aliarum functionum quoque, quarum valor notus est, terminos generales quærendos aperuit, eosque cum terminis generalibus functionum, quarum valor ignotus erat, comparare induxit; ut si quis priorum terminorum generalium alicui posteriorum æquipolleret, functionis valor ignotus innotescat.

Dicitur $B(x)$ *functio summatrix*, per quam $A(x)$ innotescit; $a(m\dot{x})$, id est $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ vero *differentiale verum* seu *elementum* ipsius $A(x)$, uti $b(m\dot{x})$ ipsius $B(x)$ audit. Atque si $u(m\dot{x})$ utrique elemento æquipolleat et ita expressum sit, ut $\dot{x}$ nonnisi in prima potentia occurat, tum $u(x)$ *differentiale strictum* (aut tantum *differentiale*) dicitur, per $\partial A(x)$, $\partial B(x)$ denotatum; atque functio absoluta æqualis summæ omnis eius, per quod $\dot{x}$ in $u(x)$ multiplicatum est, *coefficiens differentialis* sive *derivata* vocatur, denotata per $\partial\!\!\!/ A(x)$, $\partial\!\!\!/ B(x)$. [Vide de aliis literis puncto insignitis inferius sub (12).]

10. Notandum vero est, functionem absolutam $A(x)$, cuius valor quæritur, aut in concreto exhiberi, aut sæpe per limitem tantum functionis cuiuspiam exponi; atque in casu postremo limitem eiusmodi dari demonstrandum est.

Utcunque sit, functionis dictæ $A(x)$ differentiale, — id est elemento eius nempe ipsi $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ æquipollens expressio forma differentialis stricti prædita, — reperitur quærendo duas functiones $U_1(x)$ valore crescente et $U_2(x)$ valore decrescente (dum n crescit) tales, ut sit semper

$$U_1(q) - U_1(q-\dot{x}) < A(q) - A(q-\dot{x}) < U_2(q) - U_2(q-\dot{x})$$

et $U_1(q) - U_1(q-\dot{x})$ gaudeat forma differentialis stricti, atque

$$\frac{U_1(q) - U_1(q-\dot{x})}{U_2(q) - U_2(q-\dot{x})} \backsim 1,$$

omnia sensu dicto intelligendo. Tunc enim semper est

$$U_1(x) - U_1(0) < A(x) - A(0) < U_2(x) - U_2(0)$$

Hosted by Google

et

$$U_2(x) - U_2(0) - \big(U_1(x) - U_1(0)\big) \backsim 0,$$

adeoque

$$U_1 \backsim A.$$

Functionis summatricis $B(x)$ vero elemento id est ipsi

$$B(m\dot{x}) - B(m - \dot{x})$$

æquipollens differentiale strictum erit $u(x)$, si forma dicta prædita atque talis sit, ut sensu dicto

$$\frac{u(q)}{B(q) - B(q - \dot{x})} \backsim 1.$$

Exemplis hæc facilioribus tam geometricis quam mechanicis paulo inferius illustrabantur.

11. Si differentialia stricta $u\dot{x}$ et $v\dot{x}$ æquipolleant, adeoque $\frac{u\dot{x}}{v\dot{x}} = \text{vel} \backsim 1$, tum $\frac{u}{v}$ quoque $= \text{vel} \backsim 1$. At vero u et v sunt functiones absolutæ pro quovis valore ipsius n valore eodem gaudentes (per præcedentia); itaque $\frac{u}{v}$ non $\backsim 1$ sed $= 1$, adeoque $u = v$ est.

Et vicissim si derivatæ u et v sint æquales, differentialia stricta quoque sunt æqualia, unam tantum adhuc variabilem x supponendo. Itaque, si

$$u = A'(x) = B'(x),$$

est

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0).$$

Neque functiones $A(x)$ et $B(x)$ derivata æquali gaudentes præter constantem differunt. Nam tum

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0),$$

adeoque $A(x)$ et $B(x)$ nonnisi constante differunt.

Sed nec ulla functio $A(x)$ et ab hac nonnisi constante differens $B(x)$ inæqualibus derivatis gaudent. Nam tum $A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big)$ et $B(m\dot{x}) - B\big((m-1)\dot{x}\big)$ sunt æqualia; quia, si constans c sit, quo differunt et

Hosted by Google

$$A(x) = B(x) + c,$$

erit

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) = B(m\dot{x}) + c - (B((m-1)\dot{x}) + c)$$
$$= B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}),$$

cui tam $u\dot{x}$ quam $v\dot{x}$ æquipollere nequeunt, nisi $u = v$ sit.

Unde nec functiones summatrices, nec integralia differentialium æqualium præter constantem differunt. Imo evidens est, nonnisi derivatam ipsius $A(x)$ et functionem summatricem $B(x)$ quærendam esse, cuius derivata derivatæ ipsius $A(x)$ æqualis sit; atque si hæc u sit, pro $\int u\dot{x}$ brevius $\int u$ scribi posse, si nonnisi x variabilis sit.

12. Interim variabiles plures $y, z, \ldots$ quoque functioni inesse possunt, quæ etsi ab x variabili absoluta haud necessario dependeant, in quovis tamen casu cum quovis $m\dot{x}$ tam y quam $z \ldots$ per legem certam quantitate certa simul ponuntur; adeoque hoc pacto in dependentia mutua simultanea sunt; adeoque omnes variabiles quidem in quovis casu quantitatis determinatæ concipiantur, ita tamen, ut nulli casui quidquam præter magnitudinem, quod non omni competit, tribuatur; id enim tantum generaliter verum est, quod de quovis casu speciali valet.

Ex. gr. si in plano P sit x (variabilis absoluta) linea recta, in qua abscissæ e certo puncto $\mathfrak{p}$ in una plaga positive in altera negative accipiantur, et rectæ in P ad x perpendiculares ab extremitatibus abscissarum dicantur *ordinatae* y, prouti in unam alteramve abcissæ plagam cadunt, positive aut negative acceptæ; item perpendiculares ab extremitatibus ipsarum y ad planum P erectæ dicantur *secundae ordinatae* z, prouti in plani unam alteramve plagam cadunt, positive aut negative acceptæ: patet ipsi y ab x, necnon ipsi z ab y variam dependentiam tribui posse, in quovis tamen casu tam z quam y in dependentia simultanea a quovis $m\dot{x}$ esse (quicunque numerus ab 1 usque ad n substituatur ipsi m), atque hoc pacto, quodvis spatii punctum determinari posse.

Ita in Mechanica, si vis continuo agens sit w, spatium sub tempore t percursum sit s, et velocitas finalis ad finem temporis t sit v: ipsi

Hosted by Google

w, sive a tempore sive a velocitate, qua tum gaudet mobile, sive a spatio eousque percurso dependentia certa tribui potest.

Quæcunque sint variabiles $y, z, \ldots$ ab absoluta x utcunque (etsi tantum suppositive) dependentes: *denotetur illud* y, *quod cum* $m\dot{x}$ *simul ponitur, per* $y(m\dot{x})$, *et illud* z, *quod item tum ponitur, per* $z(m\dot{x})$.

Unde seriei ex $A(x, y, \ldots)$ functione absoluta derivatæ terminus generalis (differentiale verum ut supra) est

$$A(m\dot{x}, y(m\dot{x}), \ldots) - A((m-1)\dot{x}, y((m-1)\dot{x}), \ldots).$$

Denotetur autem

$$y(m\dot{x}) - y((m-1)\dot{x}) \quad \text{per} \quad \dot{y},$$

ita

$$z(m\dot{x}) - z((m-1)\dot{x}) \quad \text{per} \quad \dot{z},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

uti

$$m\dot{x} - (m-1)\dot{x} = \dot{x},$$

observando punctum nonnisi literæ variabilem *absolutam* denotanti impositum significare illam per n divisam (nisi aliunde constet) atque $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ semper pro quovis supra dicto et eodem valore ipsius m intelligi.

Si iam seriei ex $A(x, y, \ldots)$ — quotvis insint variabiles — derivatæ terminus generalis æquipollet tali expressioni, in qua, si pro $m\dot{x}$ ubique x scribatur, necnon, si adsit $y(m\dot{x})$, pro eo y scribatur, et ita si plures adsint, nulla litera puncto insignita ut factor ad prima altiorem potentiam elevata occurrat: tum talis expressio (substituto x ipsi $m\dot{x}$, et si adsit, y ipsi $y(m\dot{x})$, &c.) dicitur *differentiale strictius* ipsius $A(x, y, \ldots)$. Summa vero coefficientis omnis, per quem litera puncto insignita multiplicata est, vocatur *coefficiens* vel *quotiens differentialis* sive brevius *derivata ipsius* $A(x, y, \ldots)$.

Dum pro $m\dot{x}$ x id est $n\dot{x}$ scribitur, patet n termini ultimi numerum esse, uti seriei arithmeticæ terminus generalis per ultimum nempe $a + (n-1)d$ exprimitur. Nihilominus tamen, ut Tyrones minus confundantur præcisiusque rem intelligent, ubi necesse est pro dicto $n\dot{x}$ scri-

Hosted by Google

betur $m\dot{x}$, — atque etiam ubi dicetur ex. gr. $a(x)$ esse $\partial A(x)$, intelligatur $a(m\dot{x})$, sensu pag. 210.

13. Si una tantum sit litera puncto insignita in duobus differentialibus functionis eiusdem, sed non eadem, ex. gr. $\partial U = u\dot{x} \doteq v\dot{z}, U, u, v$ certas functiones denotantibus: tum $v\dot{z}$ dicitur *differentiale quoad* z et $u\dot{x}$ quoad x acceptum, atque v dicitur *derivata ipsius* U *quoad* z et u derivata quoad x accepta; denoteturque differentiale strictius per ∂, derivata vero per $\mathfrak{d}$, annotando quoad x vel z &c.

Est quoque manifesto

$$\dot{z} = 1\dot{z} = z^0\dot{z} = \partial z \text{ quoad } z,$$

uti $\dot{x}$ est ∂x quoad x; atque utrumque tam verum quam strictum differentiale est; nempe

$$\dot{z} = z(m\dot{x}) - z\big((m-1)\dot{x}\big).$$

Ita quum constans a cum quovis $m\dot{x}$ ponatur, differentiale constantis est 0: nempe

$$a(m\dot{x}) - a\big((m-1)\dot{x}\big) = a - a = 0;$$

unde et $\int 0$ æquale est quantitati cuilibet.

14. Si v nullam aliam variabilem nisi z complectatur, $v\dot{z}$ *differentiale purum* audit; ita $u\dot{x}$, si u nullam aliam nisi x complectatur. Atque ita v et u *derivatae purae* sunt. Patetque integrale ipsius $v\dot{z}$ esse functionem illam (ab ill. LAGRANGE *primitivam* dictam), cuius derivata est v quoad z. Ubi itaque nulla litera puncto insignita est in expressione aliqua ex. gr. $\alpha(z)$, una tantum variabili ex. gr. z gaudente: si ei signum $\int$ præponatur, intelligatur per $\int\alpha(z)$ functio illa primitiva, cuius derivata quoad z est $\alpha(z)$; id est plane id quod $\int\dot{z}\alpha(z)$ denotat, constantem in utroque casu semper addendo; nempe derivata ipsius $\int\dot{z}\alpha(z)$ est $\alpha(z)$, quoad z accepta.

Si vero p, u item nulla litera puncto insignita affectæ sint, per $\int u$ (quoad z) intelligatur $\int u\dot{z}$, atque ut u derivata pura fiat, u per z exprimen-

Hosted by Google

dum est. Siquidem $\dot{z} \overset{\circ}{=} p\dot{v}$ adeoque $u\dot{z} \overset{\circ}{=} up\dot{v}$, erit up derivata quoad v ipsius $\int u\dot{z}$, atque hæc functio primitiva quoad v ipsius up, nempe $\underset{(\text{quoad } v)}{\int up} = \underset{(\text{quoad } z)}{\int u}$.

15. Si plures insint functioni variabiles, et accipiatur differentiale derivataque eius quoad aliquam variabilium reliquis constantibus suppositis: dicuntur *differentiale partiale, et derivata partialis quoad illam variabilem.* Patebit mox summam differentialium partialium quoad singulas variabiles acceptorum esse differentiale ipsum functionis, et idem quoad derivatam probabitur.

16. *Derivata* dicitur *prima*, quod tamen, ubi necesse non est, omittitur; et μ-tæ derivatæ prima derivata dicitur *derivata* $(\mu+1)$-ta *functionis primitivae*, *functio* $(\mu+1)$-ta iuxta LAGRANGE.

Differentiale quoque dici solet *primum*, et differentiale primum μ-ti differentialis ita acceptum, ut literæ puncto insignitæ constantes supponantur, *differentiale* $(\mu+1)$-tum *functionis primitivae* dici solet. Sed derivatis prima, secunda, ... & omnia iuxta ill. LAGRANGE perfici possunt; adsummum derivatæ alicuius μ-tæ differentiale claritatis gratia adferri potest.

17. Quæcunque variabiles $u, v, z, \ldots$ fuerint, a certa variabili absoluta (ex. gr. x) sive necessario sive per certam in quovis casu conditionem præcepta positione simultanea dependentes: u dicatur $B(x)$, ac v dicatur $C(x)$, et z dicatur $D(x)$; differentiale verum ipsius $u(x)$ vero, id est $u(m\dot{x}) - u((m-1)\dot{x})$ dicatur $b(x)$, ita ipsius $C(x)$ sit $c(x)$, et ipsius $D(x)$ sit $d(x)$; atque sint $b(x)$ et $b_1(x)$ æquipollentia, ita $c(x)$ et $c_1(x)$, atque $d(x)$ et $d_1(x)$, nempe

$$\frac{b_1(x)}{b(x)} \backsim 1, \frac{c_1(x)}{c(x)} \backsim 1, \frac{d_1(x)}{d(x)} \backsim 1, \ldots$$

pro x ubique $m\dot{x}$ ponendo et omnia sensu superiore (pag. 210) intelligendo.

Quoad quasvis variabilium $u, v, z, \ldots$ essent differentialia $b_1(x)$, $c_1(x), \ldots$ accepta, imo etsi non gaudeant forma differentialis stricti; $b_1(x)$ ut termi-

Hosted by Google

nus generalis seriei summam eandem dat quam $b(x)$; superius (pag. 211 et sequ.) dicta enim applicari possunt.

Idem patet si tam $b_1(x)$ quam $b(x)$ per æqualia multiplicentur, imo etsi per æquipollentia multiplicentur, nempe (pag. 94) etiam

$$\frac{b_1(x)\,c_1(x)}{b(x)\,c(x)} \backsim 1,$$

et eadem applicari posse manifestum est, pro x ponendo $m\dot{x}$ et substituendo ipsi x ut supra, ut prodeant termini simultanei $b_1(m\dot{x})\ c_1(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})\ c(m\dot{x})$ pro serie utraque. Ad quotvis factores æquipollentes, semper uno altius ascendendo, idem extendi patet.

Ita (pag. 93) si æquipollentibus serierum terminis generalibus æquipollentia addantur, prodibunt termini generales summis serierum incrementorum æqualibus gaudentes; nempe

$$\frac{b_1(x)+c_1(x)}{b(x)+c(x)} \backsim 1.$$

Unde etiam *differentiale seriei convergentis*

$$B(x)+C(x)+\ldots$$

est summa differentalium functionum singularum.

Si nempe $\mathrm{d}B(x)$ sit $b_1(x)$ et $\mathrm{d}C(x)$ sit $c_1(x)$ &c, atque summæ serierum functionum $B(x), C(x), \ldots$ sint $B, C, \ldots$, et quas $b_1(x), c_1(x), \ldots$ dant, sint $B_1, C_1, \ldots$, atque

$$B+C+\ldots \backsim S,$$

et

$$B_1+C_1+\ldots = S_1,$$

ac summa totidem terminorum seriei $B+C+\ldots$ sit

$$= S-\omega;$$

pro quovis dato N datur tale n, idem pro quotvis functionibus certo numero acceptis semper, ut sit

Hosted by Google

$$(B_1 + C_1 + \ldots) - (B + C + \ldots) < \frac{S - \omega}{N}$$

sive

$$S_1 - S + \omega < \frac{S - \omega}{N};$$

unde quum $\omega \backsim 0$, etiam $S_1 - S \backsim 0$.

Est quoque manifesto derivata summæ functionum quoad eandem variabilem (ex. gr. x) accepta summa derivatarum singularum quoad eandem variabilem acceptarum. Nempe si

$$\partial\big(B(x) + C(x) + \ldots\big) = p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots,$$

est

$$\partial_x\big(B(x) + C(x) + \ldots\big) = p + q + \ldots$$

Sed e prius dictis id quoque sequitur, quod in quovis termino seriei incrementorum generali cuivis quantitati ei æquipollens (eatenus quod summa per id non mutetur) substitui possit. Itaque si terminus aliquis generalis integrandus sit, poterit in eo, differentiali cuivis quodvis aliud, quoad quamvis variabilem acceptum fuerit, dummodo omnia eidem variabili absolutæ ut basi respondeant, substitui; imo si toti termino alius æquipollens substituatur, unam tantum variabilem (ex. gr. z) continens, differentiale purum erit; termini æquipollentes vero integralia æqualia dabunt (pag. 215) præter constantem. Imo etiam si tantum derivata accipiatur, functio primitiva quoad z eadem prodibit.

18. Ut Tyrones primis elementis aliquantum imbuti ad sublimiora progredi animos capiant, exemplis quibusdam facilioribus (tam e Geometria quam e Mechanica) applicationem theoriæ dictæ illustrare libet; prius certarum functionum absolutarum valoris noti differentialia derivatasque referendo; tum certarum functionum absolutarum, quarum valor quærendus est, differentialia et derivatas exponendo; atque priora cum posterioribus (iuxta pag. 208) comparando; ut si æquipolleant, valores quæsiti innotescant.

Supponantur (paulo inferius demonstranda) sequentia, $x, u, v, z, p, \ldots$ ut sub (17.) intelligendo:

Hosted by Google

I. Est

$$\mathrm{d}au^k \doteq aku^{k-1}\dot{u} = aku^{k-1}v\dot{x},$$

si $v\dot{x} \doteq \dot{u}$ (pag. 221). Ex. gr. si $u = bx$ et $k = 3$, erit

$$\mathrm{d}au^k = 3ab^2x^2b\dot{x},$$

nam tum

$$\dot{u} = bm\dot{x} - b(m-1)\dot{x} = b\dot{x}.$$

II. Per præcedentia

$$\mathrm{d}(u+v+z+\ldots) \doteq \mathrm{d}u + \mathrm{d}v + \mathrm{d}z + \ldots$$

III. Est

$$\mathrm{d}(uv) \doteq u\dot{v} + v\dot{u},$$

imo differentiale facti quotvis functionum æquipollet summæ productorum e differentiali cuiusvis in factum reliquarum.

IV. Ex I et III fit

$$\mathrm{d}\frac{u}{v} = \mathrm{d}uv^{-1} \doteq u(-v^{-2})\dot{v} + v^{-1}\dot{u} \doteq -\frac{u\dot{v}}{v^2} + \frac{\dot{u}}{v} \doteq$$

$$\doteq \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2}.$$

V. Est

$$\mathrm{d}\log. u \doteq \frac{\dot{u}}{u} = \frac{v\dot{x}}{u}, \text{ [pro } v\dot{x} \doteq \dot{u}].$$

Per log. intelligitur logarithmus naturalis, per Log. vero artificialis.

VI. Hinc

a) Si $A(x)$ functio absoluta fuerit et sit

$$B(x) = au^k,$$

et

$$\mathrm{d}A(x) \doteq aku^{k-1}\dot{u} \doteq \mathrm{d}B(x),$$

erit (per I. et pag. 215)

$$A(x) = au^k - B(0) + A(0);$$

nempe

$$\int aku^{k-1}\dot{u} = au^k + \text{constans}$$

Hosted by Google

prodibit, si resecto $\dot{u}$ exponenti ipsius u addatur 1, et reliquum, nempe derivata ipsius $B(x)$ quoad u per summam dictam dividatur; excepto si $k=0$ sit [per V.]; constans vero addenda ei, quod hoc pacto prodit, postea quæritur. Ex. gr. si pro u ponatur x, erit

$$\int x^2 \dot{x} = \frac{x^3}{3} + \text{constans},$$

et (per V.)

$$\int x^{-1} \dot{x} = \log. x + \text{constans}.$$

b) Ex II. est

$$\int (\dot{u} + \dot{v} + \ldots) = \int \dot{u} + \int \dot{v} + \ldots + \text{constans}.$$

c) Ex III. est

$$\int (u\dot{v} + v\dot{u}) = uv + \text{constans}.$$

et ex IV. est

$$\int \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2} = \frac{u}{v} + \text{constans}.$$

d) Ex V. vero est

$$\int \frac{\dot{u}}{u} = \log. u + \text{constans}.$$

e) Si vero terminus generalis seriei incrementorum, ut dictum (pag. 210) est, sit $b(m\dot{x})$, et alius seriei terminus generalis sit $a(m\dot{x})$, atque

$$\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \beta;$$

erit

$$B = \beta A,$$

summa prioris B et posterioris A dicta. Hinc

$$\int a(x) = \frac{\int b(x)}{\beta} + \text{constans},$$

nempe $A = \frac{B}{\beta}$. Ex. gr.

$$\frac{2x\dot{x}}{x\dot{x}} = 2 \quad \text{et} \quad 2x\dot{x} = \dot{x}^2 \quad [\text{per I}],$$

Hosted by Google

itaque

$$\int 2x\dot{x} = x^2 \quad \text{et} \quad \int x\dot{x} = \frac{x^2}{2}.$$

Ita

$$\int \frac{x^2\,\dot{x}}{ax^3} = \frac{1}{3a}\log. ax^3,$$

nam si (in V.) $u = ax^3$ tum est (per I.) $\partial u = 3ax^2\,\dot{x}$; itaque

$$\int \frac{3ax^2\,\dot{x}}{ax^3} = \log. ax^3,$$

est vero

$$\frac{3ax^2\,\dot{x}}{ax^3} : \frac{x^2\,\dot{x}}{ax^3} = 3a.$$

f) Sed ex

$$\partial \log. u \doteq \frac{\dot{u}}{u}$$

sequitur etiam

$$u\partial \log. u \doteq \dot{u},$$

per quod functio, etsi variabilis in exponente sit, differentiari potest. Sit ex. gr.

$$u = \alpha^{ax};$$

erit

$$\partial u = \alpha^{ax}\partial \log. \alpha^{ax} = \alpha^{ax}\partial (ax \log. \alpha)$$

(pag. 110), quod est $= \dot{x}\alpha^{ax} a \log. \alpha$.

Hinc

$$\int a\alpha^{ax} \log. \alpha = \alpha^{ax} + \text{const.}$$

atque (per præc.)

$$\int \alpha^{ax} = \frac{1}{a \log. \alpha}\int a\alpha^{ax} \log. \alpha = \frac{\alpha^{ax}}{a \log. \alpha} + \text{const.}$$

Ita (per V.)

$$\int \frac{a\alpha^{ax} \log. \alpha}{\alpha^{ax}} = \log. \alpha^{ax} + \text{const.}$$

g) Si terminorum plurium summa ad exponentem positivum integrum elevatorum sit derivata e talibus terminis constans, qui singuli integrari possunt: tum summa integralium singulorum terminorum erit integrale totius (pag. 226); id est summa functionum primitivarum ter-

Hosted by Google

minorum singulorum tanquam derivatarum erit functio primitiva derivatæ datæ. Sit nempe

$$\dot{u} \doteq p\dot{x}, \dot{v} \doteq q\dot{x}, \ldots$$

erit (pag. 93)

$$\dot{u} + \dot{v} + \ldots \doteq p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots$$

atque $p + q + \ldots$ erit derivata quoad x ipsius $\int(p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots)$; (pag. 223).

Si autem differentiale sit series infinita convergens formæ

$$(Ax^a + Bx^b + \ldots)\dot{x},$$

exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante et crescente in infinitum, uti fit per formulam binomii quoque: tum terminis pariter integratis prodit

$$\frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \ldots,$$

quod est

$$= x\left(\frac{Ax^a}{a+1} + \frac{Bx^b}{b+1} + \ldots\right),$$

quæ item series convergens est, si prior talis sit. Nam ab aliquo termino denominator $\geqq 1$ fit, abinde semper crescens; sit is β, et summa seriei prioris ab illo termino sit s, erit huius seriei summa ab eodem termino $\leqq \frac{xs}{\beta}$, eousque autem termini numero certo sunt, neque denominator 0 est (nempe si in VI a) $k = 0$ sit, patet).

Pro litera puncto insignita vero literam nominis eiusdem signo d præposito substitui posse, (quoad æquipollentiam, adeoque summam seriei incrementorum, et integrale) evidens est (pag. 210 &); uti etiam omnia dicta valent (ex. pag. 223), si litera puncto insignita ex. gr. $\dot{z}$ ex $p\dot{z}$ omissa, coefficientis differentialis p, *ut derivatae quoad* z, *functio primitiva quoad* z quæratur; imo si

$$\dot{z} \doteq v\dot{u} \text{ adeoque } p\dot{z} \doteq pv\dot{u},$$

et p ac v per variabilem u exprimatur, adeoque pv derivata pura quoad u fiat; tunc quoque etsi derivata prior quoad z pura non fuerit, hoc pacto quoad u pura reddita est, et erit

Hosted by Google

$$\int p\dot{z} = \underset{(\text{quoad } u)}{\int pv} = \underset{(\text{quoad } z)}{\int p}$$

si $\dot{z} \doteq v\dot{u}$ (pag. 221).

VII. Ita demonstrabitur paulo inferius:

a) Si $A(x)$ *aream* in plano denotet, inter y et x coordinatas perpendiculares et lineam per complexum extremitatum ordinatarum factam comprehensam: differentiale eius est $y\dot{x}$, derivata vero y, nempe ordinata abscissæ x variabilis absolutæ.

b) Si vero $A(x)$ lineam dictam denotet: derivata eius quoad x est $\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ seu $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$, si y' derivatam ipsius y significet.

c) Si $A(x)$ soliditatem corporis per revolutionem lineæ dictæ circa abscissarum lineam orti denotet: derivata eius quoad x est πy^2; et superficiei corporis huius derivata quoad x est

$$2\pi y\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ seu } 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

d) Ita paulo inferius (definiendo prius geometrice *centrum gravitatis*) demonstrabitur, derivatam (quoad abcissam x) distantiæ centri gravitatis ipsius M a certo plano P extra M cadente, esse $\frac{(a+x)\partial M}{M}$ per a distantiam a P talis puncti ipsius M intelligendo, quo nullum ipsi P propius est, per x vero rectam a (omnino ad P perpendicularem, ut lineam abcissarum, pro M quoad illam exprimendo) continuatam intelligendo. Unde distantia ipsa centri gravitatis erit

$$\int \frac{(a+x)\partial M}{M},$$

quod item

$$= \frac{1}{M}\int (a+x)\partial M,$$

quia M constans pro quovis casu manet idem, pro quovis $m\dot{x}$ in serie incrementorum ubique, adeoque et summa tota per M dividitur.

Hosted by Google

e) Ita si in motu rectilineo, ad finem spatii s tempore t percursi, velocitas v dicatur, et w vis continuo agens, sive constans sive lege certa variabilis sit, sive ipsius mobilis directione sive ei contraria agat; ponaturque pro mobili M punctum vel sphæra massæ 1; atque t sit variabilis absoluta, a qua reliquæ in quovis casu in dependentia simultanea sunt: erunt

$$s(m\dot{t}) - s((m-1)\dot{t}) \quad \text{et} \quad v(m\dot{t}) - v((m-1)t),$$

nempe $\dot{s}$ et $\dot{v}$ differentialia vera ipsorum s et v, imo stricta quoque, prius quoad s, posterius quoad v. Velocitas v est quantitas respectiva (pag. 47), exprimiturque numero pedum, qui sub temporis unitate (ex. gr. sub 1″) motu æquabili percurrerentur; vis w vero velocitate finali, quæ produceretur, si w constanter eadem ageret in ipsum M sub 1″.

Paulo inferius demonstrabitur quod sit

$$\frac{\dot{v}}{w\dot{t}} = \frac{\dot{v}}{w} : \dot{t} \backsim 1,$$

et

$$\frac{\dot{s}}{v\dot{t}} = \frac{\dot{s}}{v} : \dot{t} \backsim 1.$$

Unde

$$w\dot{t} \mathrel{\underline{\circ}} \dot{v} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{v}}{w} \mathrel{\underline{\circ}} t,$$

atque

$$v\dot{t} \mathrel{\underline{\circ}} \dot{s} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{s}}{v} \mathrel{\underline{\circ}} \dot{t},$$

w autem est derivata quoad t ipsius v, et $\frac{1}{w}$ derivata quoad v ipsius t, ac v est derivata quoad t ipsius s, et $\frac{1}{v}$ derivata quoad s ipsius t (pag. 221). Itaque integrale w quoad t, sive

$$\int w\dot{t} = \int \dot{v} = v;$$

et $\int \frac{1}{w}$ quoad v, sive

$$\int \frac{\dot{v}}{w} = \int \dot{t} = t;$$

Hosted by Google

et $\int v$ quoad t, sive

$$\int v\dot{t} = \int \dot{s} = s\,;$$

et $\int \frac{1}{v}$ quoad s, sive

$$\int \frac{\dot{s}}{v} = \int t = t.$$

Imo quum

$$\dot{s} \doteq v\dot{t} \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w},$$

adeoque (pag. 94)

$$\dot{s}\dot{t} \doteq \frac{v\dot{t}\dot{v}}{w}, \quad \text{et} \quad \frac{v\dot{v}}{w} \doteq \dot{s}, \quad v\dot{v} \doteq w\dot{s},$$

et hinc etiam

$$s = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{v}{w},$$

ac (VI)

$$\frac{v^2}{2} = \int w\dot{s},$$

et

$$v = \sqrt{2\int w\dot{s}}.$$

Ubilibet vero pro re nata applicatur (pag. 221).

Item ex eo, quod

$$v = \text{ȣ}s_{(\text{quoad } t)},$$

sequitur, quoad eandem variabilem t accipiendo differentialia et derivatas,

$$\text{ȣ}v = \text{ȣȣ}s \quad \text{atque} \quad \text{ȣ}v = \text{ȣ}^2 s\,;$$

idest differentiale ipsius v quoad t est differentiale quoad t derivatæ quoad t ipsius s; derivata vero quoad t ipsius v est derivata quoad t derivatæ quoad t ipsius s, idest *derivata* ipsius s quoad t *secunda*, quod per $\text{ȣ}^2 s$ denotari potest; atque $\int \text{ȣȣ}s$ sive

$$\int_{(\text{quoad } t)} \text{ȣ}^2 s = v \quad \text{et} \quad \iint_{(\text{quoad } t)} \text{ȣ}v = s.$$

Solet hoc, quod $\text{ȣ}v$ sit $= \text{ȣȣ}s$ sive $\text{ȣ}^2 s$ exprimi modo sequenti:

Hosted by Google

$$vdt = ds, \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{et inde} \quad dv = d\frac{ds}{dt},$$

ita tamen, ut dt pro constante reputetur. Exemplo sit

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

ut in motu uniformiter accelerato; est

$$\mathfrak{d}s = gt, \text{ quia } \mathrm{d}s = gt\dot{t},$$

et

$$\mathrm{d}\mathfrak{d}s = \mathrm{d}(gt) = g\dot{t}, \text{ ac } \mathfrak{d}^2 s = g;$$

itaque

$$\mathrm{d}v = g\dot{t} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}v = g,$$

atque $\int g$ quoad t sive

$$\int gt = gt.$$

Est etiam pro dt constante

$$d\frac{ds}{dt} = d\frac{d.gt^2}{2dt} = d\frac{gtdt}{dt} = d.gt = gdt,$$

et

$$\int dt \int gdt = \frac{gt^2}{2} = s.$$

VIII. *a)* Quod $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad v) seu $\int \mathrm{d}v$ æquale est v, patet: quum sit (pag. 220)

$$\dot{v} = v(m\dot{t}) - v((m-1)\dot{t}),$$

ubi si ipsi m omnes numeri ab 1 usque ad n (inclusive) substituantur, terminis (ut pag. 209) intermediis seriei se mutuo destruentibus, manet $v(nt) - v(0\dot{t})$, idest v ipsum, quod ad finem ipsius t est, subtracto illo v, quod in initio est; nempe constans semper in integralibus et functionibus primitivis subintelligenda est, etsi alicubi omissa fuerit.

b) Notandum adhuc est: quod si functio absoluta $A(x)$, cuius valor quæritur, talis sit, ut crescente x valor eius decrescat, ita ut minus posi-

Hosted by Google

tivum fiat, adeoque $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ negativum sit, atque $B(x)$ sit functio summatrix, adeoque (pag. 215)

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \doteq B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}) \doteq u(m\dot{x}):$$

erit quodvis horum differentialium negativum æquipollens ipsi

$$-\big(A((m-1)\dot{x}) - A(m\dot{x})\big) \doteq -\big(B((m-1)\dot{x}) - B(m\dot{x})\big);$$

eritque

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0)$$

utrumque negativum; $A(0) - A(x)$ vero positivum atque

$$A(0) = B(0) - B(x) + A(x);$$

et quum sæpe valor ipsius $A(x)$ plane pro $x = 0$ quæratur, valor quæsitus hoc modo exhibetur; idem patet, si valor ipsius $A(x)$ pro alio valore ipsius x quæratur.

Ex. gr. sit trianguli abscissa (Fig. 21)

$$a - (b + x) = y,$$

denotetque $A(x)$ aream inter abscissam et ordinatam atque rectam: erit

$$\frac{(a - (b + m\dot{x}))^2}{2} < \frac{(a - (b + (m-1)\dot{x}))^2}{2},$$

adeoque

$$A(m\dot{x}) < A((m-1)\dot{x});$$

est vero

$$A((m-1)\dot{x}) - A(m\dot{x}) \doteq \big(a - (b + m\dot{x})\big)\dot{x};$$

itaque

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \doteq -\big(a - (b + m\dot{x})\big)\dot{x},$$

seu

$$\partial A(x) = -y.$$

Unde $\int(-y)$ seu hic

$$\int\limits_{(\text{quoad } x)} (b + x - a) = \int b + \int x - \int a = bx + \frac{x^2}{2} - ax + \text{const.};$$

et hoc est, constante posito 0, $B(x)$, cui addi debet $A(0) - B(0)$, ut $A(x)$ prodeat; interim heic $A(x) = 0$ pro $x = a - b$ et $B(0) = 0$. At si area

Hosted by Google

pro $x = 0$ quæratur, erit

$$A(0) = B(0) - B(x) + A(x) = A(x) - (bx + \frac{x^2}{2} - ax),$$

quod pro $x = a - b$ est

$$= a(a-b) - b(a-b) - \frac{(a-b)^2}{2},$$

et hoc reducendo:

$$= \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Si (Fig. 22) $A(x)$ aream inter abscissam $1-(b+x)$ et ordinatam ipsius atque arcum circuli pro radio 1, a fine radii usque ad ordinatam e fine ipsius $b+x$ seu ipsius $1-(b+x)$ erectam denotet: et hic est $dA(x)$ manifeste non $\vdash\!\!+ y\dot{x}$ sed $\vdash\!\!\dashv y\dot{x}$, adeoque derivata quoque negativa; itaque $\int(\vdash\!\!\dashv y)$ quærendum est pro valore $A(x) - A(0)$; atque æquatione e centro

$$y = \left(1-(b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\int\vdash\!\!\dashv\left(1-(b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}\!\!\dashv = \int\left(1-(b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

nam ut (pag. 194) dictum est, in evolutione binomiali (hic integranda), quum radicis quadratæ valor etiam negativus detur, valor uterque exhibetur, adeoque et positivus pro $A(0) - A(x)$.

c) Est etiam aliquando functionis valor ∞ pro $x = 0$; de quo casu aliquid adiiciendum est ad dilucidationem paginæ (214) et sequentium. In hoc casu si $A(0) = \pm\infty$, non fit

$$A(zx) - A(0) \backsim 0;$$

et serierum ex $A(x)$ et $B(x)$ derivatarum termini non debent usque ad 0 extendi, sed tantum usque ad certum $zx = p$; fietque

$$A(x) = B(x) - B(p) + A(p);$$

Hosted by Google

adeoque constans tum $A(p) - B(p)$ sumitur, haud immiscendo infinitum per $A(0) - B(0)$. In præcedentibus est zx ad finem ipsius x; omnia tamen rite applicantur.

d) Pagina (215) differentiale *terminum generalem* $u(m\dot{x})$, *non valorem specialem* denotare dictum est; at quæri potest terminus seriei μ-tus pro $x = a$; de punctis discretis, ubi n-tus fit $= 0$ vel $= \infty$, inferius.

IX. *a)* Hinc (ex I et VII) lineæ, cuius ordinata y ad abscissam x perpendicularis est $= ax^p$, area inter coordinatas x, y atque lineam ipsam comprehensa est $= \int y$, quoad x, (uti hic, donec aliud monitum fuerit, semper intelligendum est), et hoc

$$= \frac{ax^{p+1}}{p+1} + \text{constans},$$

ubi constans $= 0$, quum

$$A(0) - B(0) = 0,$$

nam tam area, quam $B(x)$ est 0 pro $x = 0$. Est vero hoc de quovis valore sive fracto sive negativo ipsius p verum, excepto si $p = -1$, tunc enim (VI, *d*)

$$\int y = \int \frac{a}{x} = a \log. x$$

et tum hæc erit areæ expressio, ut statim hyperbolæ exemplum ostendet.

Ita area parabolæ, cuius $y = ax^{\frac{1}{2}}$ (pro a æquali radici quadratæ parametri), est

$$= ax^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} ax^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} xy.$$

b) Si $y = \frac{1}{1+x}$ sit, uti (Fig. 23) ad hyperbolæ æquilateræ asymptotam ordinata perpendicularis, area (VII, *a*) est $\int \frac{1}{1+x}$; et soliditas per revolutionem orta est $\int \frac{\pi}{(1+x)^2}$; est vero (V.)

Hosted by Google

$$\frac{1}{1+x} = \partial \log.(1+x),$$

itaque

$$\log.(1+x) = B(x)$$

functio summatrix erit et

$$\int \frac{1}{1+x} = \log.(1+x);$$

crescente itaque x ad dextram positive, crescet area in infinitum; de casu pro abscissa negativa statim dicetur. Soliditas vero erit finita semper; imo si $x \backsim \infty$, soliditas hyperbolæ circa asymptotam revolutae tendit ad π; nempe

$$\int \frac{\pi}{(1+x)^2} = \pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x} + \text{constans} = \frac{-\pi}{1+x} + \text{constans};$$

nempe heic tam $\frac{\pi x}{1+x}$, quam $\frac{-\pi}{1+x}$ functio summatrix esse potest, discrimenque tantum in constante est (pag. 218), nimirum differentiale derivataque tam ipsius $\frac{x}{1+x}$, quam ipsius $\frac{-1}{1+x}$ eadem sunt, nempe derivata utriusque est (IV.) $\frac{1}{(1+x)^2}$; nimirum

$$\partial \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\partial x - x\partial(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ita

$$\partial \frac{-1}{1+x} = \frac{(1+x)\partial(-1) - (-1)\partial(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{0+1}{(1+x)^2}.$$

Sed prouti $\frac{x}{1+x}$ vel $\frac{-1}{1+x}$ pro functione summatrice accipiatur, constans alia erit; nam in casu primo

$$B(0) = \frac{0}{1+0} = 0,$$

in altero vero

$$B(0) = \frac{-1}{1+0} = -1;$$

adeoque quum heic $A(0) = 0$, erit constans prior

$$A(0) - B(0) = 0,$$

Hosted by Google

posterior vero erit

$$A(0) - B(0) = 1;$$

itaque integrale nempe

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + 0,$$

et simul

$$= \frac{-1}{1+x} + 1 = \frac{x}{1+x},$$

idem in utroque casu. Consequenter:

$$\pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x},$$

quod $\backsim \pi$, si $x \backsim \infty$, quia tum $\frac{x}{1+x} \backsim 1$.

Est autem π area circuli, cuius radius 1 est; nam diameter est tum $= 2$, peripheria $= 2\pi$, et $2\pi . \frac{1}{2} = \pi$; est igitur soliditas hæc æqualis basi, nempe areæ circuli ipso $\mathfrak{af} = 1$ tanquam radio in revolutione dicta descripti; omnibus quoad unitates suas expressis (pag. 36).

c) Aliquid de area inter asymptotam et hyperbolam quoad logarithmos negativorum annotare liceat. Sit $\mathfrak{c}$ centrum hyperbolæ æquilateræ, ubi angulus asymptotarum rectus est; sitque $\mathfrak{ac} = \mathfrak{cd} = 1$; sintque $\mathfrak{f}, \mathfrak{k}$ vertices hyperbolæ; $\mathfrak{af}, \mathfrak{dk}$ (*potentiae hyperbolae* dictæ) manifesto sunt unitati æquales. Dicantur abscissæ ex $\mathfrak{c}$ ad asymptotam sumtæ (ad dextram positivæ, ad lævam negativæ) nomine generali z; et sit z variabilis absoluta, adeoque $\dot{z} = \frac{z}{n}$. Accipiantur præterea areæ ab utraque potentia hyperbolæ versus asymptotam alteram introrsum negative, positive extrorsum; et erit area inter ordinatam, abscissam z, hyperbolam, et potentiam hyperbolæ ordinatæ proximam comprehensa, logarithmus naturalis ipsius z, sensu elementari.

Quodsi ordinatæ inferius negative accipiantur, facile patet, per $y = \frac{1}{z}$ totam hyperbolam exhiberi. Nam si e quocunque hyperbolæ puncto $\mathfrak{g}$, sint perpendiculares $\mathfrak{gp}$, $\mathfrak{gh}$, pro abscissa $\mathfrak{cp}$ esset ordinata $\mathfrak{gp} = \frac{1}{\mathfrak{gh}}$ quia $\mathfrak{gh} = \mathfrak{cp}$; consequenter $\mathfrak{gh} = \frac{1}{\mathfrak{gp}} = \frac{1}{\mathfrak{ch}}$; adeoque punctum $\mathfrak{g}$ per

Hosted by Google

ordinatam abscissæ ch determinatur. Idem de plaga inferiore patet; uti etiam abscissam quamvis, utvis parvam etiam, per ordinatam suam multiplicatam esse $= 1$.

d) Derivetur series incrementorum ex $\log. z$; erit terminus generalis

$$\log.(m\dot{z}) - \log.((m-1)\dot{z}) = \log.\frac{m\dot{z}}{m\dot{z}-\dot{z}},$$

quod item

$$= \log.\left(1 : \frac{m\dot{z}-\dot{z}}{m\dot{z}}\right) = -\log.\frac{m\dot{z}-\dot{z}}{m\dot{z}} = -\log.\left(1-\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right),$$

quod quum n ita augere liceat, ut $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$ fractio vera sit, est (pag. 188)

$$= -\left(-\frac{\dot{z}}{m\dot{z}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right)^3 - \ldots\right)$$

substituendo $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$ ipsi u, quum utrumque positivum sit, propter $\dot{z}$ et $m\dot{z}$ utrumque simul negativum aut simul positivum. Erit autem terminus seriei primus $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, et si summa seriei s dicatur, atque (pag. 214) $m\dot{z}$ utvis parvum sed determinatum q sit, poterit n ita augeri pro dato quovis N idem pro terminis omnibus quos q haud excedit, ut

$$\left(\frac{\dot{z}}{q} : s\right) - 1 = \frac{\dot{z}}{qs} - 1$$

sit $< \frac{1}{N}$, seu breviter $\frac{\dot{z}}{q} : s \backsim 1$.

Nam seriei summa tota esset (per pag. 187)

$$< \left(u + \frac{u^2}{2}\right) : (1-u^2) = \frac{2u+u^2}{2-2u^2},$$

et

$$u : \frac{2u+u^2}{2-2u^2} = \frac{2-2u^2}{2+u},$$

quod $\backsim 1$, dum $u \backsim 0$.

Hosted by Google

Consequenter $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, idest modo consueto exprimendo $\frac{dz}{z}$ *differentiale*, $\frac{1}{z}$ vero *derivata quoad z logarithmi naturalis ipsius z est.*

Denotet iam superius $A(z)$ aream antea dictam, dicaturque differentiale verum eius $a(z)$, et log. z dicatur $B(z)$, atque differentiale verum eius sit $b(z)$; erit $B(z)$ functio summatrix pro $A(z)$. Nam

$$a(m\dot{z}) \mathrel{\underline{\circ}} \dot{z}y \mathrel{\underline{\circ}} \frac{\dot{z}}{z};$$

namque differentiale verum ipsius $A(z)$ est

$$A(m\dot{z}) - A\big((m-1)\dot{z}\big),$$

quod (Fig. 23) est $\lhd \frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}}$ et $\rhd \frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$; atque

$$\frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}} : \frac{\dot{z}}{m\dot{z}} = \frac{m}{m-1},$$

quod $\backsim 1$, quum pro quovis q liceat n ita augere, ut dictum est; consequenter si $\frac{\dot{z}}{z} = \dot{z}y$, sitque hoc superius $u(z)$ (pag. 214), erit

$$a(m\dot{z}) \mathrel{\underline{\circ}} u(m\dot{z}) \mathrel{\underline{\circ}} b(m\dot{z});$$

itaque esset per (pag. 225) $A(z) = \int u(z)$ id est $\int \frac{\dot{z}}{z}$, sive $\int \frac{1}{z}$ quoad z, (si tantum derivata ponatur); nempe $A(z) = \log. z + \text{const.}$, quia demonstratum est, differentiale logarithmi naturalis ipsius z esse $\frac{\dot{z}}{z}$ et derivatam quoad z esse $\frac{1}{z}$.

Constans heic et in casu simili prodit sic. Est omnino

$$A(z) - A(p) = B(z) - B(p),$$

pro p utvis parvo (pag. 214) et quovis z, adeoque etiam pro $z = 1$; itaque

$$A(1) - A(p) = B(1) - B(p);$$

sed

$$A(1) = 0 = B(1),$$

Hosted by Google

adeoque

$$A(p) = B(p) \text{ et } A(p) - B(p) = 0;$$

consequenter

$$A(z) = B(z) + A(p) - B(p) = B(z).$$

Patet autem inter potentias hyperbolæ crescente z decrescere tam logarithmum quam aream, quum z ibi unitate minus sit; et logarithmum areamque negativa esse, adeoque tam $B(m\dot{z}) - B((m-1)\dot{z})$ quam $A(m\dot{z}) - A((m-1)\dot{z})$ positiva, e minore negativo maius negativum subtrahendo. Ultra potentias extrorsum utrinque crescente z, area logarithmusque positive crescit et incrementum positivum fit, e maiore positivo minus subtrahendo. Ita $\frac{\dot{z}}{z}$, nempe differentiale, semper positivum erat.

Quod vero logarithmos abscissarum negativarum attinet: etiamsi

$$B(z) = \log. z$$

sensu (pag. 193) sit, poterunt in terminis seriei incrementorum, cuius terminus generalis est $B(m\dot{z}) - B((m-1)\dot{z})$, logarithmi tales valores accipi, ut

$$A(m\dot{z}) - A((m-1)\dot{z}) \stackrel{\circ}{=} B(m\dot{z}) - B((m-1)\dot{z}),$$

ut antea incrementa ab $A(p)$ et $B(p)$ incipiendo. Nempe (pag. 200)

$$\log. (m\dot{z}) = \log. \text{ elem. } (m\dot{z}) + \pi\sqrt{-1},$$

et si pro quovis m idem $\pi\sqrt{-1}$ ponatur, fiet

$$\begin{aligned} & B(m\dot{z}) - B((m-1)\dot{z}) \\ = & \log. \text{elem. } (m\dot{z}) + \pi\sqrt{-1} - (\log. \text{elem. } ((m-1)\dot{z}) + \pi\sqrt{-1}) \\ = & \log. \text{ elem. } (m\dot{z}) - \log. \text{elem. } ((m-1)\dot{z}). \end{aligned}$$

Itaque hoc pacto fiet

$$A(z) - A(p) = B(z) - B(p);$$

sed pro $z = -1$ fiet

$$A(-1) = 0, B(-1) = \pi\sqrt{-1},$$

Hosted by Google

idest unus valor ipsius log. (-1) est $\pi\sqrt{-1}$; consequenter

$$-\pi\sqrt{-1}=A(p)-B(p),$$

atque

$$A(z)=B(z)-\pi\sqrt{-1}=\log.\,\text{elem.}\,z+\pi\sqrt{-1}-\pi\sqrt{-1}=\log.\ \text{elem.}\,z.$$

Non igitur areæ inferiores logarithmos sensu (pag. 193) nempe quantitates imaginarias exhibent, sed elementares tantum; atque si in terminis seriei diversa imaginaria adnexa sint, se invicem haud elident imaginaria, ut cum terminis seriei areæ simultaneis æquipolleant.

Notandum vero est, differentiale logarithmi naturalis ipsius z tunc quoque $\frac{\partial z}{z}$ esse, si z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis eius functio fuerit.

Sit nempe $z=C(x)$, erit

$$\dot{z}=C(m\dot{x})-C((m-1)\dot{x}).$$

Sed

$$C((m-1)\dot{x})=C(m\dot{x})-\big(C(m\dot{x})-C((m-1)\dot{x})\big)$$
$$=C(m\dot{x})-\dot{z}=q-\dot{z},$$

si $C(m\dot{x})$ generaliter q dicatur. Itaque terminus generalis seriei ex $\log.\,z=\log.\,C(x)$ derivatæ est

$$\log.\,C(m\dot{x})-\log.\,C((m-1)\dot{x})=\log.\,q-\log.\,(q-\dot{z})=\log.\,\frac{q}{q-\dot{z}}=\log.\left(1:\frac{q-\dot{z}}{q}\right)$$
$$=-\log.\left(1-\frac{\dot{z}}{q}\right);$$

ubi pariter ut antea n ita accipi posse facile patet, ut $\frac{\dot{z}}{q}<1$ sit, atque seriei ex (pag. 186) evolutæ terminus primus $\frac{\dot{z}}{q}$ summæ seriei totius æquipolleat. Est igitur $\frac{\dot{z}}{C(m\dot{x})}$, sive x pro $m\dot{x}$ ponendo (pag. 220) $\frac{\dot{z}}{C(x)}$, id est $\frac{\dot{z}}{z}$ differentiale quoad z logarithmi naturalis ipsius $z=C(x)$ et $\frac{1}{z}$ derivata quoad z. Potest vero (pag. 224) ipsi $\dot{z}\,\partial C(x)$ substitui; estque

Hosted by Google

$$\int \frac{\partial C(x)}{C(x)} = \log. C(x) + \text{constans}.$$

e) Soliditas paraboloidis est (pag. 229)

$$\int \pi y^2 = \int \pi p x = \frac{\pi p x^2}{2}$$

pro parametro p; constans est 0, quia pro $x = 0$ est tam area quam $\frac{\pi p x^2}{2}$, nempe functio summatrix $= 0$. Ita soliditas pro $y = a x^p$ est

$$\int \pi a^2 x^{2p} = \frac{\pi a^2 x^{2p+1}}{2p+1}.$$

Ellipsoidis soliditas pariter, per

$$y = \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pro a axem maiorem denotante, est æqualis

$$\int \pi y^2 = \int \pi \left(px - \frac{px^2}{a}\right) = \int \pi p x - \int \frac{\pi p x^2}{a} = \frac{\pi p x^2}{2} - \frac{\pi p x^3}{3a} = \pi p \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right).$$

Eadem expressio hyperboloidis est, signo — in + mutato, quum pro parametro p et axe maiore a sit in ellipsi $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, et in hyperbola $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$

f) Notandum vero est ex (pag. 210) sequi, quod si duarum functionum $A(x)$ et $B(x)$ derivatæ u et v quoad eandem variabilem acceptæ tales fuerint, ut $\frac{u}{v} = k$, quosvis terminos simultaneos ita ut superius intelligendo, etiam $A(x) - A(0)$, nempe summa seriei ex $A(x)$ derivatæ sit $= k\big(B(x) - B(0)\big)$. Si nimirum termini generales sint $a(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$ et

$$a(x) \doteq u\dot{x}, \text{ atque } b(x) \doteq v\dot{x}, \text{ atque } \frac{u\dot{x}}{v\dot{x}} = k$$

adeoque

$$u\dot{x} = kv\dot{x};$$

per consequentiam $a(x) \doteq k\, b(x)$ esse e superioribus evidens est.

Hosted by Google

Applicando hoc ad aream soliditamque ellipseos ad aream soliditatemque circuli relatam, erit ordinatis (pro eodem x) y', y dictis, et diametro circuli $= a$

$$\frac{y'}{y} = \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} : (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)}} = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a};$$

si nimirum b dicatur axis minor (pag. 116), pro $y' = \frac{b}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$ erit

$$\frac{b^2}{4} = \frac{pa}{2} - \frac{pa^2}{4a} = \frac{ap}{4},$$

unde $b^2 = ap$ et $p = \frac{b^2}{a}$; quum ergo sit $\frac{y'}{y} = \frac{b}{a}$, est area circuli C et area ellipseos E dicta, $\frac{E}{C} = \frac{b}{a}$, et $E = \frac{bC}{a} = \frac{ba^2\pi}{4a} = \frac{ba\pi}{4}$, quum area circuli sit $\frac{a^2\pi}{4}$ pro diametro a.

Ita soliditatum E' et C' dictarum, derivatis Y' et Y dictis; est

$$\frac{Y'}{Y} = \pi\left(px - \frac{px^2}{a}\right) : \pi(ax - x^2) = \pi y'^2 : \pi y^2 = \frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)} = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Itaque

$$\frac{E'}{C'} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ et } E' = \frac{C'b^2}{a^2},$$

quod, quum soliditas sphæræ sit $\frac{a^3\pi}{6}$, est $= \frac{ab^2\pi}{6}$; quæ nempe soliditas ellipsoidis, cuius axis minor b est, circa axem maiorem a revolutæ est.

g) Si arcus circuli x sit variabilis absoluta, demonstrabitur paulo inferius derivatam ipsius x quoad tangentem eius acceptam esse $(1 + z^2)^{-1}$, si z dicatur tang. x; unde

$$x = \int_{(\text{quoad } z)} (1 + z^2)^{-1} = \int (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots),$$

quod item est

$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

Hosted by Google

et hoc, si x æquale est dimidio quadranti, adeoque z æquale radio $= 1$, est

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

quæ series Leibnitziana est, totaque peripheria octuplum eius est; atque et hic si ex. gr. apud $\frac{1}{3}$ subsistatur, defectus, nempe quod adhuc addendum esset, est $< \frac{1}{5}$; et si illum terminum negativum, in quo subsistere libet, excipiens denominator μ sit, erit defectus $< \frac{1}{\mu+2} \backsim 0$.

h) Sit exemplum etiam ad longitudinem arcus per formulam superius allatam, determinandam (pag. 229). Sit u arcus circuli, pro abscissa x e centro, atque pro $x = \sin. u$, est $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ pro radio 1; erat vero

$$\partial u = \left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

estque

$$\partial y = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad (\partial y)^2 = \frac{x^2}{1 - x^2},$$

atque

$$1 + (\partial y)^2 = \frac{x^2 + 1 - x^2}{1 - x^2} = (1 - x^2)^{-1}, \quad \text{et} \quad \partial u = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$u = \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\right)$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

quod pro $u = 30^\circ$, adeoque $x = \sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ fit

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7.2^7} + \ldots$$

atque π, id est dimidium peripheriæ pro radio 1, seu per quod diameter quilibet multiplicatus dat peripheriam, seu area circuli radii 1, nempe $2\pi\frac{1}{2} = \pi$, est series hæc per 6 multiplicata; atque si ad n-tum terminum subsistatur, denominator est

$$2.4\ldots(2n-2).(2n-1)\,2^{2n-1},$$

Hosted by Google

et terminum sequentem producit

$$\frac{(2n-1).(2n-1)2^{2n-1}}{2n.(2n+1)\,2^{2n+1}} = \frac{1}{4}\,\frac{(2n-1).(2n-1)}{2n.(2n+1)},$$

et quum exponens iste $<\frac{1}{4}$ sit, error summa (per pag. 151) calculata minor est.

i) Si æquatio lineæ u sit

$$y = \log.\left(x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

erit (per *d)* pag. 238).

$$\partial y = \left(1 + x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right) : \left(x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} : \left(x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

atque

$$(\partial y)^2 = (x^2-1)^{-1},$$

et

$$1 + (\partial y)^2 = \frac{1}{x^2-1} + 1 = x^2(x^2-1)^{-1},$$

et

$$\partial u = \left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

cuius integrale est $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$; huius enim derivata quoad x est

$$\frac{1}{2}.2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Consequenter arcus est $=\sqrt{x^2-1}$ exacte; quia pro $x=1$ est arcus $=0$ et $\sqrt{x^2-1}$ quoque $=\sqrt{1-1}=0$; itaque constans $=0$, quum superius $A(0)-B(0)=0$ sit, (pag. 215). Unitas per (pag. 111) mutatur.

Est vero linea hæc, quæ *catenaria* vocatur, (atque etiam quadrabilis est), insignibus alioquin etiam proprietatibus gaudens. Est linea transscendens, quum æquatio eius logarithmum involvat; estque linea illa, (Fig. 24) in qua filum perfecte flexibile (quasi lineam ubique æque gravem), extremitatibus non in eadem verticali fixis, distantia earum longius,

Hosted by Google

intensibile, conquiesceret; quam idcirco magnus GALILÆUS parabolam esse arbitrabatur, et nonnisi progressu Matheseos ulteriori tandem LEIBNITZ, JACOBUS ac JOHANNES BERNOULLII determinarunt.

Demonstratur nempe in Mechanica, quod si vires quorumvis arcuum ab imo puncto incipientium pondera directionibus tangentium ad fines eorum ductarum tenentes, ita decomponantur, ut pars horizontalis ubique sit æqualis, et altera sit verticalis, sint vires verticaliter tenentes, uti arcuum dictorum pondera, adeoque uti arcus. Si iam curva ista in eodem plano verticali invertatur, lineæ quæ antea quasi sursum trahendo tenebant, nunc pondera arcuum superiorum sustinebunt. Hinc catenaria in hoc situ limes est formæ e quam plurimis (nempe tenuissimis) prismatibus æqualibus structi fornicis sine ullo cæmento proprio pondere stantis.

Inservit eadem deorsum versa etiam pontibus exstruendis; duabus catenis sat firmis nempe extremitatibus ad litora fixis sustinetur pons ipse horizontalis.

k) Superficiei per revolutionem lineæ circa abscissam x ortæ derivata quoad x erat (pag. 229) $2\pi y\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; atque si linea circulus sit, erat (p. 244) $\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et hoc per $2\pi y$ (id est per $2\pi(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$) multiplicatum, est $=2\pi$. Consequenter $\int 2\pi = 2\pi x =$ zonæ superficiei sphæricæ pro abscissis ordinatisque e centro incipientibus; atque si $x=1$ fiat, prodit 2π, nempe dimidia superficies sphærica pro radio 1.

X. Exemplis his facilioribus e Geometria in gratiam Tyronum allatis, sit fas e Mechanica quoque faciliora quædam addere; applicando ea, quæ de motu rectilineo (pag. 230) dicta sunt, observandoque:

a) quod *quantitates respectivae* plane diversæ quoque *eadem quantitate* (ex. gr. *recta*) *sed diversis determinationibus expressae*, etsi quoad eas quantitates, quibus exprimuntur, æquales sint, nisi expresse aliud moneatur, tunc tantum dicuntur æquales, si cum determinationibus suis connexæ æquales sint; atque ut determinationes oppositorum et imaginariorum, nec aliæ determinationes cum quibus expresse

Hosted by Google

ponuntur quantitates, sunt ab iisdem avellendæ; ex. gr. dici quidem potest $+1$ et -1 esse æquales abstrahendo a determinatione, sed non potest $+1 = -1$ dici.

Ita tam *vis*, quæ *momentanea* dicitur, quam vis *constanter agens* recta exhiberi certis determinationibus possunt: nempe sit p punctum temporis expers, et dicatur primum $1''$ in p incipiens *primum* $1''$, et sequens $1''$ dicatur *secundum* $1''$; si iam in p talis vis adsit, quæ massam $M = 1$ sub primo $1''$ ad k pedum distantiam ferret, absque eo, ut inter initium finemque primi $1''$ ulla vis egisset, vis dicitur *momentanea* in p, — si neque in censum veniat virium numerus, qualitas, *tempusque actionis*, *dummodo resultatum* in p; *vis constanter agens* vero exprimitur numero pedum, quos M describeret sub secundo $1''$, si vis quæ in p est sub primo $1''$ continuo ageret in M, adeoque hic vis dictæ *tempus actionis* figitur.

In puncto temporis experte p vim motum producere concipi nequit: agere incipit, et in aliquo temporis puncto desinit. Potest quidem pro data quavis velocitate vis tanta agere, ut dato quovis tempore minus requiratur ad eam producendam; sed si hoc pacto tempus actionis tendat ad 0, velocitas finalis, quam eadem vis sub $1''$ continuo agendo produceret, tendit ad ∞.

b) Interim quidcunque sit vis, nonnisi in effectu nota, potest etiam non ut *respectiva*, sed ut *absoluta quantitas* considerari, et inde velocitas educi; posito vim eandem μ-tuplo tempore continuo agentem μ-tuplum effectum præstare, atque plurium virium quotvis directione eadem in idem agentium effectum esse summam effectuum singularum; nempe vim illam, qua massa M prope terram deorsum urgetur, *pondus M' massae M ad terram* dictam, sub $1''$ in ipsam M constanter agentem, illi velocitatem finalem $g =$ prope $31'$ procurare constat; si itaque eandem massam premat pondus P seu vis $= \mu M'$, vis ista constanter sub $1''$ agendo, velocitatem finalem $\mu g = \frac{Pg}{M'}$ ipsi M conciliabit.

Hosted by Google

c) Denotetur (pag. 219) pro variabili absoluta t spatium usque ad finem m-ti t percursum per $s(m\dot{t})$, velocitas, quæ ad finem m-ti $\dot{t}$ est, sit $v(m\dot{t})$, vis autem velocitate finali (sensu pag. 230) expressa, quæ ad finem m-ti t adest, continuo agens denotetur pariter per $w(m\dot{t})$, atque sit w prius constans, ex. gr. $=g$.

Erit in hoc casu $\dot{s}$ id est

$$s(m\dot{t}) - s((m-1)\dot{t}) \succ \dot{t}v((m-1)\dot{t}),$$

quia spatium hoc sub $\dot{t}$ motu æquabili nonnisi velocitate $v((m-1)\dot{t})$ percursum est, præterea vero sub m-to $\dot{t}$ agente vi constante, sub quavis parte continua ipsius $\dot{t}$ crevit velocitas: at idem $\dot{s}$ est $\prec \dot{t}.v(m\dot{t})$, quia velocitas sub m-to $\dot{t}$ semper minor fuit antea quam ad finem. Est autem in hoc casu $v(m\dot{t}) = gm\dot{t}$, quia vis eadem quo longius constanter agit, eo maiorem velocitatem producit, atque $\frac{\dot{t}g(m-1)\dot{t}}{\dot{t}gm\dot{t}}$ est $= \frac{m-1}{m}$; hoc vero tendit ad 1, dum $n \backsim \infty$.

Itaque $\frac{\dot{s}}{\dot{t}gm\dot{t}} \backsim 1$, (pag. 218); et gt ponendo pro $gm\dot{t}$ atque v pro $g\dot{t}$, est $v\dot{t}$ differentiale ipsius s. Differentiale ipsius v autem est $w\dot{t}$, in hoc casu $g\dot{t}$; nam $v(m\dot{t})$ est $= gm\dot{t}$; quia si ad finem unius 1″ producat vis constans velocitatem g, ad finem temporis $m\dot{t}$ dabit $mg\dot{t}$; itaque

$$v(m\dot{t}) - v((m-1)\dot{t}) = gm\dot{t} - g(m-1)\dot{t} = g\dot{t}.$$

Ex

$$\dot{s} \doteq v\dot{t} = gt\dot{t}$$

est (pag. 225)

$$s = \int_{(\text{quoad } t)} gt = \frac{gt^2}{2}.$$

Si vero w non sit constans, aut crescet aliquamdiu aut decrescet; ponatur crescere, quum eadem mutatis mutandis facile applicentur. Erit $s(m\dot{t}) - s((m-1)\dot{t}$, ut antea, $\dot{s}$ dicto,

$$v((m-1)\dot{t})\dot{t} + \frac{w((m-1)\dot{t})}{2}\dot{t}^2 \prec \dot{s} \prec v((m-1)\dot{t})\dot{t} + \frac{w(m\dot{t})}{2}\dot{t}^2;$$

Hosted by Google

nempe $\dot{s}$ est spatium sub m-to t percursum partim velocitate finali illa, quæ ad finem $(m-1)$-ti $\dot{t}$ est, quæ sola motu æquabili produceret spatium $\dot{t}v((m-1)\dot{t})$, partim vi w, quæ ad finem $(m-1)$-ti $\dot{t}$ est, abinde crescens; itaque incrementum istud spatii verum erit maius, quam si vis quæ in initio m-ti $\dot{t}$ fuit, eadem usque ad finem m-ti $\dot{t}$ mansisset; esset vero, hoc posito, incrementum hoc (per præcedentia) $\frac{w((m-1)\dot{t})}{2}\dot{t}^2$.

Est etiam idem incrementum verum minus quam si sub m-to t vis, quæ ad finem m-ti $\dot{t}$ est, quavis antea agente maior egisset; ita vero item per præcedentia esset incrementum $\frac{w(m\dot{t})}{2}\dot{t}^2$.

Sed

$$\frac{\dot{t}v((m-1)\dot{t})+\dot{t}^2\frac{w((m-1)\dot{t})}{2}}{\dot{t}v((m-1)\dot{t})+\dot{t}^2\frac{w(m\dot{t})}{2}} \backsim 1;$$

nam dividendo per $\dot{t}$, terminus secundus tam numeratoris quam denominatoris per primum divisus omni dabili minorem quotum dare potest (pag. 93), atque

$$\frac{v((m-1)\dot{t})\dot{t}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}} = 1.$$

Consequenter etiam (pag. 218).

$$\frac{\dot{s}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}+\frac{w(m\dot{t})}{2}\dot{t}^2} \backsim 1,$$

imo etiam

$$\frac{\dot{s}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}} \backsim 1;$$

imo quum $v((m-1)\dot{t}):v(m\dot{t}) \backsim 1$, quod patet si velocitates istæ ut ordinatæ proximæ ad abscissam tempus repræsentantem concipiantur, erit etiam

$$\frac{\dot{s}}{v(mt)t} \backsim 1;$$

Hosted by Google

atque hinc iuxta superiora et $v\dot{t}$ differentiale ipsius s et v derivata quoad t est; nempe more solito n ponendo pro m, fiet $v(n\dot{t}).\dot{t} = v\dot{t}$, quia $v(n\dot{t})$ significat illam velocitatem, quæ ad finem ipsius t est.

Pari modo prodit

$$\frac{\dot{v}}{w(m\dot{t}).\dot{t}} \backsim 1;$$

Nam per $\dot{v}$ intelligendo $v(m\dot{t}) - v\big((m-1)\dot{t}\big)$ est

$$w\big((m-1)\dot{t}\big).\dot{t} \lessdot \dot{v} \lessdot w(m\dot{t}).\dot{t};$$

namque velocitas, quæ sub m-to $\dot{t}$ accedit, producitur per vim, quæ ab initio m-ti $\dot{t}$ crescens constanter agit, si non cresceret, produceret velocitatem $w\big((m-1)\dot{t}\big).\dot{t}$, quia sub $1''$ producit $w\big((m-1)\dot{t}\big)$, (et $1''=1$ ponitur); si vis $w(m\dot{t})$ ageret sub $\dot{t}$, produceret $w(m\dot{t}).\dot{t}$; at vis ante finem m-ti $\dot{t}$ agens est semper $\lessdot w(m\dot{t})$.

Est autem

$$\frac{w\big((m-1)\dot{t}\big).\dot{t}}{w(m.\dot{t}).\dot{t}} \backsim 1,$$

quod patet ut antea. Consequenter (pag. 218) etiam $\frac{\dot{v}}{w(m\dot{t}).\dot{t}} \backsim 1$: atque ut antea $w\dot{t}$ est differentiale ipsius v, et w est derivata quoad t.

Functio differentianda hic non in concreto (ut ex. gr. area parabolæ) exhibetur, sed per limitem concipitur (pag. 217); quem dari patet, quum crescente n sine fine, crescat s sine fine, nunquam tamen fiat tantum, quam si per totum tempus velocitas ultima fuisset. Vide uberius in exemplo centri gravitatis paulo inferius methodum, functionem nonnisi per limitem datam differentiandi.

Reliqua (pag. 230—31) dicta fluunt.

d) Sit prius exclusa medii resistentia; sitque w prius ab s tum a t dependens.

(Fig. 25). Sit c centrum terræ, initium ipsius x distantiam positivam a centro denotantis (sive ante sive post centrum sit); sitque $x < a$, de

Hosted by Google

cuius fine massa M libere, seposita omni resistentia, sola vi gravitatis cadat; (supponendo, quasi nonnisi c et nota vis in eo esset, plane usque ad centrum valere legem rationis inversæ duplicatæ distantiarum, quamvis pro globo uniformiter denso sint vires attractivæ intra superficiem, ut distantiæ a centro); quæritur velocitas v directione prima ad finem ipsius x (sive ante sive post centrum) corporis per $a-x$ aut $a+x$ delapsi quanta sit?

Spatium s ante centrum est $=a-x$, si post centrum terminetur est $a+x$; vis w sub conditione dicta est $=\frac{r^2 g}{x^2}$, pro radio terræ $=r$ et vi gravitatis ad superficiem $=g$. Erat autem (pag. 231)

$$v=\sqrt{2\int\limits_{(\text{quoad } t)} w\,\partial s}=r\sqrt{2g\int\limits_{(\text{quoad } x)}\frac{1}{x^2}\,\partial(a-x)},$$

et hoc est

$$=r\sqrt{2g\int\limits_{(\text{quoad } x)}\frac{-1}{x^2}};$$

nam $\partial(a-x)=-1$. Est vero

$$\int\limits_{(\text{quoad } x)}\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{x}+\text{const.},\quad \text{nam } \partial\frac{1}{x}=\frac{x\partial 1-\partial x}{x^2}=\frac{-1}{x^2}.$$

Itaque

$$v^2=r^2\frac{2g}{x}+\text{constans}.$$

Reperitur autem constans, si v^2 dicatur $A(x)$ et functio summatrix sit

$$B(x)=r^2\frac{2g}{x};$$

nempe $A(a)$, uti velocitas pro $x=a$, est $=0$; atque

$$B(a)=r^2\frac{2g}{a};$$

consequenter

$$A(a)=B(a)+\text{constans},$$

Hosted by Google

sive

$$0 = r^2 \frac{2g}{a} + \text{constans},$$

atque hinc

$$\text{constans} = -r^2 \frac{2g}{a};$$

et est pro velocitate quæsita

$$v^2 = r^2 \frac{2g}{x} - r^2 \frac{2g}{a} = r^2 \frac{2g(a-x)}{ax},$$

id est

$$v = r\sqrt{\frac{2g(a-x)}{ax}}.$$

Manifesto sub conditione dicta, si $x \backsim 0$, fit $v \backsim \infty$; at nonnisi in centro in puncto temporis experte esset velocitas ∞, sine ullo tempore tamen, quo effectum aliquem producere queat; post centrum enim extemplo ad quasvis distantias æquales incrementa, quæ ante centrum positiva erant, negativa fiunt, et eædem velocitates finitæ erunt ad distantias a centro easdem x, tam ante quam post centrum; eritque post centrum ad distantiam $x = a$ velocitas 0 uti ante centrum, ut formula exhibet. Inde vero iterum redeundo, patet oscillationem perpetuam fieri: atque reditu quovis directionem velocitatis mutari; et innumerabilibus, spatiis quoad summam pedum percursorum acceptis, temporibusque competere velocitatem eandem: quæri tamen minimum tempus spatiumque pro data velocitate directione una vel altera potest; loca autem duo tantum pro velocitate quavis dantur, ad distantias a centro æquales, et ad distantiam ipso a maiorem formula quoque imaginarium dat.

Spatium s e valore ipsius v prodit; quum x inde repertum aut ex a substrahi, aut ipsi a addi debeat; prior est valor minimus, reliqua patent; temporis autem valor formularum heic nondum traditarum plurium alicuius integrationem requirit.

Quod vero formula superior velocitatem etiam ultra centrum exhibeat, quamvis ibi vis alia, nempe negative agens sit, inde patet: quod

Hosted by Google

si x etiam ultra centrum positive accipiatur, tantum ut distantia a centro, et sit ex. gr. $n=3$, atque ad finem ipsius x sit $v=\beta$ ante centrum; erit series ex $A(x)$ derivata (pag. 209), si post $A(1\dot{x})-A(0\dot{x})$, quum pro x ultra centrum incrementa ad distantias æquales opposita priorum sint, quasi retrorsum continuetur, sequens:

$$A(3\dot{x})-A(2\dot{x})+A(2\dot{x})-A(1\dot{x})+A(1\dot{x})-A(0\dot{x})+A(0\dot{x})-$$
$$-A(1\dot{x})+A(1\dot{x})-A(2\dot{x})+A(2\dot{x})-A(3\dot{x}),$$

nempe incrementum supra β erit 0; id est, erit et hic velocitas eadem, nempe β.

Erat autem conditio tantum supposita, quasi punctum in spatio vi attractiva telluris tota polleret. Si vero globus radii r uniformiter densus esset, tum vires attractivæ essent ut distantiæ z a centro. Unde quum vis sit $\frac{zg}{r}$, erit

$$v=\sqrt{\frac{2g}{r}\int z\partial(r-z)}=\sqrt{-\frac{2g}{r}\int z}=$$
(quoad z) (quoad z)

$$=\sqrt{-\frac{2g}{r}\frac{z^2}{2}+\text{const.}}=\sqrt{-\frac{gz^2}{r}+\text{const.}}$$

Est autem constans $=gr$; nam pro $z=r$ sit $v=0$; erit

$$A_1(r)=0,\ \text{et}\ B_1(r)=-\frac{gr^2}{r}=-gr$$

adeoque constans $=gr$. Consequenter

$$v^2=gr-\frac{gz^2}{r}=\frac{g}{r}(r^2-z^2),$$

unde pro $z=0$ fit $v=\sqrt{gr}$; et si hoc gr addatur quadrato velocitatis, quam formula superior ad superficiem terræ dat, prodit quadratum velocitatis finitæ ad centrum.

Si nempe s usque ad superficiem terræ protendatur, erit $x=r$; adeoque

Hosted by Google

$$v = r\sqrt{2g\,\frac{a-r}{ar}},$$

et si altitudo celeritati hinc competens α dicatur, est

$$\alpha = \frac{v^2}{2g} = \frac{2r^2 g(a-r)}{2gar} = \frac{r(a-r)}{a}.$$

Hoc tendit ad r, si $a \backsim \infty$; id est altitudo celeritati minimæ competens, qua globus de superficie terræ verticaliter explodendus esset (seposita resistentia), ut nunquam redeat, sive velocitati, qua ad terram sola telluris attractione ex æternitate, — in certo tamen tempore, — perveniret, radio terræ æquatur. Ita pro quovis corpore cœlesti, radius corporis illius prodit.

Sit iam w functio temporis, deinde velocitatis. Sit $w = gt^{\mu}$; erit

$$v = \int\limits_{(\text{quoad } t)} w = \int\limits_{(\text{quoad } t)} gt^{\mu} = \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{constans},$$

quod, si $\mu = 0$, fit $= gt$, uti est in motu uniformiter accelerato, ubi in quovis tempore vis eadem gt^0 egit; est enim constans $= 0$, si pro $t = 0$ velocitas 0 sit; si vero velocitas c sit (positiva vel negativa), erit

$$c = \frac{g.0}{1} + \text{constans},$$

adeoque constans $= c$. Est porro

$$s = \int\limits_{(\text{quoad } t)} v = \int\limits_{(\text{quoad } t)} \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{gt^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \text{constans},$$

quod pro $\mu = 0$, ut in motu uniformiter accelerato, fit $\frac{gt^2}{2}$.

Sed erat etiam (pag. 230).

$$t = \int\limits_{(\text{quoad } s)} \frac{1}{v} = \int\limits_{(\text{quoad } s)} \frac{\mu+1}{gt^{\mu+1}},$$

Hosted by Google

potest autem t per s exprimi, ut substituendo derivata pura reddatur; nam

$$t = \sqrt[\mu+2]{\frac{(\mu+1)(\mu+2)s}{g}},$$

adeoque

$$t^{\mu+1} = \beta s^{\frac{\mu+1}{\mu+2}},$$

si coefficiens ipsius s ad $\frac{1}{\mu+2}$ elevati β dicatur. Erit igitur

$$\frac{\mu+1}{gt^{\mu+1}} = \frac{\mu+1}{g\beta} s^{-\frac{\mu+1}{\mu+2}},$$

atque huius functio primitiva est per (pag. 225) $\frac{(\mu+1)(\mu+2)s^{\frac{1}{\mu+2}}}{g\beta}$, quod pro casu, ubi $\mu = 0$, fit $\sqrt{\frac{2s}{g}}$; nam tum

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{g}}, \frac{1}{\mu+2} = \frac{1}{2}, \mu+2 = 2 = \sqrt{2}\sqrt{2},$$

e quo per $\sqrt{2}$ in valore ipsius β deletur unus factor, uti ex $g = \sqrt{g}.\sqrt{g}$ unus per $\sqrt{g}$ ex β deletur.

e) Sit iam vis w functio velocitatis v; uti in medio resistenti ponitur, resistentiam in ratione quadrata velocitatum esse, pro eadem densitate, tenacitate, et eiusdem corporis superficie eadem obversa (quamvis experimentis a clarissimo BENZENBERG institutis nonnisi intra certos limites comprobetur).

Si celeritas initialis C sit, adeoque pro $t = 0$ sit $v = C$, et motus in medio uniformiter denso fiat, nec ulla alia vis agat præter medii resistentiam; erit w negativum atque per $-\alpha v^2$ exprimi poterit, per α positivum coefficientem ipsius v^2 illum constantem intelligendo, quem densitas medii, superficies obversa & determinant.

Exemplo sit sphæra, cuius diameter sit D, massa M, densitas N-ies maior quam medii, pondus ad terram — in vacuo — sit $M' = 1$ (eiusdem massæ ad μ-tuplam a centro terræ distantiam μ^2-ies minus, ad solem vero ultra 20-ies maius esset).

Hosted by Google

Demonstratur in Physica: 1) quod sive planum in fluidum, sive fluidum in planum impegerit perpendiculariter, celeritate c, quantitas vis agentis sit (intra iustos limites per alias caussas physicas exortos) æqualis ponderi prismatis ex illo fluido ad basim dicto plano æqualem constructi, ad altitudinem illam, qua corpus prope terram *libere* labendo ad imum velocitatem finalem c acquireret. 2) Demonstratur etiam, quod si pro plano dicto sphæra diametri D sit, basis prismatis dicti (propter faciliorem per superficiem sphæricam defluxum) dimidia area circuli maximi ponenda sit. Dicatur hoc *prisma resistentiae.*

Erit hoc pacto prismatis resistentiæ soliditas $\frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$, pondus vero $\frac{3}{4DN} \cdot \frac{v^2}{2g}$; nam dimidia area circuli maximi est $\frac{\pi D^2}{8}$, altitudo velocitati v competens autem est $\frac{v^2}{2g}$ (pro g vim gravitatis ad terram velocitate finali expressam denotante); esset porro pondus prismatis huius, si materia eius cum sphæræ materia homogenea esset, $\frac{3v^2}{8gD}$, nam sphæræ soliditas est $\frac{\pi D^3}{6}$, pondus autem ponitur 1, unde

$$\frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi D^2}{8} \frac{v^2}{2g} = 1 : \frac{3v^2}{8Dg};$$

et si medii materia N-ies rarior sit, pondus prismatis est $\frac{3v^2}{8gDN}$.

Si iam altitudo illa A quæratur, (quæ *exponens resistentiae* dicitur), de qua libere lapsum corpus ad imum velocitatem finalem c tantam acquireret, ut pondus prismatis resistentiæ (adeoque resistentia) ponderi sphæræ esset æqualis: erit pondus prismatis, cuius basis $\frac{\pi D^2}{8}$ altitudo A, (eodem modo ut supra) $= \frac{3A}{4DN}$; quod si $= 1$ (ponderi sphæræ) sit, erit $A = \frac{4DN}{3}$, atque velocitas c ipsi A competens est $= \sqrt{2Ag}$. Unde resistentia pro velocitate v æquatur $\frac{v^2}{2Ag} = \frac{v^2}{c^2}$; nam hoc est

$$= v^2 : \frac{8DNg}{3} = \frac{3v^2}{8DNg};$$

Hosted by Google

atque, quum vis ponderis 1 in sphæram massæ M agens sub 1″ producat velocitatem g, vis ponderis $\frac{v^2}{c^2}$ in eandem massam agens produceret velocitatem $\frac{v^2 g}{c^2}$ sub 1″, adeoque $\frac{v^2 g\dot{t}}{c^2}$ sub $\dot{t}$. Erat vero (pag. 249)

$$\dot{v} \doteq w\dot{t} \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w},$$

adeoque

$$\dot{v} \doteq -\frac{v^2 g\dot{t}}{c^2} \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq -\frac{c^2 \dot{v}}{v^2 g} = -\frac{c^2}{g} v^{-2}\dot{v}.$$

Est igitur heic

$$\alpha = \frac{g}{c^2},$$

quod etiam

$$= \frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}.$$

Est (pag. 230)

$$t = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{1}{w} = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{-1}{\alpha v^2} = \frac{1}{\alpha v} + \text{constans};$$

nam (pag. 225)

$$\frac{-1}{\alpha v^2} = \partial \frac{1}{\alpha v}.$$

Constans vero prodit, si ponatur $\frac{1}{\alpha v} = B(t)$ et $t = A(t)$; erit

$$A(0) = 0, \quad \text{et} \quad B(0) = \frac{1}{\alpha C},$$

quia pro $t = 0$ est $v = C$, adeoque $\frac{1}{\alpha v}$ fit $\frac{1}{\alpha C}$; itaque

$$A(0) - B(0) = -\frac{1}{\alpha C},$$

atque

$$t = \frac{1}{\alpha v} - \frac{1}{\alpha C} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C}\right).$$

Unde patet, pro t utvis magno posse v tam parvum accipi, ut ei æquetur, et æternitatem requiri, ut motus desinat, quantumvis fuerit C.

Hinc prodit

Hosted by Google

$$v = \frac{C}{\alpha Ct + 1};$$

unde, si ipsi α substituetur $\frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}$, erit

$$v = \frac{8CDN}{3Ct + 8DN},$$

quod crescet, sive D crescat sive N; patet enim sive D sive N per $i > 1$ multiplicetur, reducendo ad denominatorem eundem valorem maiorem fieri. Quo densior itaque massa, maiorque globi diameter eadem velocitate c explosi, eo maius v.

Est quoque

$$\int_{(\text{quoad } t)} v = s, \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w},$$

sive ex $\dot{s} \doteq v\dot{t}$ et $\dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w}$, adeoque $\dot{s} \doteq \frac{v\dot{v}}{w}$ etiam $\int_{(\text{quoad } v)} \frac{v}{w} = s$: itaque pro hoc casu (pag. 225)

$$s = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{v}{-\alpha v^2} = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{1}{-\alpha v} = \frac{1}{-\alpha} \log. v + \text{constans}.$$

Prodit vero constans $= \alpha^{-1} \log. C$; quum pro $s = 0$ sit $v = C$, adeoque si $s = A(s)$ sit, et $B(s) = -\alpha^{-1} \log. v$, erit $B(0) = -\alpha^{-1} \log. C$; consequenter

$$A(0) - B(0) = \frac{1}{\alpha} \log. C,$$

atque

$$s = \frac{1}{\alpha} \log. C - \frac{1}{\alpha} \log. v = \frac{1}{\alpha} (\log. C - \log. v) = \frac{1}{\alpha} \log. \frac{C}{v}.$$

Itaque spatium omni dabili maius fieri potest.

Si vis constans g continuo agens supponatur, uti ad haud ita magnam a terra distantiam cum errore exiguo vis gravitatis est, atque supponatur item medium uniformiter densum: erit vis, quæ in corpus vi g deorsum sollicitatum agit, $w = g - \alpha v^2$.

Eritque

Hosted by Google

$$t = \int \frac{1}{w} = \int \frac{1}{g - \alpha v^2}\,;$$
(quoad v)

est autem, si $\frac{g}{\alpha}$ brevitatis caussa β dicatur,

$$\frac{1}{g - \alpha v^2} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}+v} + \frac{1}{\sqrt{\beta}-v}\right),$$

ut substituendo patet; itaque

$$t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}}\left(\int\frac{1}{\sqrt{\beta}+v} + \int\frac{1}{\sqrt{\beta}-v}\right) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}}\left(\log.(\sqrt{\beta}+v) - \log.(\sqrt{\beta}-v)\right);$$

esset nempe $\frac{-1}{\sqrt{\beta}-v}$ derivata quoad v ipsius $\log.(\sqrt{\beta}-v)$; itaque

$$t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \log. \frac{\sqrt{\beta}+v}{\sqrt{\beta}-v} + \text{constans},$$

et constans $= 0$, si pro $t = 0$ et $v = 0$, adeoque $\frac{\sqrt{\beta}+v}{\sqrt{\beta}-v} = 1$ et $\log.1 = 0$ sit.

Hinc

$$2\alpha t\sqrt{\beta} = \log. \frac{\sqrt{\beta}+v}{\sqrt{\beta}-v},$$

adeoque (pag. 183 et 50)

$$e^{2\alpha t\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta}+v}{\sqrt{\beta}-v},$$

atque unitatem per utramque dividendo est

$$e^{-2\alpha t\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta}-v}{\sqrt{\beta}+v},$$

quod itaque tendit ad 0, si $t \backsim \infty$; et hinc crescendo quidem semper $v \backsim \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, hoc nunquam attingendo; scilicet tum $\sqrt{\beta} - v \backsim 0$.

Patet vero v, datis α, t, g ex æquatione ista prodire.

Spatium s autem est

$$\int \frac{v}{w} = \int \frac{v}{g - \alpha v^2}\,;$$
(quoad v)

Hosted by Google

porro per (pag. 225)

$$s = -\frac{1}{2\alpha}\log.(g - \alpha v^2) + \text{constans};$$

nam $\frac{-2\alpha v}{g - \alpha v^2}$ derivata quoad v ipsius $\log.(g - \alpha v^2)$ est. Constans vero est $\frac{1}{2\alpha}\log. g$, nam $s = 0$ pro $t = 0$, et tum v quoque positum est $= 0$; itaque

$$0 = -\frac{1}{2\alpha}\log. g + \text{constans};$$

itaque constans $= \frac{1}{2\alpha}\log. g$, atque

$$s = \frac{1}{2\alpha}\left(\log. g - \log.(g - \alpha v^2)\right) = \frac{1}{2\alpha}\log.\frac{g}{g - \alpha v^2}.$$

Notandum vero est, quod si durante motu per medium massa M gravitet, e pondere eius nempe ex M' subtrahi debeat pondus medii cuius locum occupat, quum hoc a medio ipso teneatur; itaque si globus *N-ies* densior sit medio, pro pondere sphæræ in hoc casu non 1, sed $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$, adeoque pro g in $g - \alpha v^2$, ponendum $\frac{(N-1)g}{N}$ erit.

Unde limes dictus velocitatis est

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{(N-1)}{N}g : (1 : 2A)} = \sqrt{\frac{2A(N-1)}{N}g} = c\sqrt{\frac{N-1}{N}},$$

si velocitas altitudini A competens c dicatur; nam erat $\alpha = \frac{1}{2A}$, et $c^2 = 2Ag$, adeoque $c = \sqrt{2Ag}$. Et quo densior globus est, id est quo maius N, celeritas eo propius ipsi c venit, nunquam tamen eam assequens, de quacunque altitudine per medium uniformiter densum cadat. Unde cur pluviæ per aërem cadentes crania haud perforent, intelligitur; densitas quidem aëris sursum decrescit, quod tamen etiam data lege in calculum revocari potest. Patet etiam globum verticaliter deorsum celeritate dicta explosum, ut resistentia ponderi eius æquetur, in medio uniformiter denso uniformiter cadere.

Hosted by Google

XI. Si C continuum aliquod e spatio sit, deturque tale punctum, per quod transeunte plano quovis eiusmodi, ut una portio ipsius C in unam illius plagam, altera in alteram cadat, ipsum C bisecetur: dicitur punctum illud *centrum magnitudinis* ipsius C.

Per tria plana unum punctum A commune habentia, et ad se invicem perpendicularia quodvis spatii punctum, data eius a singulis distantia, manifesto determinatur pro A tanquam capite abscissarum; potestque quodvis finitum M ita poni, ut totum M in aliquem 8 angulorum, qui per eiusmodi tria plana efformantur, saltem nulla pars extus cadat.

Si M ita cadat, ut plane dicebatur, et pro quovis P dictorum trium planorum, ductis ad aliquod eorundem planis ad intervalla numero n æqualia paralellis, a puncto proximo ipsius M usque ad remotissimum (id est ab illo, quo nullum propius est, usque ad illud, quo nullum remotius est); et partibus ipsius M inter quævis proxima plana parallela dicta contentis nomine generali z' dictis, respondeat cuivis z' inter eadem plana contentum aliquod z'', aut ipsum gaudens centro magnitudinis, aut constans e partibus certis centro magnitudinis gaudentibus; deturque tale punctum p ad distantiam D a P, ut si quodvis z'', ipsum, si centro magnitudinis gaudeat, si non, tum partes dictæ centro magnitudinis gaudentes nomine generali z dicantur, et S dicatur summa omnium productorum e quovis z in distantiam centri magnitudinis eius a P, possit n pro quovis dato ω ita augeri, et ipsa z ea lege accipi, ut $S - MD$ sit $< \omega$ aut $= 0$, atque $\frac{z'}{z''}$ sit $= 1$ aut $\backsim 1$, si $n \backsim \infty$; tum p dicitur *centrum gravitatis geometricum ipsius M.*

Demonstrari potest dari pro quovis M tale p, ut $S = MD$, sive $S \backsim MD$, adeoque $\frac{S}{M} = D$, vel $\frac{S}{M} \backsim D$, atque pro $S \backsim S'$ esse $\frac{S'}{M} = D$. Dari igitur talem limitem pro tali casu demonstrandum est, et quidem ita, ut (pro quovis z' et z'' simultaneis) $\frac{z''}{z'} \backsim 1$; atque tum methodus exponenda est, functionem istam, non in concreto, sed nonnisi per limitem datam (pag. 217) differentiandi.

a) Si u sine fine crescat (Fig. 26) ex $\mathfrak{b}$ versus $\mathfrak{c}$, et simul u_1 sine fine decrescat ex $\mathfrak{d}$ versus $\mathfrak{b}$, atque u semper $< \mathfrak{ac}$ sit: tum u gaudet

Hosted by Google

limite (per pag. 55), et si limes iste β dicatur, ex $\mathfrak{a}$ incipiendo neque ultra $\mathfrak{c}$, nec intra nec in $\mathfrak{b}$ terminatur; adeoque est $<\mathfrak{ac}$, et $>\mathfrak{ab}$.

Nam si ultra $\mathfrak{c}$ ex. gr. in $*$ terminaretur; tum cuiusvis u differentia a β esset $\succ \mathfrak{c}*$, quia quodvis u ante limitem $\prec \mathfrak{ac}$ est. Ita si ante $\mathfrak{b}$ terminaretur β, quantitate q, cuiusvis u (quum inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ terminetur) differentia a β esset $\succ q$. Quum igitur in neutro casu tendere differentia ad 0 posset, β limes ipsius u non esset. Ita nec in $\mathfrak{b}$ terminatur.

b) Atque hinc, si β sit

$$=F\,(m\dot{x})-F\,((m-1)\,\dot{x})=f\,(m\dot{x}),$$

et u_1 sit

$$=U_1\,(m\dot{x})-U_1\,((m-1)\,\dot{x})=u_1\,(m\dot{x}),$$

atque u sit

$$=U\,(m\dot{x})-U\,((m-1)\,\dot{x})=u\,(m\dot{x});$$

ac (pro $n=\infty$) $\frac{u\,(m\dot{x})}{u_1(m\dot{x})} \backsim 1$, tum etiam $\frac{u\,(m\dot{x})}{f(m\dot{x})} \backsim 1$; et si

$$B\,(m\dot{x})-B\,((m-1)\,\dot{x})=b\,(m\dot{x})$$

tale sit, ut $\frac{u\,(m\dot{x})}{b\,(m\dot{x})} \backsim 1$, erit

$$F(x)-F(0)=B\,(x)-B\,(0);$$

et si $B\,(x)$ functio summatrix valoris noti sit, fiet

$$\int u\,(x)=F(x)=B\,(x)+\text{constans}.$$

Sit ex. gr. (Fig. 27) centri gravitatis areæ in plano inter abscissam x, et ordinatam y, atque lineam, cuius æquatio sit $y=A\,(x)$, comprehensæ, distantia prius a plano P, deinde ab alio ex x ad P perpendiculari quærenda.

Consideretur cuivis $\dot{x}$ appertinens z' superius inter plana ad P parallela contentum, sitque z rectangulum 2α; erit distantia centri magnitudinis huius $a+v+\frac{\dot{x}}{2}$; multiplicato autem n per 2, orientur duo rectangula, α et $\alpha+\omega$, atque distantiæ centrorum magnitudinis (retinendo valorem

Hosted by Google

ipsius $\dot{x}$ priorem) erunt $a+v+\frac{\dot{x}}{4}$ et $a+v+\frac{3\dot{x}}{4}$, et producta ex ipsis z in distantias erunt prius $2\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{2}\right)$, postea vero

$$\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{4}\right)+(\alpha+\omega)\left(a+v+\frac{3\dot{x}}{4}\right)=2\alpha\left(a+v+\frac{4}{8}\dot{x}\right)+\omega\left(a+v+\frac{3\dot{x}}{4}\right).$$

Quod si continuetur semper porro multiplicando n per 2, manifesto crescet productorum istorum summa, tam huic quam cuivis $\dot{x}$, adeoque etiam toti x appertinens: manebit tamen ipsi x appertinens $\lessdot xy\ (a+x)$ et pars ipsi $\dot{x}$, valorem eius priorem intelligendo, appertinens manebit $\lessdot \dot{x}y\,(a+x)$. Gaudet igitur tam pars toti x quam ipsi $\dot{x}$ appertinens limite (pag. 55) et summa limitum, ad quos tendent partes omnibus $\dot{x}$ appertinentes, est limes ipsi x appertinens, qui per constantem M divisus, dat (per definitionem) distantiam D a P.

Manifesto vero, si limes toti x appertinens $F(x)$ dicatur, erit limes m-to $\dot{x}$ appertinens $F(m\dot{x})-F((m-1)\dot{x})$ sive brevius $f(m\dot{x})$, differentiale verum ipsius $F(x)$.

Sed ex *a)* si $\dot{x}y\,(a+x)$ (omnia ad rectam reducendo) sit id, quod ibi $\mathfrak{ad}$ erat, et $(\dot{x}y-k)\ (a+x)$ sit id quod ibi $\mathfrak{ac}$ erat, et u sit summa productorum e rectangulis inscriptis in distantias centrorum magnitudinis, nonnisi ipsi $\dot{x}$ priori appertinentibus, semper per 2 dividendo, u_1 vero sit summa rectangulorum circumscriptorum simultaneorum per distantias centrorum magnitudinis multiplicatorum; manifesto manebit u semper $\lessdot (\dot{x}y-k)\,(a+x)$, crescens sine fine a $2\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{2}\right)$ incipiendo; limes igitur dictus ipsi $\dot{x}$ appertinens est $\gtrdot y_1\dot{x}\ (a+x-\dot{x})$ atque est $\lessdot y\dot{x}\ (a+x)$. (pag. 261)

Valet autem hoc de quovis $\dot{x}$, etsi n pro μ integro utvis magno per 2^μ multiplicetur; estque

$$\frac{(a+x-\dot{x})\,y_1\dot{x}}{(a+x)\,y\dot{x}} \backsim 1;$$

nam (pag. 93)

$$\frac{\dot{x}}{\dot{x}}=1,\ \frac{y_1}{y}\backsim 1 \quad \text{et} \quad \frac{a+x-\dot{x}}{a+x}\backsim 1,$$

consequenter etiam

Hosted by Google

$$\frac{(a+x)y\dot{x}}{f(m\dot{x})} \backsim 1,$$

estque $\frac{(a+x)y\dot{x}}{M}$ differentiale ipsius $\frac{F(x)}{M}$, et $\frac{(a+x)y}{M}$ derivata quoad x est, atque $\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M$ est distantia centri gravitatis a P, quum $y=\partial M$ in hoc casu; et pariter pro aliis casibus idem prodit.

Si vero distantia centri gravitatis ab X quæratur, prius z erit $y_1\dot{x}$, et distantia centri magnitudinis est $\frac{y_1}{2}$, adeoque factum $=\frac{1}{2}\dot{x}y_1^2$; si vero bisecetur $\dot{x}$, erit summa factorum $=\frac{1}{2}\alpha y_1+\frac{1}{2}(\alpha+\omega)\ (y_1+\lambda)$, si ordinata intermedia præcedentem quantitate λ superet. Crevit itaque, crescetque sine fine summa productorum, ut antea, manens tamen $\lhd xy^2$, quapropter hic quoque limitem dari constat. Est quoque limes hic $\rhd \frac{1}{2}y_1^2\dot{x}$ et $\lhd \frac{1}{2}y^2\dot{x}$ ac

$$\frac{1}{2}y_1^2\dot{x}:\frac{1}{2}y^2\dot{x}=y_1^2:y^2,$$

quod $\backsim 1$; hinc $\frac{1}{2M}y^2\dot{x}$ differentiale et $\frac{y^2}{2M}$ derivata (quoad x) distantiæ ab axe centri gravitatis areæ est; pro linea ipsa vero prodire $\frac{y\partial M}{M}$ (pro M lineam denotante) facile patet.

Si X figuram in duas partes geometrice æquales symmetrice dividat; atque distantia centri gravitatis a H ultra figuram ad distantiam D' ipsi X parallelam quæratur; rectangulorum priorum inscriptorum (ita et circumscriptorum) dupla fient, et cuiusvis eiusmodi dupli centrum magnitudinis in X cadet; unde manifesto etiam limes summæ productorum e rectangulis inscriptis in distantiam a H constantem D', erit MD', atque distantia centri gravitatis a H erit $\frac{MD'}{M}=D'$ per definitionem.

Quoad lineam ipsam autem pro hoc casu erit z'' superius, complexus chordarum arcuum inter plana ad P parallela proxima; quarum nunc æqualium quævis (sensu pag. 261) z dici potest: est autem unum z ipsi H propius altero eidem symmetrice respondente, atque si illius z, quod

Hosted by Google

ipsi H propius est, distantia centri magnitudinis a H dicatur b, remotioris vero distantia ab X dicatur c; erit summa productorum ex utroque z in centrorum magnitudinis eorum distantias

$$= bz + (b + 2c)z = 2z(b + c);$$

est autem $2(b + c)$ constans, utcunque mutentur b et c; adeoque et hic limes summæ productorum omnium z in suas distantias, erit $2M(b + c)$, (pro M lineam dimidiam denotante) et distantia centri gravitatis a H erit

$$\frac{2M(b + c)}{2M} = b + c;$$

quæ distantia ipsorum H et X est. Consequenter centrum gravitatis in X cadit.

Corporis per revolutionem circa axem generati quoque centrum gravitatis in axem cadere pariter patet.

Omnia dicta vero ad ordinatas decrescentes quoque facile applicantur.

Pro linea curva, etsi non in planum cadat, chordæ arcuum inter plana dicta parallela contentorum, sunt ipsa z'' centro magnitudinis gaudentia; pro superficiebus autem talia plana z ponuntur centro magnitudinis gaudentia, quorum summæ limes sit superficies ipsa; idem quoad solida patet.

Est autem etiam, dum tantum longitudo curvæ, aut area superficiei curvæ quæritur, functio, cuius differentiale quæritur, non in concreto (ut ex. gr. area parabolæ) data: sed demonstrandum est limitem dari, qui functionem absolutam differentiandam præbeat. Ita (pag. 250) spatium in motu difformi est functio absoluta per limitem tantum data; quem dari ibi quoque patet.

Demonstrari potest, pro quavis linea, superficie, et corpore quovis dari centrum gravitatis; imo si planum quodvis Q per id ducatur, atque agantur plana ei utrinque ad distantias æquales parallela, et respectiva z inter proxima plana parallela contenta per distantias centrorum magnitudinis a Q multiplicata *momenta* vocentur, ac in una ipsius Q plaga accipiantur positive, in altera negative: erit limes summæ omnium mo-

Hosted by Google

mentorum 0. Si vero in p e fine ipsius D — in casu superiore — ducatur perpendicularis ad D, et ad hanc perpendicularem fiat planum perpendiculare P' ultra M, et sectio planorum P et P' fiat axis motus plani P': tum in vecte homodromo quies erit. Si ex. gr. P' horizontaliter concipiatur, et singulæ partes ipsius M in distantiis suis deorsum gravitent, atque vis tota M in p sursum agat: erit nempe summa momentorum 0, quum nulla assignabili sit maius vel minus unum nempe MD, quam summa reliquorum.

Exempla.

a) Si M *dimidium segmentum parabolae* sit; et quæratur distantia centri gravitatis a vertice; erit per $\partial M = y$

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int xy$$

et hoc est (pag. 235)

$$= \frac{1}{M}\int xp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{M}\int x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} : \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5}\,x.$$

Si hoc in axe sumatur, erit centrum gravitatis totius segmenti; si vero centrum gravitatis dimidii segmenti quæratur: tum etiam distantia eius ab axe $= \frac{1}{2M}\int y^2$ quærenda est (pag. 264).

b) Si M *paraboloidem* denotet, est (pag. 242)

$$\int \frac{x\partial M}{M} = \frac{\pi p}{M}\int x^2 = \frac{\pi p x^3}{3M} = \frac{\pi p x^3}{3} : \frac{\pi p x^2}{2} = \frac{2}{3}x,$$

per $M = \frac{\pi p x^2}{2}$.

c) Si M *segmentum sphaerae* sit, est

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int x\pi y^2 = \frac{\pi}{M}\int x(2x - x^2),$$

pro abscissa a fine diametri et radio 1, et hoc est (pag. 225)

Hosted by Google

$$=\int\frac{2\pi x^2}{M}-\int\frac{\pi x^3}{M}=\left(\frac{2\pi x^3}{3}-\frac{\pi x^4}{4}\right):M=\pi\frac{8x^3-3x^4}{3\cdot 4}:M.$$

Sed

$$M=\int\pi y^2=\int\pi(2x-x^2)=\int 2\pi x-\int\pi x^2=\pi x^2-\frac{\pi x^3}{3}=\pi\frac{3x^2-x^3}{3}.$$

Consequenter

$$\frac{1}{M}\int x\partial M=\pi\frac{8x^3-3x^4}{3\cdot 4}:\pi\frac{3x^2-x^3}{3}=\frac{2x-\frac{3}{4}x^2}{3-x}.$$

d) Si M *arcum circuli* a fine diametri incipientem denotet usque ad ordinatam abscissæ $a+x$ e centro acceptæ, erit pro distantia centri gravitatis a centro (pag. 229 et 234)

$$\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M=\vdash\frac{1}{M}\int(a+x)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

quod item, quum sit

$$y=\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad y'=-(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$1+y'^2=\frac{(a+x)^2+1-(a+x)^2}{1-(a+x)^2}=\left(1-(a+x)^2\right)^{-1},$$

erit

$$\vdash\frac{1}{M}\int(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\vdash\frac{1}{M}\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Unde si (ut in *a*) et ab altera parte accipiatur arcus æqualis, totius arcus distantia centri gravitatis a centro erit quarta proportionalis ad totum arcum, chordam et radium, heic $=1$.

e) Si M *segmenti circularis* dimidium sit; et distantia centri gravitatis a centro quæratur: erit

$$\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M=\vdash\frac{1}{M}\int(a+x)y=\vdash\frac{1}{M}\int(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\vdash\frac{1}{3M}\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}=\vdash\frac{1}{3M}y^3,$$

Hosted by Google

æquale distantiæ centri gravitatis a centro pro segmento toto quoque, ut in *a)*.

f) Pro *sphaerae superficie* est (pro abscissa et distantia centri gravitatis a fine diametri)

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int 2\pi x(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

nam heic (pag. 229)

$$\partial M = 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$y=(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad y'=(1-x)(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$1+y'^2 = 1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2} = \frac{1}{2x-x^2},$$

adeoque

$$2\pi yx(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = 2\pi x\frac{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi x;$$

et (per pag. 229)

$$\frac{1}{M}\int 2\pi x = \pi x^2 : \int 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = \pi x^2 : \int 2\pi = \frac{\pi x^2}{2\pi x} = \frac{x}{2}.$$

g) Superficies per revolutionem circa axem generata $\int 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ *est aequalis lineae, cuius revolutione generata est, per distantiam ab axe centri gravitudinis lineae multiplicatae.*

Nam linea est $=\int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$, distantia centri gravitatis lineæ ab axe est

$$\int y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} : \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}};$$

nam heic

$$\partial M = \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

et distantia ab axe centri gravitatis est (pag. 263) $=\frac{1}{M}\int y\partial M$.

Est autem peripheria (radii distantiæ centri gravitatis æqualis)

$$=2\pi\int y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} : \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

Hosted by Google

et hoc per lineam ipsam $=\int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicatum est $=\int 2\pi y\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$, æquale superficiei.

Soliditas eadem revolutione generata est aequalis areae per peripheriam centro gravitatis areae descriptam multiplicatae.

Nam soliditas est $\int \pi y^2$, et hæc est

$$=\frac{2\pi\int\frac{1}{2}y^2}{\int y}\int y\,;$$

atque centri gravitatis areæ distantia ab axe erat

$$=\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{M}=\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{\int y},$$

et peripheria radii huic æqualis est

$$=2\pi\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{\int y},$$

quod per aream æqualem $\int y$ multiplicatum est $=\int \pi y^2$.

XII. Si vero M in plani P plagam aliquam cadens, circa rectam in P cadentem ut motus axem, vi gravitatis descendat; punctum illud, cuius distantia q ab axe æquatur longitudini penduli simplicis cum dicto composito isochroni, *centrum oscillationis* audit. Si tantum geometrice pro ipso M ubique æque denso et æque gravi consideretur, prodit q, si quodvis z (in XI) per distantiæ (heic ab axe motus) non primam, ut ibi, sed secundam potentiam multiplicetur, et summæ productorum eiusmodi limes per MD dividatur, D distantiam centri gravitatis ab axe denotante; nempe

$$q=\frac{\int x^2 \partial M}{MD}$$

pro eo, quod ibi $a+x$ erat, heic distantia ab axe x dicta.

Si ex. gr. M rectam x denotet, extremitate una fixa oscillantem, erit

Hosted by Google

$$D = \frac{x}{2}, \text{ et } \partial M = 1, \text{ atque } \int x^2 \partial M = \frac{x^3}{3},$$

adeoque

$$q = \frac{\int x^2 \partial M}{DM} = \frac{x^3}{3} : \frac{x}{2} . x = \frac{2}{3} x \cdot$$

et pendulum simplex longitudinis $\frac{2}{3}x$ ipsi x circa finem oscillanti isochronum est.

(Fig. 28). Si nimirum (iuxta ingeniosum JOHANNIS BERNOULLII conceptum) rectæ rigidæ et gravitatis expertis, extremitate superiore fixæ, non verticaliter sitæ certis punctis affigi certa pondera α, β, . . (ut res simplicior sit, instar puncti considerata) concipiantur: descendent massæ hoc pacto connexæ, motu quidem accelerato, nam undevis descenderent, donec centrum gravitatis in verticalem pervenerit; at minus accelerato, quam si sola massa α ad distantiam a posita esset, et magis accelerato, quam si sola massa β ad distantiam b esset.

Quasvis massarum α, β, . . . tamen eadem vis gravitatis sollicitat verticaliter deorsum, quod BERNOULLIUS per *massas gravitate* (hac vel alia) *animari* exprimit: at cuivis massarum α, β, . . . certam certa gravitate animatam substituit, et omnibus prioribus annihilatis, omnes substitutas gravitatibus propriis animatas eidem puncto $*$ affigendo, novum pendulum simplex fictitium construit, cuiuscunque longitudinis datæ priori composito isochronum; et inter omnia talia pendula simplicia priori isochrona illud quærit, quod plane gravitate, quæ ad terram est, animatur.

Ponatur gravitas ista, quæ ad terram est, $= 1$, ad quam reliquæ gravitates referantur. Notum est, spatium, quod verticaliter quævis massarum α, β, . . . sub $\dot{t}$ vi gravitatis describeret, esse idem; atque decomponendo, virium una a puncto suspensionis elisa, alteram esse vim w, quæ punctum quodvis in arcu percurrendo urget; atque hanc esse vi gravitatis per sinum anguli u (pro radio 1 acceptum) multiplicatæ æqualem (pro quovis angulo u).

Ita etiam notum est, pro temporis oscillatione eodem esse longitudines pendulorum simplicium, uti gravitates. Hinc si massa ad μ-tuplam

Hosted by Google

distantiam μ-tupla gravitate animetur, pendula simplicia, quantavis fuerit massa eadem gravitate animata, isochrona erunt.

Si iam massam α tollere libeat, et ad distantiam q massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$ animata ponatur; erit vis illa, qua gravitas $\frac{q}{a}$ massam $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ urget, ad vim illam, qua gravitas $=1$ massarum α, β, ... quamlibet urget, uti $\frac{q}{a}$ ad 1, id est uti q ad a, adeoque uti arcus simul per fines rectarum q et a describendi; momentaque nempe producta e distantiis a puncto fixo k in massas per ipsarum vires multiplicatas erunt æqualia; nempe si vis, qua urgetur α, dicatur w, momentum ipsius α erit $\alpha a w$, momentum massæ $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ vero erit

$$\frac{\alpha a^2}{q^2} \cdot \frac{qw}{a} \cdot q = \alpha a w.$$

Sublato itaque α, massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$ animata ad distantiam q a puncto suspensionis posita massarum reliquarum motum non magis promovebit aut retardabit, quam α ad distantiam a.

Sublato β etiam massa $\frac{\beta b^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{b}$ animata ad distantiam q posita, idem in motu penduli, quod antea β, præstabit. Eodem modo sublatis $\alpha, \beta, \ldots$ omnibus, et ad distantiam q positis massis $\frac{\alpha a^2}{q^2}, \frac{\beta b^2}{q^2}, \ldots$ gravitatibus $\frac{q}{a}, \frac{q}{b}, \ldots$ animatis, orietur novum pendulum simplex longitudinis q, massis dictis, gravitatibus propriis animatis ad imum appensis, priori composito isochronum.

Si unitatis massarum, gravitate ad terram $=1$ posita, pondus sit P (ex. gr. unius libræ), et $P=1$ ponatur, massæ μ gravitate γ animatæ pondus erit $\mu\gamma P$, sive $\mu\gamma$ (pro $P=1$ posito); si ex. gr. μ quoad unitatem massarum expressum sit $\frac{2}{3}$, et γ quoad gravitatum unitatem sit $=4$, erit pondus $\frac{2 \cdot 4}{3}$, id est $\frac{8}{3}$ librarum.

Sint massæ plures μ, μ', ... gravitatibus γ, γ', ... animatæ: erit summa ponderum $=\mu\gamma+\mu'\gamma'+\ldots$; et si omnes hæ massæ gravitate Q animari concipiantur, pondus summæ earum erit $(\mu+\mu'+\ldots)\,Q$; atque pondus hoc priori summæ ponderum æquale erit, si

Hosted by Google

$$Q = \frac{\mu\gamma + \mu'\gamma' + \ldots}{\mu + \mu' + \ldots},$$

nam ex hoc sequitur

$$Q(\mu + \mu' + \ldots) = \mu\gamma + \mu'\gamma' + \ldots$$

In hoc casu itaque pondera massarum ad idem punctum $*$ positarum gravitatibus propriis animatarum erunt

$$\frac{\alpha a^2}{q^2} \cdot \frac{q}{a} + \frac{\beta b^2}{q^2} \cdot \frac{q}{b} + \ldots$$

nempe massæ $\frac{\alpha a^2}{q^2}, \frac{\beta b^2}{q^2}, \ldots$ gravitatibus $\frac{q}{a}, \frac{q}{b}, \ldots$ animantur; unde Q prodibit dividendo, ut prius, summam ponderum per summam massarum; nempe

$$Q = \frac{\alpha a + \beta b + \ldots}{q} : \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{q^2} = \frac{q(\alpha a + \beta b + \ldots)}{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots};$$

atque si ex omnibus quibuslibet valoribus ipsius q is quæratur, pro quo fit $Q = 1$, nempe gravitati ad terram æqualis, erit

$$q = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{\alpha a + \beta b + \ldots} = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{MD},$$

si $\alpha + \beta + \ldots$ dicatur M, et D sit distantia centri gravitatis ab axe motus, nam (XI.) est

$$\alpha a + \beta b + \ldots = MD.$$

Erit autem etiam pro hoc q (quum pro quolibet sit) pendulum priori composito isochronum; atque nunc massa penduli simplicis gravitate 1 animatur, nec massa influit.

Centrum percussionis ipsius M, quo feriente omnis partis huius celeritas 0 fieri potest, non supponit gravitatem; recta cum massis $\alpha, \beta, \ldots$ mota circa k, sit γa celeritas finalis ipsius α, dum istud M in puncto $*$ aliquam massam ferit, γ coefficientem aliquem denotante; erit celeritas tunc γb ipsius β, ita cuiusvis reliquarum celeritas erit γ per distantiam a k multiplicata. Quantitates actionis autem erunt $\alpha\gamma a . a, \beta\gamma b . b, \ldots,$

Hosted by Google

nempe per distantias sunt vires multiplicandæ. Si iam vires æquales ipsis $\alpha\gamma a$, $\beta\gamma b$, ... ad distantiam q ponantur directione opposita, et q tale sit, ut

$$(\alpha\gamma a + \beta\gamma b + \ldots)\ q = \alpha\gamma a^2 + \beta\gamma b^2 + \ldots :$$

tum omnis actio elidetur; erit autem

$$q = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{\alpha a + \beta b + \ldots},$$

ubi denominatori pariter substitui potest MD. Itaque formula eadem prodit; at centrum percussionis est idem in vacuo, aëre, aqua &c. Centrum oscillationis, si rectæ dictæ massæ densitatis diversæ affigantur, mutatur in diversæ gravitatis specificæ fluidis; econtra in eodem fluido centrum percussionis a situ percussi dependet, quum pro hoc casu centrum oscillationis maneat.

§. 37.

Plura adferre, quum nonnisi primaria fundamenta, e quibus reliqua promanant, exponere propositum sit, supervacuum est; attamen in §. 36. supposita demonstrare superest; et tum paucis adhuc, intellectu facilioribus, campum visionis in gratiam Tyronum augere licebit.

I. Sit $u = A(x)$, atque $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ dicatur, ut supra, $\dot{u}$; erit

$$\dot{u} = A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) = q - (q - \dot{u}),$$

si $A(m\dot{x})$ generaliter q dicatur, sensu pag. (213), et $A((m-1)\dot{x}) = q - \dot{u}$; atque si *quaeratur differentiale derivataque functionis:*

$$u^k = (A(x))^k,$$

quod dicatur $A_1(x)$; erit terminus generalis seriei ex $A_1(x)$ derivatæ

$$A_1(m\dot{x}) - A_1((m-1)\dot{x}) = q^k - (q - \dot{u})^k =$$
$$= q^k - (q^k - kq^{k-1}\dot{u} + \frac{k(k-1)}{2}q^{k-2}\dot{u}^2 - \ldots),$$

Hosted by Google

quod item est

$$= kq^{k-1}\dot{u} + s,$$

si summa aut limes summæ terminorum post $kq^{k-1}\dot{u}$ sequentium s dicatur.

Sed

$$\frac{kq^{k-1}\dot{u}}{kq^{k-1}\dot{u} + s} \backsim 1,$$

si $n \backsim \infty$; nam (pag. 163) in formula binomiali pro exponente k, si $k \rhd 1$, demonstratum (pag. 163) est, exponentem coefficientis nunquam k maiorem esse; et pro k, sive positivo sive negativo, unitate minore esse quemvis exponentem coefficientis $\lhd 1$.

Hinc quum duo casus sint; nempe series binomialis aut terminata aut infinita est: terminatur pro k positivo et integro; si non terminetur, tum exponens coefficientis quivis aut $\lhd k$ aut $\lhd 1$ est.

Consideretur prius ubi series infinita est et exponentium coefficientis maximus k est. Exponens seriei a $kq^{k-1}\dot{u}$ incipiendo semper fractio vera pro terminis sequentibus esse poterit; nempe n ita augeri potest pro dato quovis ω, ut $\dot{u} \lhd \omega$, adeoque $\dot{u} \lhd \frac{q}{k}$ et $\frac{k\dot{u}}{q} \lhd 1$ fiat; est autem quivis seriei exponens $\frac{\dot{u}}{q}$ per exponentem coefficientis multiplicatus adeoque $\lhd \frac{k\dot{u}}{q}$ est.

Erit igitur, si $kq^{k-1}\dot{u}$ dicatur K, et limes summæ terminorum post K sequentium (etsi omnes positivi essent) s dicatur, per (pag. 151)

$$s \lhd \frac{(k-1)K\dot{u}}{2q} : \left(1 - \frac{k\dot{u}}{q}\right),$$

nempe terminus post K sequens est $\frac{(k-1)K\dot{u}}{2q}$; itaque

$$s \lhd \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})},$$

et

$$\frac{s}{K} \lhd \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})K},$$

Hosted by Google

id est

$$\frac{s}{K} \lessdot \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}},$$

quod $\backsim 0$, si $\dot{u}$ quovis dabili minus fieri queat.

Unde per (pag. 93) $\frac{K}{K+s} \backsim 1$.

Consequenter

$$\frac{k(A(m\dot{x}))^{k-1}\dot{u}}{A_1(m\dot{x})-A_1(m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

id est differentiale verum, sive terminus generalis seriei ex $A_1(x)=(A(x))^k=u^k$ derivatæ, æquipollet ipsi $k(A(m\dot{x}))^{k-1}$; estque n ponendo more consueto pro m

$$\partial A_1(x) = k(A(x))^{k-1}\dot{u},$$

id est $ku^{k-1}\dot{u}$ *est differentiale* (sensu stricto pag. 217), *et* ku^{k-1} *derivata ipsius* u^k, quoad u.

Idem etiam ad integrum positivum $k > 1$, applicari potest; nempe tum quoque exponens seriei quilibet $\lessdot \frac{k\dot{u}}{q} \lessdot 1$ fieri potest, atque ibi s adhuc minus est, quam si series geometrica exponentis $\frac{k\dot{u}}{q}$ in infinitum extendatur.

Si vero $k \lessdot 1$, sive positivum sive negativum sit, *exponens coefficientis* ubique unitate minus erit, adeoque exponens seriei quilibet $\lessdot \frac{\dot{u}}{q}$ erit; atque tum in

$$\frac{s}{K} \lessdot \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}}$$

erit, si k positivum sit, $k-1 \lessdot 1$, si vero k negativum sit, $k-1 \lessdot 2$, et pariter in utroque casu patet, ut prius, quod $\frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}} \backsim 0$.

Unde reliqua fluunt; nempe per (pag. 225):

1. Si $\dot{u} \stackrel{\circ}{=} a(x)\dot{x}$, hoc ipsi $\dot{u}$ substitui potest, ut sit $ku^{k-1}a(x)\dot{x}$ differentiale et $ku^{k-1}a(x)$ derivata quoad x ipsius u^k. Ex. gr. pro $u=\alpha-\alpha x$ atque α constante posita

Hosted by Google

$$\mathfrak{d}(\alpha - \alpha x)^k = -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}\dot{x},$$

et derivata quoad x

$$\mathfrak{d}(\alpha - \alpha x)^k = -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}.$$

2. Dari autem tale n, idem pro omnibus q pro dato quovis N et z, ut (pag. 214) poscitur, in quovis casu patet, si demonstretur, pro quovis q dari tale aliquod n, atque id pro eodem q crescente n adhuc fortius valere.

Generaliter si superius

$$A(q) - A(q - \dot{u}) = a(q)\dot{u} + s$$

sit, atque

$$\frac{a(q)\dot{u}}{a(q)\dot{u} + s} \backsim 1,$$

id est pro N utvis magno, manente q, possit n ita accipi, ut

$$\frac{a(q)\dot{u} - (a(q)\dot{u} + s)}{a(q)\dot{u} + s}, \text{ id est } \frac{-s}{a(q)\dot{u} + s} < \frac{1}{N}$$

sit; tum

$$\frac{a(q)\dot{u} + s}{s} \succ N,$$

adeoque

$$\frac{a(q)\dot{u}}{s} \succ N - 1,$$

pro casu, si $a(q)\dot{u}$ et s utrumque positivum aut utrumque negativum est, si vero opposita sint, tum

$$\frac{a(q)\dot{u}}{s} \succ N + 1.$$

Si iam expressiones pro quovis n eædem maneant, sintque in quovis termino ipsius s literæ puncto insignitæ una plures, eædem aut diversæ quoque, inter quas tamen $\dot{u}$ adsit; atque crescente priore n, ex $\dot{u}$ fiat $\frac{\dot{u}}{\nu}$ (pro $\nu > 1$), et per hoc quævis litera puncto insignita dividatur per quantitatem unitate maiorem; quivis terminus ipsius s per ipso ν maius dividetur; sit $\phi > 1$ minimum illorum, (saltem quo nullum est minus) per

Hosted by Google

quæ terminus aliquis ipsius s dividitur; manifesto, si ex s fieret $\frac{s}{p}$, ex $\frac{a(q)\dot{u}}{s}$ fieret $\frac{a(q)p\dot{u}}{\nu s}$, quod priore valore maius est; reipsa autem s per ipso p maius dividitur, adeoque valor adhuc maior est. Consequenter crescente n, tanto fortius est novum $\frac{a(q)\dot{u}}{s} \rhd N-1$, si ex. gr. tam $a(q)\dot{u}$ quam s positivum sit; et si opposita sint, tum $\frac{a(q)\dot{u}}{s} \rhd N+1$; adeoque in casu utroque est $\frac{a(q)\dot{u}+s}{s} \rhd N$; et hinc $\frac{s}{a(q)\dot{u}+s} \lhd \frac{1}{N}$, sive

$$\frac{a(q)\dot{u}-a(q)\dot{u}-s}{a(q)\dot{u}+s} \lhd \frac{1}{N}.$$

Attamen pro casu antea relato valorem quoque talis n, eiusdem (dato z et N) pro omnibus q, exhibere Tyronibus supervacuum non erit. Consideretur prius casus simplicior, nempe x^k, pro $u=x$: est id, quod antea $a(q)\dot{u}$ erat, heic $kq^{k-1}\dot{x}$, dicaturque hoc K, ut supra. Erit, ut ibidem, $s \lhd \frac{(k-1)K\dot{x}}{2q-2k\dot{x}}$, idest $\frac{x}{n}$ ponendo pro $\dot{x}$, erit $s \lhd \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$; atque ipsi n substituatur $\frac{((N+1)(k-1)+2k)x}{2q}$, posito (sed statim demonstrando) dato quolibet maius tale N accipi posse, ut hic valor integer positivus sit, per quem variabilis absoluta dividitur, atque sit $\rhd \frac{kx}{q}$, ut exponens seriei, ut supra, $\frac{k\dot{x}}{q} \lhd 1$ sit; erit

$$s \lhd K(k-1) : \frac{2q((N+1)(k-1)+2k)}{2q} - 2k;$$

idest

$$s \lhd \frac{K(k-1)}{(N+1)(k-1)+2k-2k},$$

et

$$s \lhd \frac{K}{N+1};$$

unde

$$K \rhd (N+1)s,$$

atque etsi K et s opposita sint, s ex K nonnisi unum s delendo, manet

$$K+s \rhd Ns,$$

consequenter

$$\frac{-s}{K+s} \lhd \frac{1}{N}.$$

Quod vero ipsum N quovis dato maius ita eligere liceat, ut n dato quovis maius positivum sit, patet sic.

Si $\alpha \rhd \beta$ sit, est pro μ positivo et > 1

$$\mu\alpha - \beta \rhd \alpha - \beta.$$

Nam α et $\mu\alpha$ tunc aut utrumque positivum aut utrumque negativum est, atque erit, pro β et ω aut utroque positivo aut utroque negativo:

$$\alpha = \beta + \omega, \text{ aut } \alpha = -\beta - \omega.$$

In casu primo est

$$\mu\alpha - \beta = \mu\beta + \mu\omega - \beta = \mu\omega + (\mu - 1)\beta$$

et

$$\alpha - \beta = \omega,$$

quod est $\lhd \mu\omega + \beta(\mu - 1)$; nam $\mu - 1$ ita μ est positivum, atque ω, β est aut utrumque positivum aut utrumque negativum. In altero casu autem est

$$\mu\alpha - \beta = -\mu\beta - \mu\omega - \beta = -\mu\omega - (\mu + 1)\beta,$$

et

$$\alpha - \beta = -\omega - 2\beta,$$

quod item est $\lhd -\mu\omega - (\mu + 1)\beta$; nam

$$\mu\omega \rhd \omega, \quad \text{et} \quad (\mu + 1)\beta \rhd 2\beta$$

quia $\mu > 1$.

Multiplicetur iam n per μ: erit

$$\frac{K(k-1)x}{2qn - 2kx} \rhd \frac{K(k-1)x}{2q\mu n - 2kx},$$

si $2qn \rhd 2kx$; nam denominator prioris est minor per præcedentia.

Si igitur $2qn \rhd 2kx$, ac superius $s \lhd \frac{K(k-1)x}{2\mu qn - 2kx}$ et hoc erit $\lhd \frac{K}{N+1}$, et quodvis tale $s \lhd \frac{K(k-1)x}{2qn - 2kx}$ et tanto fortius $\lhd \frac{K}{N+1}$; nam denominator, ubi μ est, maior adeoque quotus minor est. Quærendum itaque

Hosted by Google

tantum maximum eorum n erit, quæ pro quopiam q requiruntur, ut idem omni q satisfaciat; nempe illi q quoque inserviente maiore n, quod minoris n indigeret.

Ut $2qn \ge 2kx$ sit, sumatur prius

$$v = (k-1)(N+1),$$

unde

$$N = \frac{v}{k-1} - 1,$$

atque accipiatur $v \ge 5k$ vel $v = 5k$; substituendo hunc valorem ipsius N in valore superiore ipsius n, erit

$$2qn = \frac{(v-(k-1)+(k-1))(k-1)x}{(k-1)} + 2kx = vx + 2kx,$$

quod, si $v = \pm 5k$ aut $v \ge \pm 5k$ sit, est $\ge 2kx$, nempe

$$\pm 5k + 2k \ge 2k,$$

sive opposita sint v et k sive non.

Itaque si tale $2qn = (v+2k)x$ sit superius α, et $2kx$ sit β, de $\alpha - \beta$ et $\mu\alpha - \beta$ dicta applicari poterunt et $\frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$ decrescet, crescente n.

Poterit autem n utvis magnum accipi, adeoque etiam tantum, ut exponens seriei ≤ 1 sit $\left(\text{nempe hic } \frac{kx}{nq} \text{ fit} \le 1, \text{ si } n > \frac{kx}{q}\right)$. Nam ex

$$2qn = (v+2k)x$$

est

$$n = \frac{(v+2k)x}{2q},$$

atque pro hoc n est

$$v = \frac{2qn}{x} - 2k;$$

sit n' prius n pro $v = 5k$; pro novo $n = \mu n'$ erit

$$v = \frac{2q\mu n' - 2kx}{x};$$

nam substituendo in $\frac{(v+2k)x}{2q}$ erit

Hosted by Google

$$\frac{(2q\mu n' - 2kx + 2kx)x}{2qx} = \mu n'.$$

Crescit vero crescente n etiam

$$N = \frac{v}{k-1} - 1 = \frac{2q\mu n' - 2kx}{x(k-1)} - 1;$$

nam hoc est $\succ \frac{2qn' - 2kx}{x(k-1)} - 1$, qui valor prioris N est pro v priore, imo dato quovis maius esse potest; si nempe accipiatur

$$\mu = \frac{N'x(k-1) + x(k-1) + 2kx}{2qn'},$$

substituendo patet N' prodire. Si valor ipsius μ negative prodiret, ponendo oppositum eius positivum erit.

Ut vero n integer prodeat, μ ita eligi potest, ut $\mu n'$ integer sit; atque si prius v tale est, ut

$$N = \frac{v - (k-1)}{k-1}$$

daret

$$n = \frac{(v+2k)x}{2q}$$

negativum; erit

$$-N = \frac{v - (k-1)}{-(k-1)},$$

atque in valore superiore ipsius n ponendo $-(N+1)$ pro $N+1$ erit

$$2qn = \frac{(v - (k-1) + (k-1))(k-1)x}{-(k-1)} + 2kx = -vx + 2kx,$$

erat vero v negativum, ut $v + 2k$ negativum sit, quia $v \succ 2k$, unde $n = -\frac{(v-2k)x}{2q}$ positivum est. Denique valor ipsius n pro omni q, quod non est $\prec zx$ (pag. 214), idem reperitur sic. Sit $zx = q'$, quodvis aliud q est $\succ zx$, sit pro $r \succ 1$

$$z = \frac{1}{r},$$

Hosted by Google

sitque q aliquod quodvis $=\frac{x}{r'}$; est $r \rhd r'$, sitque $r=r''r'$; erit

$$K(k-1)x : \frac{2x}{r'} \frac{(N+1)(k-1)x+2kx}{\frac{2x}{r'}} - 2kx = \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx} = \frac{K}{N+1} \lhd \frac{K}{N};$$

si vero pro r' ponatur $r''r'$ in denominatore infimo divisoris, denominator ipsius $K(k-1)$ manebit $2qr''n-2kx$. Consequenter si pro n ponatur valor

$$\big((N+1)(k-1)x+2kx\big) : \frac{2x}{r''r'} = \big((N+1)(k-1)x_1+2kx\big) : 2q'$$

idem et cuivis q satisfaciat.

Idem ad $u=A(x)$ applicatur modo sequente. Sit pro certo q (pag. 214

$$A(q)-A(q-\dot{x})=\dot{u}=\frac{u}{n''},$$

id est pro certo n, per quem variabilis absoluta x dividitur, cum qua u in dependentia simultanea (pag. 193) est, fiat pro hoc q

$$\dot{u}=\frac{u}{n''} \text{ et } n'' \rhd \frac{ku}{q},$$

ut exponens seriei $\frac{k\dot{u}}{q} \lhd 1$ sit, atque etiam $2qn'' \rhd 2ku$ in

$$s \lhd \frac{(k-1)Ku}{2qn''-2ku};$$

ut dicta applicentur. Hoc pacto manifesto tantum n erit ita augendum, ut

$$n''= \text{ aut } \rhd \frac{\big((N+1)(k-1)+2k\big)x}{2q'}$$

sit pro $q'=zx$, et hoc n'', adeoque illud n, per quod hoc ponitur, idem omnibus satisfaciet.

II. *Quod* $\partial uv = u\partial v + v\partial u$, patet sic. Sit

$$u=A(x), \quad v=B(x);$$

erit seriei ex $uv=A(x)\ B(x)$ derivatæ terminus generalis

Hosted by Google

$$A(m\dot{x})\,B(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big)B\big((m-1)\dot{x}\big)=A(q)\,B(q)-\big(A(q)-\dot{u}\big)\big(B(q)-\dot{v}\big);$$

nam pro $m\dot{x}$ ut supra q poni potest, atque

$$A\big((m-1)\dot{x}\big)=A(m\dot{x})-\big(A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big)\big)=A(q)-\dot{u},$$

ita

$$B\big((m-1)\dot{x}\big)=B(q)-\dot{v}.$$

Consequenter terminus generalis seu differentiale verum est

$$A(q)\,B(q)-A(q)\,B(q)+B(q)\,\dot{u}+A(q)\,\dot{v}-\dot{u}\dot{v}=B(q)\,\dot{u}+A(q)\,\dot{v}-\dot{u}\dot{v}.$$

Sed

$$\frac{B(q)\,\dot{u}+A(q)\,\dot{v}}{\dot{u}\dot{v}}=\frac{B(q)}{\dot{v}}+\frac{A(q)}{\dot{u}}$$

quovis dabili maius fieri potest: consequenter

$$\frac{B\,q)\,\dot{u}+A(q)\,\dot{v}}{B(q)\,\dot{u}+A(q)\,\dot{v}-\dot{u}\dot{v}}\backsim 1,$$

atque $m\dot{x}$ pro q et n pro m, atque u pro $A(x)$ et v pro $B(x)$ ponendo, est

$$\partial uv \doteq v\dot{u}+u\dot{v}\,;$$

et si ex. gr.

$$\dot{u}\doteq p\dot{z} \text{ et } \dot{v}\doteq q\dot{z},$$

est quoad z

$$\partial(uv)=pv+qu.$$

Ex. gr. si

$$u=ax, \qquad v=(1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

est

$$\partial(uv)=a(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-ax^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si accedat z et uv dicatur p: erit

$$\partial(pz)=p\partial z+z\partial p=uv\partial z+zu\partial v+zv\partial u\,;$$

et ita semper ad uno plura eundo patet regula (pag. 225).

III. Quum de logarithmi differentiali (pag. 238) dictum sit, *differentialia functionum trigonometricarum* quoque adnectere liceat; quum a primis Trigonometriæ elementis imbuto facile intelligi possint. Sit varia-

Hosted by Google

bilis absoluta, arcus x per n divisus; atque tam differentialia quam derivatæ et integralia, ubi non aliud monitum fuerit, quoad x hic arcum denotantem intelligantur.

1. Si ∂ *sin.* x *quaeratur:* erit item $m\dot{x} = q$, ut antea, et terminus generalis seriei ex sin. x derivatæ est

$$\begin{aligned}\sin. m\dot{x} - \sin.(m-1)\dot{x} &= \sin. q - \sin.(q-\dot{x})\\ &= \sin. q - \sin. q \cos.\dot{x} + \cos. q \sin.\dot{x}:\end{aligned}$$

atque

$$\frac{\dot{x}\cos. q}{\sin. q - \sin. q \cos.\dot{x} + \cos. q \sin.\dot{x}} \backsim 1.$$

Nam

$$\sin. q - \sin. q \cos.\dot{x} = \sin. q\,(1 - \cos.\dot{x}) = \sin. q\left(1 - (1 - \sin^2.\dot{x})^{\frac{1}{2}}\right)$$

quum $\cos.\dot{x} = \sqrt{1 - \sin^2.\dot{x}}$ omnia pro radio 1 intelligendo.

Est autem, quum $\sin.\dot{x} \lessdot 1$ sit

$$(1 - \sin^2.\dot{x})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2.\dot{x} - \frac{1}{8}\sin.\dot{x}^4 - \frac{1}{16}\sin^6.\dot{x} - \ldots,$$

atque si limes summæ omnium post $-\frac{1}{2}$ $(\sin.\dot{x})$ sequentium s dicatur, pro dato quovis N fieri $-\frac{1}{2}\sin^2.\dot{x} \gtrdot Ns$ potest; adeoque $(1 - \sin^2.\dot{x})^{\frac{1}{2}}$ per $1 - u\sin^2.\dot{x}$ exprimi potest, ipso u quantitatem aliquam inter 0 et 1 denotante; eritque

$$1 - \cos.\dot{x} = 1 - (1 - u\sin^2.\dot{x}) = u\sin^2.\dot{x},$$

atque

$$\sin. q - \sin. q \cos.\dot{x} = u \sin. q \sin^2.\dot{x}.$$

Itaque

$$\frac{\dot{x}\cos. q}{\sin. q - \sin. q \cos.\dot{x} + \cos. q \sin.\dot{x}} = \frac{\dot{x}\cos. q}{u \sin. q \sin^2.\dot{x} + \cos. q \sin.\dot{x}}$$

quod tendit ad 1 (pag. 93); nam

$$\frac{\dot{x}}{\sin.\dot{x}} \backsim 1, \quad \frac{\cos. q}{\cos. q} = 1,$$

Hosted by Google

atque $\frac{\cos. q}{u \sin. q \sin. \dot{x}}$ dato quovis maius fieri potest; nam $\sin. \dot{x}$ quovis dato minus fieri potest, u vero est $\lessdot 1$, adeoque $u \sin. q \sin. \dot{x} \backsim 0$ manente dividendo $\cos. q$.

Consequenter

$$\frac{\dot{x} \cos. m\dot{x}}{\sin. m\dot{x} - \sin. (m-1)\dot{x}} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

fieri pro dato quovis N potest; adeoque $\dot{x} \cos. (m\dot{x})$ termino generali seriei ex $\sin. x$ derivatæ æquipollet; adeoque iuxta sæpius dicta $\dot{x} \cos. x$ est differentiale ipsius $\sin. x$, et quidem sensu stricto, quum forma quoque requisita gaudeat; et $\cos. x$ derivata quoad x ipsius $\sin. x$ est.

2. *Est*

$$\mathrm{d} \cos. x = -\dot{x} \sin. x \text{ et } \mathfrak{d} \cos. x = -\sin. x.$$

Nam terminus generalis seriei e $\cos. x$ derivatæ est

$$\begin{aligned} \cos. q - \cos. (q - \dot{x}) &= \cos. q - \cos. q \cos. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x} \\ &= u \cos. q \sin^2. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x}, \end{aligned}$$

per præcedentia $u \sin^2. \dot{x}$ pro $1 - \cos. \dot{x}$ ponendo; atque

$$\frac{-\dot{x} . \sin. q}{u \cos. q \sin^2. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x}} \backsim 1,$$

nam

$$\frac{\dot{x}}{\sin. \dot{x}} \backsim 1, \quad \frac{\sin. q}{\sin. q} = 1, \text{ adeoque } \frac{\dot{x} \sin. q}{\sin. q \sin. \dot{x}} \backsim 1,$$

atque etiam

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{u \cos. q \sin^2. \dot{x}} = \frac{\sin. q}{u \cos. q \sin. \dot{x}}$$

dato quovis maius fieri potest; nam $\frac{\sin. q}{\cos. q}$ manet, $u \lessdot 1$, atque $\sin. \dot{x} \backsim 0$.

3. *Est*

$$\mathfrak{d} \operatorname{tang}. x = \frac{\dot{x}}{\cos^2. x}, \quad \mathfrak{d} \operatorname{tang}. x = \frac{1}{\cos^2. x}.$$

Nam terminus generalis seriei e $\operatorname{tang}. x$ derivatæ est

Hosted by Google

$$\text{tang.}\, q - \text{tang.}\,(q - \dot{x}) = \frac{\sin.\, q}{\cos.\, q} - \frac{\sin.\,(q - \dot{x})}{\cos.\,(q - \dot{x})}$$

$$= \frac{\sin.\, q}{\cos.\, q} - \frac{\sin.\, q \cos.\, \dot{x} - \cos.\, q \sin.\, \dot{x}}{\cos.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin.\, q \sin.\, \dot{x}}$$

$$= \frac{\sin.\, q \cos.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin^2.\, q \sin.\, \dot{x} - \sin.\, q \cos.\, q \cos.\, \dot{x} + \cos^2.\, q \sin.\, \dot{x}}{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin.\, q \cos.\, q \sin.\, \dot{x}}$$

$$= \frac{\sin.\, \dot{x}\,(\sin^2.\, q + \cos^2 q)}{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin.\, q \cos.\, q \sin.\, \dot{x}} = \frac{\sin.\, \dot{x}}{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin.\, q \cos.\, q \sin.\, \dot{x}},$$

nam $\sin^2.\, q + \cos^2.\, q = 1$; hoc autem per $\frac{\dot{x}}{\cos^2.\, q}$ divisum $\backsim 1$: fit enim quotus

$$\frac{\sin.\, \dot{x}}{\dot{x}} \frac{\cos^2.\, q}{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x} + \cos.\, q \sin.\, q \sin.\, \dot{x}},$$

quod limite 1 gaudet (pag. 93 et 94); nam

$$\frac{\sin.\, \dot{x}}{\dot{x}} \backsim 1, \quad \frac{\cos^2.\, q}{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x}} \backsim 1,$$

et $\frac{\cos^2.\, q \cos.\, \dot{x}}{\cos.\, q \sin.\, q \sin.\, \dot{x}}$ quovis dato maius fieri potest; fiat ex. gr. $\cos.\, \dot{x} \rhd \frac{3}{4}$, crescente n fit cosinus semper maior tendens ad limitem 1, denominator autem $\backsim 0$.

Consequenter

$$\partial\, \text{tang.}\, x = \frac{\dot{x}}{\cos^2.\, x} \quad \text{et} \quad \partial\, \text{tang.}\, x = \frac{1}{\cos^2.\, x}.$$

4. *Est*

$$\partial\, \cot.\, x = -\frac{\dot{x}}{\sin^2.\, \dot{x}} \quad \text{et} \quad \partial\, \cot.\, x = -\frac{1}{\sin^2.\, x}.$$

Nam terminus generalis seriei ex cotg. x derivatæ est

$$\cot.\, q - \cot.\,(q - \dot{x}) = \frac{\cos.\, q}{\sin.\, q} - \frac{\cos.\, q \cos.\, \dot{x} + \sin.\, q \sin.\, \dot{x}}{\sin.\, q \cos.\, \dot{x} - \cos.\, q \sin.\, \dot{x}}$$

$$= \frac{\cos.\, q \sin.\, q \cos.\, \dot{x} - \cos^2.\, q \sin.\, \dot{x} - \cos.\, q \sin.\, q \cos.\, \dot{x} - \sin^2.\, q \sin.\, \dot{x}}{\sin^2.\, q \cos.\, \dot{x} - \sin.\, q \cos.\, q \sin.\, \dot{x}}$$

$$= \frac{-\sin.\, \dot{x}}{\sin^2.\, q \cos.\, \dot{x} - \sin.\, q \cos.\, q \sin.\, \dot{x}},$$

Hosted by Google

cui item (ut antea) æquipollet $\frac{-\dot{x}}{\sin^2 q}$; nam prius per posterius dividendo quotus $\backsim 1$. Consequenter $-\frac{\dot{x}}{\sin^2 q}$ differentiale et $-\frac{1}{\sin^2 q}$ derivata est.

5. Sed differentiale derivataque alicuius functionis trigonometricæ quoad aliam quoque sæpius quæritur. Denotentur hic brevitatis caussa, sin. x per s, cos. x per c, tang. x per t, cot. x per C, atque literæ eædem puncto insignatæ differentialia denotent.

Erit quoad C

$$\partial s = -cs^2\,\dot{C} \text{ et } \partial s = -cs^2.$$

Nam (pag. 283 et 285)

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} \backsim 1, \text{ et } \dot{C} : \frac{-\dot{x}}{s^2} = \frac{s^2\,\dot{C}}{-\dot{x}} \backsim 1;$$

atque hinc

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} : \frac{s^2\,\dot{C}}{-\dot{x}} = \frac{\dot{s}}{-cs^2\,\dot{C}} \backsim 1.$$

Consequenter $-cs^2\,\dot{C} \doteq \dot{s}$ et $-cs^2\,\dot{C}$ differentiale sinus quoad C atque $-cs^2$ derivata est.

Ita reliquarum functionum trigonometricarum differentialia, tam quoad x, quam quoad alias earundem reperiuntur.

6. At ex his *arcus quoque differentiale derivataque* quoad functiones trigonometricas eiusdem prodeunt.

Nempe ex

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} \backsim 1$$

sequitur

$$\frac{c\dot{x}}{\dot{s}} \backsim 1 \text{ seu } \dot{x} : \frac{\dot{s}}{c} \backsim 1;$$

consequenter $\frac{\dot{s}}{c} \doteq \dot{x}$, et $\frac{\dot{s}}{c}$ differentiale, ac $\frac{1}{c}$ derivata quoad s ipsius x (nempe arcus) est; et hinc

$$\int_{(\text{quoad } s)} \frac{1}{c} = x,$$

adeoque quum

$$c = (1 - s^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{c} = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}},$$

est

$$\int_{(\text{quoad } s)} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} = x$$

= arcui; est videlicet differentiale purum (pag. 221), et per theorema binomiale evolvi potest, quum s ex. gr. $= \sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ accipere liceat, atque tum (per pag. 225) integrari potest.

Simili modo est ∂x (quoad c) $= \frac{-\dot{c}}{s}$ et derivata $\frac{-1}{s}$ est. Nam erat

$$\frac{\dot{c}}{-s\dot{x}} \backsim 1, \text{ adeoque } \frac{-s\dot{x}}{\dot{c}} \backsim 1, \text{ et hinc } \dot{x} : \frac{-\dot{c}}{s} \backsim 1.$$

Est porro ∂x (quoad t) $= c^2 \dot{t}$ et derivata quoad t est c^2. Erat enim

$$t : \frac{\dot{x}}{c^2} \backsim 1,$$

et hinc $\frac{c^2 t}{\dot{x}}$ seu $\frac{\dot{x}}{c^2 \dot{t}}$ limite 1 gaudet. Consequenter $\dot{x} \doteq \dot{t} c^2$ et $c^2 \dot{t}$ differentiale arcus x atque c^2 derivata quoad t est. Est autem

$$(1 + t^2)^{-1} = 1 : 1 + \frac{s^2}{c^2} = 1 : \frac{c^2 + s^2}{c^2} = 1 : \frac{1}{c^2} = c^2,$$

(nempe $c^2 + s^2 = 1$).

Hinc $\int \dot{x}$ seu

$$x = \int_{(\text{quoad } t)} c^2 = \int_{(\text{quoad } t)} (1 + t^2)^{-1};$$

quod per theorema binomiale ut supra, (pag. 243) pro $t^2 < 1$, imo etsi $t^2 = 1$ sit), evolvi atque integrari potest.

7. Singulosque casus considerando patet, tendentias ad limites dictos pro quovis q, quo maius n accipitur, et hic eo fortius valere, ut supra.

IV. Sed iuxta superius (pag. 229) promissa, demonstrare superest; quod si arcus ipsi $\dot{x}$ respondens s, et chorda eius c dicatur, $\frac{s}{c} \backsim 1$, si $n \backsim \infty$; et tum differentialia dicta lineæ, superficiei planæ a linea et abscissa

Hosted by Google

ordinataque clausæ nec non tam superficiei quam soliditatis per lineam circa axem revolutam ortæ stabilienda sunt. Ut vero hoc fieri possit, quædam de lineis et partim de superficiebus dicenda sunt.

1. Dum recta cum curva comparatur, per longitudinem curvæ intelligitur limes, ad quem summa chordarum (ab una extremitate curvæ usque ad alteram ita se invicem excipientium, ut cuiusvis finis præter ultimæ finem sit novæ initium) tendit, si chordarum quævis tendit ad 0. Si plures quoque rami sint, per cuiusvis longitudinem limes talis intelligitur, et summa limitum erit tota curva ad rectam reducta. Demonstrandum itaque est dari limitem eiusmodi, eumque nonnisi unicum esse, quibusvis modis tendant chordæ singulæ ad limitem 0.

Dum superficies curva C cum plano comparatur, intelligitur per superficiem curvam limes sequens. Ponatur triangulum una cum area intellectum ita, ut apices eius in C cadant, et quodvis latus eius sit latus novi trianguli verticem in C habentis, atque cuiusvis trianguli novi hoc pacto prodeuntis lateri novum triangulum, verticem in C nec ullam portionem cum ullo præcedentium communem habens, imponatur, et cuiusvis area tendat ad limitem 0. Si iam detur tale rectangulum α, ut nequeant triangula modo dicto ita sumi, ut summæ eorum limes sit $> \alpha$, sed possint ita sumi pro dato quovis ω, ut summa eorum ab α minus ipso ω differat; tum per aream ipsius C, dum cum plano comparatur, ipsum α intelligitur; nempe limes summæ triangulorum dictorum, quorum nulla bina quidquam areæ commune habent, et quodvis tendit ad 0.

In plano autem qualiscunque figura sit, ad rectangulum eius area reducitur, cui si non terminata, saltem interminata æqualitate sit æqualis, (pag. 26) et quidem ad rectangula altitudinis, aut baseos eiusdem (unitati rectarum æqualis) reducuntur omnia, ut arithmetice clare tractentur, ita solida cuiuscunque superficiei ad parallelepipedum reducuntur, cuius basis, eadem pro omnibus, quadrato æqualis est, cuius latus æquale est unitati rectarum (pag. 27).

Hosted by Google

2. *Formae curvae* definitio paulo inferius dabitur; sed *concavitatis*, *convexitatis*, *tangentis*, *subtangentis*, *normalis*, *subnormalisque* conceptus hic explicandi veniunt. Sit abscissa x variabilis absoluta.

Concava dicitur linea versus x, si arcus quilibet in chordæ suæ plagam unam, et abscissa arcui respondens in plagam chordæ alteram cadat; si vero arcus quilibet cum abscissa ei respondente in cordæ plagam eandem cadant, *convexa* audit. Per abscissam arcui respondentem intelligitur pars ipsius x, inter ordinatas perpendiculares ab extremitatibus arcus demissas contenta.

Hinc si concava sit, e quovis puncto intermedio arcus ducantur chordæ ad eius extrema, et ex his demittantur ordinatæ ad x perpendiculares, recta fines harum coniungens erit chorda arcus totius, et basis trianguli, quod cum prioribus duabus chordis efficit; caditque hoc triangulum in plagam baseos superiorem, si pars abscissæ arcui respondens inferius sit; atque angulus basi oppositus est $\lhd 2R$ (per R rectum intelligendo). Est itaque angulus, quem curvæ versus abscissam concavæ chordæ e finibus arcus ad punctum intermedium efficient, $\lhd 2R$; pariter patet angulum quemvis eiusmodi curvæ versus abscissam convexæ, esse $\rhd 2R$ (omnino versus abscissam intelligendo). Potest vero etiam per hoc ipsum definiri curva concava et convexa, quum ex hoc sequatur id, quod in definitione dictum est; possuntque alia criteria quoque dari.

Si lineæ nulla portio recta sit, e talibus portionibus constare debet, quarum cuiusvis aut crescunt ordinatæ aut decrescunt (ad dextram intelligendo). Nam feratur ordinata y ad dextram continuo eundo perpendiculariter ad x, atque e fine primi y feratur punctum $\mathfrak{p}$ in dicto y, ut sit semper in fine ordinatæ, illi abscissæ respondentis, ad cuius finem tunc dictum y pervenit; $\mathfrak{p}$ in eodem puncto huius y manere sub nullo tempore continuo potest; nam tunc alicui portioni ipsius x recta responderet; itaque $\mathfrak{p}$ aut sursum movetur aliquamdiu, aut deorsum; in casu priore crescentibus, in posteriore decrescentibus ordinatis. Si vero prius sursum moveatur, aut usque ad finem sursum movebitur, aut non; si non, tum datur ultimum temporis punctum P (pag. 20), ante quod quodvis punctum temporis tale est, ut $\mathfrak{p}$ post illud in y sursum motum

Hosted by Google

sit; itaque P tale non est, quia si tale esset, punctum $\mathfrak{p}$ ex eo loco, in quo sub P est, adhuc sursum moveretur: adeoque adhuc ultra P deberet punctum temporis ultimum dictum accipi. Post P itaque $\mathfrak{p}$ sursum non movetur, neque in loco manet; adeoque deorsum movetur. Quod porro continuari posse patet.

Si vero ordinatæ crescant ad dextram: sive concava sive convexa sit curva, angulus, quem y cum chorda e fine eius ad dextram ducta facit, obtusus est. Nam si acutus aut rectus esset, ordinata sequens ad dextram ab altera extremitate chordæ demissa esset priore minor, aut ei æqualis.

3. (Fig. 29). Ad scopum præsentem hic sermo de recta *lineam curvam* in plano sitam *tangenti* est, definitione generali inferius tradenda. Si curvæ detur talis arcus $\mathfrak{ap}$, ut inter hunc et certam rectam $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ in eodem plano sitam ex $\mathfrak{p}$ nulla recta duci possit; *arcum* hunc dicitur $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ *tangere*, imo et *totam curvam*, si aut $\mathfrak{p}$ eius extremum sit, aut detur arcus $\mathfrak{ap}$ talis continuatio $\mathfrak{pb}$, ut inter hanc et continuationem rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ nulla recta duci possit. Pars abscissæ autem, quæ ab ordinata ex $\mathfrak{p}$ ad lineam abscissarum perpendiculari usque ad sectionem tangentis et rectæ abscissarum est, dicitur *subtangens* in casu sectionis; si vero sectio non sit, *subtangens infinita* dicitur. *Normalis* autem dicitur recta ex $\mathfrak{p}$ ad tangentem perpendicularis, et pars lineæ abscissarum ab ordinata dicta ipsius $\mathfrak{p}$ usque ad sectionem normalis et lineæ abscissarum dicitur *subnormalis*.

Gaudet vero curva in quovis puncto, recta tangenti.

Sit enim $\mathfrak{apb}$ talis arcus, ut aut totus concavus aut totus convexus, aut $\mathfrak{ap}$ concavus et $\mathfrak{pb}$ convexus sit. Vertatur in casu primo chorda $\mathfrak{ap}$ circa $\mathfrak{p}$ sursum; cadent scilicet arcus chordæque ex $\mathfrak{p}$ incipiendo sequentes omnes supra præcedentes, lineaque abscissarum infra chordam primam et omnes cadet (pag. 288). Erit vero (pag. 20) ultimum aliquod P punctum temporis, intra quod recta mota $\mathfrak{ap}$ semper in aliquam chordam cadit; tum vero in nullam chordam cadere poterit; quia arcus huius chordæ sursum caderet (pag. 288), adeoque adhuc darentur chordæ superius, et P non esset ultimum tale, ut dictum est. Nulla recta autem inter $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$, si

Hosted by Google

recta mota $\mathfrak{ap}$ tunc in $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ sit, atque arcum $\mathfrak{ap}$ duci potest; nam si posset, non esset $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ ultima, intra quam mota $\mathfrak{ap}$ in aliquam chordam cadit, adeoque ante P esset ultimum illud temporis punctum, intra quod mota $\mathfrak{ap}$ circa $\mathfrak{p}$ semper in chordam cadit.

Sed continuatio quoque rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ tangens arcus $\mathfrak{pb}$ est, si $\mathfrak{apb}$ proprie sic dicta curva sit. Nam si tam $\mathfrak{ap}$ quam $\mathfrak{pb}$ concava, aut utraque convexa sit, et pro casu primo $\mathfrak{pc}$ secet, tanquam continuatio rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$, ipsam $\mathfrak{pb}$ in $\mathfrak{c}$; vertatur $\mathfrak{pc}$ sursum circa $\mathfrak{p}$, ut tamen chorda maneat, perveniendo in $\mathfrak{pd}$; vertatur item deorsum $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ circa $\mathfrak{p}$, sed ad angulum $\sphericalangle \mathfrak{cpd}$, quantumvis exiguum, perveniatque in $\mathfrak{pe}$; erit angulus $\mathfrak{epd}$ (superius intelligendo) $\sphericalangle 2R$: nam prius ex $2R$ subtractus est angulus $\mathfrak{cpd}$, et postea hoc minus additum est. Consequenter initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ inter crura anguli duobus rectis minoris cadunt; itaque per definitionem formæ curvæ infra tradendam, curva non erit.

Si vero (Fig. 30) continuatio ipsius $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ sit $\mathfrak{pq}$, et possit duci recta $\mathfrak{pr}$ inter $\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{pb}$; tum pariter angulus $\mathfrak{a}'\mathfrak{pr}$ (deorsum intelligendo) est $\sphericalangle 2R$, et initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ inter crura erunt.

Idem patet si arcus uterque convexus sit. Si vero $\mathfrak{ap}$ concavus et $\mathfrak{pb}$ convexus sit, (pro fig. 31) vertatur $\mathfrak{pq}$ usque in $\mathfrak{pr}$, et $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ vertatur minus usque in $\mathfrak{pf}$; angulus $\mathfrak{fpr}$ (superius intelligendo) $\sphericalangle 2R$ (ut antea).

Pro (Fig. 32) autem, si nempe $\mathfrak{pc}$ chorda sit continuatio rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$; vertatur $\mathfrak{pc}$ circa $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{pd}$; erit angulus $\mathfrak{a}'\mathfrak{pd}$ (deorsum intelligendo) $\sphericalangle 2R$; atque initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ item inter crura continebuntur.

4. Crescentibus ordinatis, tangens cum ordinata perpendiculari nonnisi in puncto coincidere potest; et quidem nonnisi ad punctum primum, si concava sit, et ad ultimum, si convexa sit.

Nam sit prius concava, quævis ordinata sit post primam; ab ea retrorsum decrescentibus ordinatis, pars ordinatæ continuatæ supra curvam cadens, etsi per quadrantis intervallum circa punctum, quod in curva habet, moveretur, curvam attingere nequit.

In convexa autem nonnisi ultima ordinata tangens esse potest. Nam quævis alia ordinata sit, ducatur ad eam e puncto curvæ antrorsum per-

Hosted by Google

pendicularis; ordinata ipsa circa punctum curvæ usque ad hanc perpendicularem mota adhuc curvam non attinget.

5. Sed neque ad ordinatam potest tangens perpendicularis esse crescentibus ordinatis alibi, nisi in concavæ puncto ultimo et primo convexæ.

Nam si in concava tangens ad aliam ordinatam perpendicularis esset: ordinatæ sequentes antrorsum minores essent; in convexa autem retrorsum maiores essent.

6. Tangens cum ordinata non coincidens secat ordinatas omnes. Nam recta rectam secans, secat omnes huic paralellas, omnia iuxta elementa Geometriæ communia supponendo.

Hinc tangentes eiusmodi e finibus cuiusvis arcus secant se invicem. Nempe crescentibus ordinatis tangens ad $\mathfrak{a}$ cadit inter rectæ ordinatæ partem superiorem et arcum $\mathfrak{ap}$ in concava, in convexa autem inter ordinatam ipsam et arcum; tangens ad $\mathfrak{b}$ autem secat rectam ordinatam puncti $\mathfrak{a}$ continuatam; hoc autem fieri nequit, nisi tangens ad $\mathfrak{a}$ inter rectam dictam et arcum cadens secetur.

Facit autem crescentibus ordinatis tangens cum ordinata antrorsum angulum obtusum, retrorsum acutum. Nam si acutum aut rectum faceret; essent sequentes ordinatæ antrorsum in concava minores, et retrorsum in convexa maiores.

7. Sit tangens t et chorda c, (Fig. 33) intelligendo per ι heic tangentem ex initio arcus ordinatarum crescentium, usquequo rectam, in quam ordinata finis arcus cadit, secat; erit $\frac{t}{c} \backsim 1$ si $n \backsim \infty$.

Nam in triangulo, cuius latera sunt t, c, $\lambda - \dot{y}$, est

$$t : c = \sin.\big(2R - \alpha - (\beta - u)\big) : \sin.\alpha\,;$$

id est

$$\frac{t}{c} = \frac{\sin.\big(2R - \alpha - (\beta - u)\big)}{\sin.\alpha}.$$

Hoc autem $\backsim 1$; nam $2R - \alpha$ et α sinu eodem gaudent, α vero est constans, manens nempe etsi tangens eadem per ordinatam aliam priori

Hosted by Google

(dato quovis propius) parallelam secetur; $\beta - u$ vero $\backsim 0$; nam crescente n, decrescit $\dot{x}$, atque chorda tangenti dato quovis angulo propius venit. Itaque

$$2R - \alpha - (\beta - u) \backsim 2R - \alpha;$$

si vero duo anguli sint γ et $\gamma \pm \omega$, et $\omega \backsim 0$, erit

$$\frac{\sin.(\gamma \pm \omega)}{\sin.\gamma} \backsim 1;$$

nempe

$$\frac{\sin.\gamma \cos.\omega \pm \cos.\gamma \sin.\omega}{\sin.\gamma} = \cos\omega \pm \cot.\gamma \sin.\omega,$$

quod $\backsim 1$, nam $\cos.\omega \backsim 1$, $\sin.\omega \backsim 0$, et $\cot.\gamma$ est quantitas determinata, cuius factor $\sin.\omega \backsim 0$, dum $\omega \backsim 0$.

Unde quum sit $c = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, si demonstretur differentiale arcus verum semper inter chordam et tangentem cadere, utpote illa maiorem hacque minorem; erit arcu s et differentiali vero $\dot{s}$ dicto, etiam

$$\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{\dot{s}} \backsim 1.$$

At demonstrandum prius est, dari limitem, qui per longitudinem arcus intelligitur, eumque inter tangentem chordamque cadere. (Fig. 34).

Sint $a + \beta$, b, $c + \delta$, d tangentes pro ordinatis crescentibus: erit $a + \beta + c + \delta > a + b + c + d$. Nam $\beta > b$, et $\delta > d$; quia sit (Fig. 35) $\mathfrak{ps}$ continuatio chordæ $\mathfrak{ap}$; tangentem b infra $\mathfrak{ps}$ cadere oportet, ut et ab altera parte tangens sit; est autem angulus $\mathfrak{prq}$ acutus, cui perpendicularis $\mathfrak{pk}$ obiecta cadit; estque angulus $\mathfrak{prk} > \mathfrak{psk} > v$; consequenter angulus $\mathfrak{prk} > v$; atque hinc si triangulum $\mathfrak{prk}$ feratur sursum inter easdem ordinatas, donec $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{b}$ cadat, situ ipsius $\mathfrak{pk}$ priori parallelo, et $\mathfrak{pr}$ ac $\mathfrak{bc}$ in plagam eius eandem superiorem cadentibus: manifesto $\mathfrak{r}$ infra $\mathfrak{c}$ cadet, propter angulum ad $\mathfrak{r}$ ipso v maiorem; eritque $\mathfrak{pr} < \mathfrak{bc}$.

Duplicato n, pariter patet novam tangentium summam esse minorem ipso $a + b + c + d$, atque idem repetendo semper porro, summam tangentium semper decrescere; summam chordarum autem semper crescere

Hosted by Google

propter summam duorum trianguli laterum tertio maiorem; esseque chordam quamvis tangente respondente minorem propter angulum chordæ acutum, quem cum ordinata sequente facit, maiorem illo, quem tangens cum eadem ordinata efficit.

Hinc summa tangentium S' et summa chordarum s' dicta, tam S' sine fine decrescens, quam s' sine fine crescens limite gaudet; quum illud primo s' semper maius, et s' primo S' semper minus maneat.

Sit $S' \backsim S$ *et* $s' \backsim s$: *erit* $S = s$. Nam sit terminus generalis seriei ex S' derivatæ $u_1(m\dot{x})$ et ex s' sit $u(m\dot{x})$: erit

$$u_1(1\dot{x}) + u_1(2\dot{x}) + \ldots + u_1(n\dot{x}) \backsim S$$
$$u\,(1\dot{x}) + u\,(2\dot{x}) + \ldots + u\,(n\dot{x}) \backsim s;$$

sed $\dfrac{u_1(m\dot{x})}{u\,(m\dot{x})} \backsim 1$. Itaque $S = s$.

Cadit vero differentiale verum ipsius s inter $u_1(m\dot{x})$ et $u(m\dot{x})$, nempe

$$u_1(m\dot{x}) > \dot{s} > u\,(m\dot{x});$$

consequenter et $\dfrac{u\,(m\dot{x})}{\dot{s}} \backsim 1$, idest quum $u\,(m\dot{x})$ chordam denotet et hæc est $= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, erit $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2} = \dot{x}\sqrt{1 + (\partial y)^2}$ differentiale, ac derivata arcus quoad abscissam x est $\sqrt{1 + (\partial y)^2}$; nam $\dot{y} = \dot{x}\partial y + \omega$, nempe $\dot{y} - \dot{x}\partial y$ dicatur ω, eritque

$$\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}} \backsim 1,$$

nam

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x}\partial y + \omega)^2} \backsim 1,$$

nam $\dfrac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2} = 1$ et $\dfrac{\dot{x}\partial y}{\dot{x}\partial y + \omega} \backsim 1$ quia $\dfrac{\dot{x}\partial y}{\omega}$ dato quovis maius fieri potest; consequenter per (pag. 93 et 94)

$$\frac{(\dot{x}\partial y)^2}{(\dot{x}\partial y + \omega)^2} \backsim 1, \text{ atque } \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x}\partial y + \omega)^2} \backsim 1,$$

Hosted by Google

adeoque etiam radix secundi gradus $\backsim 1$; et hinc $\dot{x}\sqrt{1+(\partial y)^2}$ *differentiale sensu stricto*, $\sqrt{1+(\partial y)^2}$ autem, sive $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ *derivata arcus* est.

Quoad convexam idem eodem modo prodit, si tangentes ad ductum ordinatarum decrescentium accipiantur.

Potest etiam idem per summam tangentium se mutuo inter ordinatas secantium ostendi.

8. Sed limes iste etiam semper idem est; nempe utcunque accipiantur chordæ se invicem modo superius dicto excipientes, summæ earum limes idem s superius erit. Nam sit certo modo acceptis in curva punctis limes chordarum maior aut minor quam prior limes s quantitate ω.

Si maior fuerit, tum dari oportet chordas tales modo certo positas, ut summæ earum differentia a limite $s+\omega$ sit $<\omega$, nempe summa ipsa sit $>s$; quod vero absurdum est. Nam accipiatur omnium partium ipsius x, e cuius finibus erectæ ordinatæ chordas terminant, illa, qua nulla earum minor est; item accipiatur n modo priore tam magnum, ut in minimam partem dictam ipsius x quoque ipsa $\dot{x}$ ad minimum numero μ cadant, quem utvis augere manifesto licet. Erigantur ordinatæ e finibus cuiusvis $\dot{x}$; terminabuntur pro quovis arcuum ordinatæ extimæ aut in finibus eorum, aut terminabitur una tantum in arcus fine, aut neutra. Si pro omnibus arcubus ordinatæ extimæ in eorum finibus terminentur; erit ductis novis ad minimum μ chordis pro quovis arcu earum summa maior eo, quod ipso s maius erat; adeoque maior limite illo, quo semper minor manet.

Si una tantum duarum ordinatarum extimarum aut neutra terminetur ad chordæ finem, ducantur ubique, ubi ita est, a finibus ordinatarum extimarum chordæ ad proximos arcuum fines; erit tum summa chordarum novarum maior summa priorum; nam quævis harum est summa novarum ei respondentium maior. At quum chordæ non omnes ita ut superius positæ sint, sit numerus arcuum priorum ν; in totidem locis tantum fieri potest, ut ordinatæ extimæ dictæ per duplicationem numeri n ortæ cum ordinatis ad fines arcuum non coincidant; sit chordarum, quæ hoc pacto ex s' (pag. 294) desunt, nec plures quam numero constante ν esse

Hosted by Google

possunt, summa u, et earum quæ accedunt, nec plures quam numero 2ν esse possunt, summa sit u'; erit $u' > u$ (propter duorum laterum trianguli summam tertio maiorem), at n, adeoque μ ita augeri poterit, ut $u' - u$ dato quovis k minus fieri queat; si ex. gr. arcus ita accipiantur, ut nullius chorda ulla sit $> \frac{k}{2\nu}$, erit $u' < \frac{2k\nu}{2\nu}$, et quum $u' - u < u'$ sit, est $u' - u < k$. Est autem quodvis $s' + u' - u > s + \omega$, et utrumque positivum est, ita et s atque $s' + u' - u - s$ et $s + \omega - s$ positiva sunt, atque $s' + u' - u - s$ maius positivum est quam $s + \omega - s$, id est quam ω; sed $s' - s \backsim 0$, ita $u' - u \backsim 0$; itaque $s' + u' - u - s \backsim 0$; adeoque quantitas, quæ omni dabili minor fieri potest, maneret maius positivum, quam determinatum ω.

Sed nec minor esse limes alio modo potest. Sit enim limes $s - \omega$; ponantur chordæ prius modo priore, ut sit $s' > s - \omega$, nempe s' sit (omnino positivum) $= s - \omega + \alpha$, quod quum s limes ipsius s' sit, pro certo α positivo et ipso ω minore fieri potest; ponantur tum chordæ modo altero, ita ut in quemvis arcum plures cadant, quum illas quoque quam proxime accipere liceat; dicanturque sensu ut antea u' et u, eo discrimine, quod pro chordis alio modo positis intelligantur; sitque summa harum $s - \omega - z$ pariter positivum. Erit $s - \omega - z + u' - u$ quoque positivum et $> s - \omega + \alpha$; atque subtrahendo posterius positivum e maiore positivo, manebit positivum; nempe $u' - u - z - \alpha$ semper positivum esse deberet, quamvis α constans positivum, adeoque $-\alpha$ constans negativum sit, $u' - u$ autem $\backsim 0$, et z quoque $\backsim 0$, quum $s - \omega$ limes summæ chordarum modo alio positarum sit, adeoque $u' - u - z \backsim 0$, et quantitatem constantem negativam positivam reddere nequit.

9. *Sit area* a linea, cuius ordinata $y = B(x)$, atque ordinatis et abscissa x comprehensa $= A(x)$; erit *functio differentianda* non ut antea, sed in concreto data; estque differentiale verum, nempe terminus generalis seriei ex $A(x)$ derivatæ, $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$; atque manifesto est pro (Fig. 36)

$$y\dot{x} \lessdot A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \lessdot (y + \dot{y})\dot{x},$$

Hosted by Google

per $\dot{y}$ intelligendo differentiam ipsius y ab ordinata sequenti, nempe e fine ipsius $\dot{x}$ erecta. Sed

$$\frac{y}{y+\dot{y}} \backsim 1;$$

consequenter

$$\frac{y\dot{x}}{A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})} = \frac{\dot{x}B(m\dot{x})}{A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})} \backsim 1.$$

Est igitur $\dot{x}B(x)$ *differentiale*, et quidem sensu stricto, ipsius $A(x)$; et $y = B(x)$ derivata eius quoad x est.

10. Ita si $A(x)$ *soliditatem, quae per revolutionem lineae circa abscissam generatur*, denotet: per $y\dot{x}$ et $(y+\dot{y})\dot{x}$ describentur cylindri, quorum soliditates sunt $y^2\pi\dot{x}$ et $(y+\dot{y})^2\pi\dot{x}$; est autem pro (Fig. 36)

$$y^2\pi\dot{x} \lessdot A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x}) \lessdot (y+\dot{y})^2\pi\dot{x}.$$

Sed $\frac{y}{y+\dot{y}} \backsim 1$, adeoque $\frac{y\,.\,y\pi\dot{x}}{(y+\dot{y})(y+\dot{y})\pi\dot{x}} \backsim 1$, consequenter

$$\frac{y^2\pi\dot{x}}{A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})} \backsim 1;$$

itaque $y^2\pi\dot{x}$ termino generali seriei ex $A(x)$ derivatæ æquipollet, nempe si $y = B(x)$, est

$$\frac{(B(m\dot{x}))^2\,.\,\pi\dot{x}}{A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

atque $\dot{x}\,.\,\pi(B(x))^2$ id est $\dot{x}\,.\,\pi y^2$ *differentiale* sensu stricto ipsius $A(x)$ et πy^2 *derivata* quoad x est.

11. Si $A(x)$ *superficiem revolutione lineae circa abscissam ortae* denotet, sit prius (Fig. 34) linea concava, crescentibus ad dextram ordinatis. Dicatur t tangens $\alpha+\beta$, et C chorda ei respondens, item chorda tangenti α respondens dicatur c', et c'' sit chorda tangenti b respondens. Describuntur revolutione schematis coni truncati, qui dicantur coni truncati ipsius $(\alpha+\beta)$, id est ipsius t, ita ipsorum a, b, c', c''. Est autem superficies coni truncati facto e summa radiorum basium parallelarum et π

Hosted by Google

atque latere coni truncati æqualis. Erit itaque conus truncatus ipsius $a+\beta$

$$=\pi(a+\beta)(y+y''+\lambda),$$

ita coni truncati ipsorum a, b, et ipsius C ac ipsorum c', c'' erunt $\pi a(y+y'+\lambda')$, $\pi b(y'+y''+\lambda'')$, $\pi C(y+y'')$, $\pi c'(y+y')$, $\pi c''(y'+y'')$. Unde conus truncatus ipsius $(a+\beta)$ maior est quam coni truncati ipsorum a et b; quo continuato patet summam conorum truncatorum per tangentes descriptorum decrescere. Est etiam manifesto conus truncatus chordæ C minor summa conorum truncatorum ipsarum c' et c''; itaque si duplicato n, numerus chordarum semper porro duplicetur, crescet summa conorum truncatorum per chordas descriptorum, manet tamen semper minor summa conorum truncatorum per tangentes simultaneas descriptorum, adeoque minor cono truncato per $a+\beta$ descripto, quum summa plane dicta sit hoc minor. Datur itaque limes summæ conorum truncatorum per chordas descriptorum, atque

$$C\pi(y+y'')\prec A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})\prec t\pi(y+y''+\lambda).$$

Est autem (pag. 292)

$$\frac{C}{t}\backsim 1, \text{ et } \frac{y+y''}{y+y''+\lambda}\backsim 1;$$

itaque

$$\frac{C\pi(y+y'')}{t\pi(y+y''+\lambda)}\backsim 1.$$

Consequenter

$$\frac{C\pi(y+y'')}{A(m\dot{x})-A((m-1)x)}\backsim 1;$$

atque quum $y+y'':2y\backsim 1$ et $C=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, fit $2\pi y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, id est $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}\dot{x}$ *differentiale* limitis conorum per chordas lineæ se invicem ut supra (pag. 288) excipientes descriptorum; $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ autem *derivata* quoad x est.

Quoad convexam quoque idem prodit. Superficies quæritur (Fig. 37), quæ erit limes viæ chordarum se invicem excipientium. Vertatur in $\mathfrak{b}f'$ tangens $\mathfrak{b}f$, et si duplicato n tangentes $\mathfrak{b}d$, $\mathfrak{d}f''$ oriantur, vertatur $\mathfrak{d}f''$ in

Hosted by Google

$\mathfrak{d}f'''$ circa perpendicularem ex $\mathfrak{d}$ ad y, ac pro duplicato iterum n, ortisque tangentibus $\mathfrak{b}c$, $\mathfrak{c}d''$, $\mathfrak{d}e'$, $\mathfrak{e}g$, vertatur quævis circa perpendicularem e puncto tactus ad y missam; et idem continuetur semper duplicato n et tangentium numero duplicato. Consideretur iam conus truncatus ipsius $f'\mathfrak{b}$, tum summa conorum truncatorum ipsorum $\mathfrak{b}d'$, $\mathfrak{d}f'''$, tum summa conorum truncatorum ipsorum $\mathfrak{b}c'$, $\mathfrak{c}d'''$, $\mathfrak{d}e''$, $\mathfrak{e}g'$; patet conum truncatum primum esse maiorem summa sequente conorum truncatorum, et hanc maiorem summa sequente, atque hoc continuari sine fine posse; nempe manifesto conus truncatus $\mathfrak{b}f'$ constat e cono truncato $\mathfrak{b}d'$ et cono truncato $d'f'$, et posterior est $= \pi(d'\mathfrak{d}' + f'\mathfrak{a}')\,d'f'$; summa conorum truncatorum $\mathfrak{b}d'$ et $\mathfrak{d}f'''$ æqualis cono truncato $\mathfrak{b}d' + \pi(\mathfrak{d}\mathfrak{d}' + f'''\mathfrak{a}')\,\mathfrak{d}f'''$; atque $\mathfrak{d}\mathfrak{d}' < d'\mathfrak{d}'$ et $f'''\mathfrak{a}' < f'\mathfrak{a}'$, (quia angulus $u > v$ est, adeoque h supra l cadit) ac $(\mathfrak{d}f''' = \mathfrak{d}f'') < (d'f' = df)$ per (pag. 293); ita valores reliqui, e quibus coni truncati exsurgunt, crescunt excepto π et illis quæ manent, ex. gr. in prima duplicatione manent $\mathfrak{b}d'$ et basium radii. Ducatur perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad y; erit quævis conorum truncatorum summa semper maior, quam via ipsius $\mathfrak{a}k$. Unde limitem decrescentis summæ dictæ dari constat; dicatur is $A(x)$.

Dicaturque terminus generalis seriei conorum truncatorum dictorum $u(m\dot{x})$; erit

$$u(1\dot{x}) + u(2\dot{x}) + \ldots + u(n\dot{x}) \backsim A(x);$$

denotetque $a(m\dot{x})$ conum truncatum chordæ; facile patet quod

$$u(m\dot{x}) : a(m\dot{x}) \backsim 1;$$

adeoque per superiora etiam

$$a(1\dot{x}) + a(2\dot{x}) + \ldots + a(n\dot{x}) \backsim A(x);$$

atque hinc est et hic $2\pi y\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}\dot{x}$ differentiale limitis viæ chordarum, et $2\pi y\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est derivata quoad x.

Interim tamen proprie de trapeziis tantum, quæ (pag. 288) in triangula apices in superficie habentia dispesci possunt, sermo est, atque limite summæ eorum; at omnia dicta valent, si pro arcu $= \frac{2\pi}{\mu}$, ubi integer $\mu \backsim \infty$, trapezia simultanea considerentur.

Hosted by Google

Imo etiam et hic limitem eundem esse ut supra demonstrari potest, utcunque ponantur triangula sub conditione ibidem dicta; partes nempe eorum in plana ad abscissam e finibus ipsorum $\dot{x}$ contentæ considerari debent, quod tamen brevitatis studio omittitur.

12. Si e *lineae* S puncto quovis demittatur perpendicularis z ad planum P idem pro omnibus punctis ipsius S, complexus s sectionum omnium z cum P vocatur *proiectio* ipsius S in P. Si in P sita recta acceptis a puncto certo incipiendo abscissis x æquatio ordinatæ y pro s data sit, atque data etiam æquatio sit, per quam e cuiusvis y fine erecta perpendicularis z, nempe distantia puncti ipsius S a P, determinatur, manifesto tota S in spatio determinata erit. Ordinatæ omnino accipiuntur in P in una ipsius x plaga positive, et negative in altera, ita ipsa z accipiuntur in una plaga ipsius P positive et negative in altera; ita ab initio abscissarum accipiuntur abscissæ in una plaga positive et negative in altera.

Si $s = a(x)$ et $S = A(x)$ atque $a(m\dot{x}) - a((m-1)\dot{x})$ denotetur per $\dot{s}$ et $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ per $\dot{S}$: erit

$$\dot{s} \doteq \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};$$

atque e finibus ipsius $\dot{s}$ erectæ ordinatæ (usque ad fines ipsius $\dot{S}$ ipsi $\dot{s}$ respondentis) dicantur z et z_1, et chorda ipsius $\dot{s}$ dicatur c; erit perpendicularis ab extremitate ipsius z ad z_1 missa $= c$; orieturque triangulum rectangulum, cuius unus cathetus est c, alter est $\dot{z}$ pro $z_1 = z + \dot{z}$, hypothenusa autem est chorda ipsius $\dot{S}$, quæ itaque est $= \sqrt{c^2 + \dot{z}^2}$. Sed $c^2 \doteq \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Consequenter pro $\dot{y} \doteq y'\dot{x}$ et $\dot{z} \doteq z'\dot{x}$

$$\dot{S} \doteq \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \doteq \dot{x}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Estque hoc *differentiale ipsius* S nempe *limitis summae chordarum*, atque *derivata* quoad x *est* $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$. Nempe et hic ut supra limitem dari demonstrari potest, si pro ordinatis z crescentibus tangentibus plana ad abscissam perpendicularia ordinatas sequentes complectentia, quas secent, obiiciantur; sed brevitas necessaria uberius exponere vetat.

Hosted by Google

V. Notandum est sæpius esse, ut expressio differentialis strictioris, adeoque derivatæ, quum $\dot{x}$ semper finitum et nunquam 0 sit, sed dabili quovis minus fieri queat, pro certo valore ipsius x fiat $= 0$ aut ∞, vel $0:0$; imo si derivata prima, secunda, & accipiantur, sæpius quævis usque ad aliquam fiat $= 0$, pro valore certo ipsius x, aut derivata prima, secunda finitæ vel 0 sint, et ab aliqua incipiendo omnes infinitæ fiant. Sunt autem valores eiusmodi ipsius x nonnisi in punctis discretis, (patet si functio linea expressa per ordinatas cogitetur); atque vocantur hæc *puncta singularia*, quum linea ad puncta his respondentia qualitatibus talibus gaudeat, quibus reliqua inter hæc non gaudent; sunt quoque ibi differentialia cum veris haud æquipollentia, at derivatæ primæ ibi quoque limites sunt quotorum e differentialibus veris per $\dot{x}$ divisis.

Superius (pag. 217) dictum est differentiale verum esse terminum generalem seriei e functione aliqua derivatæ; itaque si n sufficienter augeatur, quum x e talibus portionibus constet, quarum cuivis respondentes ordinatæ aut crescent ab initio usque ad finem, aut decrescent, hoc nunquam $= 0$ esse potest. At etiam differentiale strictius dictum est esse terminum seriei totidem terminorum generalem, differentiali vero sub certa saltem conditione æquipollentem (pag. 214); conditio quæ ibi simplicitatis et claritatis caussa per zx expressa est, quamvis omnia per partes eo reduci queant, generalius ita exprimi potest. *Si* $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} \backsim 1$ *pro quovis* $m\dot{x}$ *a certo valore* a *ipsius* $m\dot{x}$ *usque ad certum valorem* b *ipsius* $m\dot{x}$, *ita ut quae excipiuntur, nonnisi punctum aut puncta discreta sint, aut simul vel sine illis pars ipsius* x *talis sit, quae dato quovis minor fieri potest: tum* $u(x)$ *dicitur differentiale generalius ipsius* $A(x)$ *a valore* a *ipsius* x *usque ad valorem* b. Atque manifesto

$$A(b) - A(a) = B(b) - B(a)$$

et

$$A(b) = B(b) - B(a) + A(a),$$

si tam

$$\frac{u(m\dot{x})}{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

quam

Hosted by Google

$$\frac{u(m\dot{x})}{B(m\dot{x})-B((m-1)\dot{x})} \backsim 1.$$

Imo valor ipsius m extendi potest, ut etiam 0 et integros negativos denotare queat, ut sit pro $\dot{x}$ positivo series incrementorum

$$\ldots\ldots A(2\dot{x})-A((2-1)\dot{x}),\ A(1\dot{x})-A((1-1)\dot{x}),\ A(0\dot{x})-A((0-1)\dot{x}),$$
$$A((0-1)\dot{x})-A((-1-1)\dot{x}),\ A(-2\dot{x})-A((-2-1)\dot{x})\ldots\ldots$$

Si ex. gr. $A(x)=\sqrt{x-1}$, valores omnes imaginarii erunt ab $x=0$ usque ad $x=1$; at etiam differentiale integraleque imaginarium accipi a valore 0 ipsius x usque ad 1 poterit, aut vero abscissa (post $x=1$) a 0 crescens accipi poterit, aut ut dictum est ab $x=1$ usque ad certum valorem $b>1$ accipietur.

Erit autem aut certus seriei, cuius terminus generalis est $u(m\dot{x})$, terminus m-tus $=0$, sed ita, ut si ipsi m substituatur $m-1$, sit

$$\frac{u((m-1)\dot{x})}{a((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

aut sive pro $x=0$ fiet expressio differentialis $=0\dot{x}$, si in ea 0 substituatur ipsi x, sive id pro alio tali $m\dot{x}$ fiet ita, ut $u((m-1)):a((m-1)\dot{x})$ non tendit ad 1. Ex. gr.

$$d(b-x)^2=-2(b-x)\dot{x}$$

et pro $x=b$ fit $(n-1)\dot{x}=b-\dot{x}$, ac $u((n-1)\dot{x})$ fit $-2\dot{x}^2$, $a((n-1)\dot{x})$ autem fit

$$(b-(b-\dot{x}))^2-(b-(b-2\dot{x}))^2=-3\dot{x}^2,$$

atque $2\dot{x}^2:3\dot{x}^2$ non tendit ad 1, sed est $=\frac{2}{3}$. Nempe $A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})$ dicitur $a(m\dot{x})$.

Quoad casum primum, pro $u(m\dot{x})=\dot{x}\ u_1(m\dot{x})$ est

$$\frac{A((m-1)\dot{x})-A(m-2)\dot{x})}{\dot{x}\,.\,u_1((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

adeoque

$$\frac{A((m-1)\dot{x})-A((m-2)\dot{x})}{\dot{x}} \backsim u_1((m-1)\dot{x}) \backsim u_1(m\dot{x})=0.$$

Hosted by Google

Sed

$$\frac{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})}{A((m-1)\dot{x}) - A((m-2)\dot{x})} \backsim 1,$$

si neutrum 0 aut ∞ sit. Nam (Fig. 38)

$$\gamma + \lambda = (h^2 - \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\gamma = (i^2 - \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}};$$

atque

$$\frac{i^2 - \dot{x}^2}{h^2 - \dot{x}^2} \backsim 1,$$

quia $\frac{i}{h} \backsim 1$, namque et $\frac{i}{t} \backsim 1$, eodem modo patet, uti (pag. 292). Itaque

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \backsim 1,$$

consequenter

$$\frac{\dot{y}}{\gamma + \lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda} \backsim 2$$

et

$$\frac{\dot{y}}{\gamma + \lambda} - 1 = \frac{\dot{y} - (\gamma + \lambda)}{\gamma + \lambda} \backsim 1.$$

Si vero pro $x = k$, ubi k etiam 0 significare potest, fiat expressio derivatæ $= 0$, atque non sit casus is, ubi si tantum uno $\dot{x}$ ultra vel intra k accipiatur differentiale verum, quotus ex hoc per expressionem differentialis strictioris tendat ad 1, poterit accipi ω utvis parvum positive aut negative prouti casus poscit (ex. gr. pro $k = 0$, sumatur positive), ut sit

$$\frac{A(k + \omega + \dot{x}) - A(k + \omega)}{\dot{x} \,.\, u_1(k + \omega + \dot{x})} \backsim 1;$$

nam nulla pars continua ex k incipiendo est per hypothesim, ubi hoc non valeat. Inde vero est

$$\frac{A(k + \omega + \dot{x}) - A(k + \omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(k + \omega + \dot{x});$$

sed $u_1(k + \omega + \dot{x}) - u_1(k) \backsim 0$; itaque

Hosted by Google

$$\frac{A(k+\omega+\dot{x})-A(k+\omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(k)=0.$$

Itaque patet ordinatarum puncto, ubi k terminatur, quam proximarum incrementa per $\dot{x}$ divisa hoc pacto ad limitem $0=u_1(k)$ tendere.

Interim si $A(k+\omega-\dot{x})-A(k+\omega)$ dicatur $\dot{y}$ et $A(k+\omega)-A(k)$ dicatur z, erit $\frac{\dot{y}}{z} \backsim 1$.

Nam $\dot{y}-z < \frac{z}{N}$ fieri pro dato quovis N potest; nam pro

$$\dot{y}=\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)z}{N}$$

fit

$$\dot{y}-z=\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)z}{N}-z=\frac{z}{2N};$$

potest autem $\dot{y}$ et z ita sumi, ut $\dot{y}$ superet ipsum z quantitate minore quam $\frac{z}{N}$. Est vero tunc

$$\frac{\dot{y}:\dot{x}}{z:\dot{x}} \backsim 1;$$

itaque quum $\dot{y}:\dot{x}$ dato quovis minus fiat dum $n \backsim \infty$, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato maius manere nequit; consequenter quum z non 0 sit, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato quovis minus fit idest $\frac{z}{\dot{x}} \backsim 0$. Si $\dot{y}:\dot{x}$ dato quovis maius fiat, $z:\dot{x}$ dato minus non manet, fitque dato quovis maius.

Pariter patet, si $u_1(k)=\infty$. Sit ex. gr. $k=0$; tum item ω dato quovis minus accipere licet, ut sit

$$\frac{A(\omega+\dot{x})-A(\omega)}{\dot{x}\,.\,u_1(\omega+\dot{x})} \backsim 1,$$

adeoque

$$\frac{A(\omega+\dot{x})-A(\omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(\omega+\dot{x}).$$

Sed si $u_1(0)=\infty$, tum $u_1(\omega+\dot{z})$ dato quovis maius fieri debet, dum $\omega+\dot{x} \backsim 0$, atque et hic ut prius $\frac{\dot{y}}{z} \backsim 1$ applicatur.

Hosted by Google

Quod differentiæ ordinatarum finitarum, abscissarum differentia ad limitem o tendente, tendunt ad o; atque ut ordinata infinita fiat, antea omni dabili maior fieri debeat; partim de qualibet functione speciatim demonstrari potest, (uti etiam factum iam de pluribus est), partim inferius demonstrabitur; intuitui vero per ordinatas in plano, in quarum qualibet uno puncto terminante valorem functionis complexus eorum interrumpi nequit, exhibetur.

VI. Quum tamen hæc exemplis geometricis, singularitatem eiusmodi punctorum ostendentibus, illustrare supervacuum non sit; sit (Fig. 39) chorda ex $\mathfrak{p}$ incipiens, vertaturque usquequo tangens fiat, et sit subtangens s, ac

$$y = A(m\dot{x});$$

erit

$$\dot{y} : \dot{x} = y : s',$$

adeoque

$$s' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} y;$$

est autem $s - s' = \omega$, quod $\backsim 0$, atque

$$\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y\dot{x} : \dot{x}}{\dot{y} : \dot{x}} = \frac{y}{\dot{y} : \dot{x}};$$

itaque

$$\frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} = s - \omega \text{ et } \frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} \backsim s.$$

Erat vero $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \backsim \mathfrak{d}y$, atque hinc iuxta (pag. 89) de tali y loquendo, quod neque ∞ neque o est (nempe si quod $= 0$ esset, augeatur quævis ordinata quantitate b, ut in Fig. 40), erit

$$\frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} \backsim \frac{y}{\mathfrak{d}y} \text{ et } s = \frac{y}{\mathfrak{d}y}.$$

Eritque $s = 0$, si $\dot{y} : \dot{x}$ omni dabili maius adeoque $\mathfrak{d}y = \infty$ fiat; item s fiet ∞, si $\dot{y} : \dot{x}$ omni dabili minus, adeoque $\mathfrak{d}y = 0$ fiat.

Ostendit Figura (39*) casum, ubi $s = s' - \omega$; at ibi quoque omnia applicari patet.

Hosted by Google

Pro casu, ubi $y=0$, autem res iuxta Fig. (41), quoque considerari potest. Sit certa abscissa constans α, cui respondeat y; erit

$$\dot{x} : \dot{y} = \alpha : S' \quad \text{et} \quad S' = \frac{\alpha \dot{y}}{\dot{x}};$$

atque si $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \backsim \infty$, erit $S = \alpha\infty$, nempe tangens ipsi y parallela, adeoque perpendicularis ad abscissam; est autem hic

$$A(\dot{x}) = A(1\dot{x}) - A(0 . \dot{x}) = \dot{y},$$

atque pro $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \backsim \infty$ est $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \backsim 0$.

Est etiam (Fig. 42)

$$s : y = 1 : \text{tang.}\, v,$$

item

$$y : s = 1 : \text{tang.}\, u.$$

Unde

$$\text{tang.}\, v = \frac{y}{s},$$

item per $s = y : \partial y$

$$\text{tang.}\, v = y : \frac{y}{\partial y} = \partial y;$$

atque

$$\text{tang.}\, u = \frac{s}{y} = 1 : \partial y.$$

Quantitates tangentis T, normalis N et subnormalis, e triangulis rectangulis prodire patet.

Sed si consideretur, qualisnam curvæ ductus ante et post punctum tactus sit, erit (Fig. 43)

$$s : y = s + \dot{x} : y_1 + \omega;$$

et hinc

$$y_1 + \omega = \frac{y(s + \dot{x})}{s} = y + \frac{y\dot{x}}{s} = y + y'\dot{x}.$$

Sit $y = A(x)$; erit (per *Taylorianum* paulo inferius)

$$y_1 = A(x + \dot{x}) = A(x) + \dot{x}\,\partial A(x) + \frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2 A(x) + \frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3 A(x) + \ldots$$
$$= y + \dot{x}.y' + \frac{\dot{x}^2}{2}y'' + \frac{\dot{x}^3}{2.3}y''' + \ldots$$

Hosted by Google

et summa terminorum duorum priorum $= y_1 + \omega$; itaque si terminus sequens negativus sit, quod fit si derivata secunda negativa sit, curva ductum infra tangentem, si vero derivata secunda positiva sit, supra tangentem e puncto tactus incipit; quum quemlibet terminum, nisi 0 sit, summa omnium sequentium maiorem fieri posse demonstretur. Si vero derivata secunda imo et postea sequentes 0 fuerint, prouti prima quæ non 0 est, positiva vel negativa est, curva versus abscissam convexa vel concava erit. Idem et ante punctum patet. Erit nempe ibi

$$s : y = s - \dot{x} : y_2 + \omega_1,$$

et hinc

$$y_2 + \omega_1 = y - y'\dot{x},$$

atque

$$A(x - \dot{x}) = y - \dot{x}y' + \frac{\dot{x}^2}{2}y'' - \frac{\dot{x}^3}{2.3}y''' + \ldots$$

et hinc si derivata secunda non sit 0, et negativa sit, erit et ramus ad lævam concavus, si positiva, convexus; si vero $y'' = 0$ et y''' non sit 0 atque sit ex. gr. positivum, erit ad dextram incrementum $+ \frac{\dot{x}^3}{2.3}y'''$, ad lævam autem oppositum eius, atque idem eveniet, si derivatæ ipsi 0 æquales in derivata numeri paris desinant; erit itaque post punctum tactus ramus ad dextram convexus, ad lævam concavus. Vocatur eiusmodi *punctum flexus*.

Patet etiam, quod si derivata secunda sit functio certi valoris, nec 0, nec ∞, inflexionem non esse; quia si valor is positivus sit, linea utrinque convexa, si negativus, utrinque concava erit. Si derivata secunda sit 0 aut ∞, vel sub formam $\frac{0}{0}$ veniat pro valore certo a ipsius x; accipiatur tum una vice $x = a + \omega$, altera vice autem $x = a - \omega$, pro ω positivo et quantumvis exiguo, et quæratur pro his valoribus ipsius x, num rami e fine ipsius $x = a$, utrinque concavi aut utrinque convexi sint, vel unus concavus et alter convexus sit.

Dantur etiam alia puncta singularia: nempe si duo rami ad certum punctum tangente communi gaudeant, et aut utraque aut una tantum convexam faciem alteri obvertat, dicitur prior *cuspis primi generis*, posterior *secundi*; et cuiusvis duæ species sunt, prouti versus abscissam

Hosted by Google

convexi fuerint rami, aut concavi; pro cuspide primi generis tangens inter utrumque cadit, pro altera non. (Fig. 45, 46, 47, 48.)

Si plures rami tangentibus ad idem punctum diversis gaudeant, vocatur punctum *multiplum*; quod fieri posse manifestum est, si functionis plures valores (ex. gr. per radicalia) fuerint, qui pro certo valore ipsius x, disparentibus ex. gr. certis radicalibus, ad unicum redigantur; uti exempla ostendent. Pertinent vero etiam cuspides ad puncta multipla; at cuspidis ramus uterque tangente eadem gaudet; et dantur eiusmodi puncta multipla, ut rami ex eodem puncto prodeuntes diversis tangentibus gaudeant; est autem omnibus punctis multiplis commune, quod ordinata, quæ ad tale punctum est, derivata quoad omnes ramos inde prodeuntes non una gaudeat, uti quævis alia etiam ordinatarum plurium eidem puncto respondentium.

Dantur etiam puncta *isolata* dicta: datur nempe functio talis, cuius ex. gr. a valore certo ipsius x usque ad certum (aut in ∞), nonnisi pro certo aut certis valoribus detur valor realis; atque si talis valor 0 sit, per y punctum abscissæ ibidem determinetur.

Exempla.

a) Si ordinata y sit $= b + ax^2$, erit pro b positivo et a positivo linea versus abscissam convexa, et concava si a negativum sit, et quidem utrinque ab $x = 0$ incipiendo, tam pro x positive quam pro x negative incipiente; excurruntque duo rami utrinque æqualiter, ordinatis crescentibus in ∞; transibunt autem per axem ad distantias a capite abscissarum æquales, si a negativum fuerit, ubi $ax^2 = -b$, quum ibi $y = 0$ sit; ac tangens erit axi parallela pro $x = 0$. Nam derivata prima (quæ breviter ∂ atque ita secunda dici potest ∂^2) est $2ax = 0$ pro $x = 0$; ∂^2 autem $= 2a$, quod positivum est pro a positivo, et negativum si a negativum fuerit, adeoque linea in casu primo ex $x = 0$ incipiendo versus abscissam convexa, in altero concava erit.

Patet vero ∂^2 esse pro quovis valore ipsius x positivum pro a positivo et negativum pro a negativo; interim post $ax^2 = -b$, pro a negativo, transeuntibus ramis in alteram axeos plagam, erunt hi ad partem

Hosted by Google

axeos illis respondentem convexæ; at ut ita loqui fas sit, id quod faciei axeos superiori concavum, inferiori convexum est; concipiatur axis deorsum sibi parallele ad distantiam d moveri; quævis ordinata incrementum d capiet, et pro b fiet $b+d$ manente curva; atque ∂^2 pro quavis abscissa infra curvam, etiam pro parte antea infra axem cadente, negativum fiet, et curva versus superiorem axeos faciem concava erit.

Est autem linea hæc plane parabola (Fig. 44), si axis a vertice parabolæ ad distantiam b sumatur ad axem X perpendicularis; nempe si $Y^2=\frac{X}{a}$ pro parametro $=\frac{1}{a}$, et $Y=x$ atque $y=b+X$, est $y=b+ax^2$.

b) Si $y=b+x^3$, pro $x=0$ inflexio est. Nam $\partial y=3x^2$ et $\partial^2 y=2.3x$, quod pro x positivo positivum, pro x negativo negativum est, adeoque pro x positivo curva ultra $x=0$ forma convexa, et concava pro x negativo incipit. Est autem tangens axi parallela pro $x=0$, quia $\partial y=0$; est quidem tunc et $\partial^2 y=0$, sed si x crescat positive aut negative, fiatque ω positive aut negative quantovis minus, prius dicta valent.

c) Si $y=b+x^{\frac{3}{2}}$, aut $y=b+x^{\frac{2}{3}}$, aut $y=b-x^{\frac{2}{3}}$, orietur pro $x=0$ cuspis primi generis; primum dat (Fig. 45), sequens dat (Fig. 46), tertium exhibet (Fig. 47); nempe ∂ prioris est $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, quod pro $x=0$ fit 0, adeoque tangens axi parallela est; $\partial^2 y=\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{1}{2}}$, quod pro $x=0$ fit ∞; at si pro x ponatur $\pm\omega$, quantovis minus, fiet $\frac{3}{4\sqrt{\omega}}$, cuius duo valores sunt, unus positivus, alter negativus, alioquin æquales, et prior denotat convexitatem rami superioris, qui e valore positivo ipsius $\sqrt{x^3}$ ipsi b addito generatus est, posterior concavitatem rami inferioris, qui e $-\sqrt{x^3}+b$ factus est. Patet quoque pro x negativo ordinatam $\sqrt{x^3}$ imaginariam, at pro $b+x^{\frac{2}{3}}$ sive positivum sive negativum sit x, ordinatam unicam respondere abscissæ cuivis, et ab $x=0$ utrinque æqualiter excurrere ramos; est vero pro hoc casu

$$\partial y=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

Hosted by Google

quod pro $x=0$ fit ∞, efficitque tangentem axi perpendiculariter insistentem; estque tum $\partial^2 y = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$, quod quidem pro $x=0$ fit ∞, at substituendo (ut prius) ω, fiet pro ω tam positivo quam negativo negativum, adeoque curva utrinque concava. Patet vero, quod si in expressionibus ipsius y ponatur $x-a$ pro x, dicta pro $x=a$ fiant.

d) Si vero $y=b-x^{\frac{2}{3}}$, ∂y pariter infinita pro $x=0$, tangentem item perpendicularem dabit, sed $\partial^2 y$ erit $\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$ positivum ab $x=0$ incipiendo utrinque, adeoque curva utrinque versus abscissam convexa.

e) Si $y=x^2+x^{\frac{5}{2}}$, prodit pro $x=0$, cuspis secundi generis, et tangens axi parallela, (nempe ad distantiam 0). Nam

$$\partial y = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, \text{ et } \partial^2 y = 2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}},$$

atque prius fit 0 pro $x=0$, posterius fit $=2$, ostenditque ramum utrumque versus axem ab $x=0$ incipiendo convexum esse; nempe abinde pro abscissa positiva quavis $\sqrt{x^5}$ duos valores habet, pro negativa autem imaginarum fit. At ramus superior e radice positiva ex x^5 exsurgens tantum manet semper convexus ad axem, alter autem tantum eousque manet talis, donec $x=\left(\frac{8}{15}\right)^2$ fiet, nempe ubi fit

$$\partial^2 y = 2 - \frac{15}{4}\sqrt{x} = 2 - \frac{15}{4}\cdot\frac{8}{15} = 0;$$

ibique inflexio est, nam addito ω positivo utvis parvo, et altera vice subtracto ω e valore dicto ipsius x, erit pro vice prima $\partial^2 y$ negativum et positivum pro altera; nempe

$$2 \mp \frac{15}{4}\cdot\sqrt{\frac{8^2}{15^2}+\omega}$$

negativum et

$$2 \mp \frac{15}{4}\sqrt{\frac{8^2}{15^2}-\omega}$$

Hosted by Google

positivum est; tangens autem non est tum axi parallela, nam

$$\partial y = 2 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{8^2}{15^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

non $= 0$. Fit præterea ordinata adhuc semel 0, nempe tunc esse debet $x^2 + \sqrt{x^5} = 0$, adeoque $x^2 = \sqrt{x^5}$, atque $x^4 = x^5$, quod nonnisi pro $x = 0$, et $x = 1$ fieri potest.

f) Si $y = b + x^2 + \sqrt{x^5}$ ponatur, linea eadem prodibit, cuspide ad distantiam b ab axe exorta, et tangens erit ad distantiam b parallela axi; sed ramus inferior non pro $x = 1$ transibit per axem, verum pro illo x, pro quo fiet $b + x^2 = \sqrt{x^5}$, id est

$$b^2 + 2bx^2 + x^4 = x^5.$$

Ita in superioribus potest 0 ipsi b substitui. (Fig. 48).

g) Si $y = \sqrt{x^2 - x^4}$; oritur pro $x = 0$ punctum multiplum eiusmodi, ad quod non ut in cuspidibus, quæ ipsa quoque puncta multipla sunt, rami tangente communi gaudent, sed tangentes ramorum ex eodem puncto, ubi $x = 0$, diversæ erunt. Nempe pro $x = 0$, item pro $x = 1$ et $x = -1$, est $y = 0$, et pro $x = 1 + \omega$, sive pro $x = -1 + \omega$ (quantumvis exiguum sit ω) valor fit imaginarius; nam

$$(\pm 1 \pm \omega)^2 - (\pm 1 \pm \omega)^2 (\pm 1 \pm \omega)^2$$

est negativum; crescente autem x a 0 usque ad 1 positive, ubique ordinatæ duæ æquales erunt, una positiva supra, altera negativa infra axem; erit autem linea versus abscissam concava; nam est

$$\partial y = (x^2 - x^4)^{\frac{-1}{2}} (x - 2x^3),$$

quod fit $\frac{0}{0}$ pro $x = 0$, disparente factore priore radicali, et altero factore quoque simul in 0 mutato; quomodo valor verus sub imagine ista generali quantitatem quamvis denotante latens reperiatur, de eo statim dicetur aliquid; at hic, modo in casibus similibus usitato, factorem signo radicali subiectum eximendo, valor iste facile reperitur; nempe

Hosted by Google

$$\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

quod pro $x=0$ fit $=1=$ tangenti anguli tangentis (pag. 306), qui idcirco est $=$ dimidio recto, quum ibi tangens æqualis sit radio; atque si pro x ponatur ω quantovis minus, et tendens ad limitem 0, ad dextram positive ad lævam negative, manifesto angulus tangentis, tam pro ramo ad dextram quam ad lævam, $\backsim 1$, itaque duæ erunt tangentes, ad idem punctum ipsi $x=0$ respondentes. Erit porro $\partial\left((x-2x^3)(x^2-x^4)^{-\frac{1}{2}}\right)$, id est

$$\partial^2(x^2-x^4)^{\frac{1}{2}}=\frac{1-6x^2}{\sqrt{x^2-x^4}}-\frac{(x-2x^3)(x-2x^3)}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}\left(1-6x^2-\frac{(x-2x^3)^2}{x^2-x^4}\right).$$

ubi factor posterior reducendo ad denominatorem eundem, et terminos numeratoris denominatorisque per x^2 dividendo, fit

$$\frac{1-x^2-6x^2+6x^4-(1-4x^2+4x^4)}{1-x^2}=\frac{2x^4-3x^2}{1-x^2},$$

quod, quum tantum de $x<1$ quæstio sit, negativum esse facile patet; est nempe tum $x^4<x^2$, adeoque etiam $2x^2>2x^4$, tanto fortius vero superat $-3x^2$ ipsum $2x^4$. Est igitur linea pro ordinatis positivis supra axem versus ipsum concava, et quidem utrinque ab $x=0$, quia x^2, x^4 eadem sunt pro x, sive positivum sive negativum fuerit; pro ordinatis negativis autem erit alter factor (nempe $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}$) quoque negativus, itaque $\partial^2 y$ erit positivum et linea quoad faciem axeos superiorem convexa, seu concava versus inferiorem, uti (pag. 308) dictum est; nempe tota supra axem concipi potest, axe deorsum ita lato, ut punctum aliquod eius ad axem priorem describat perpendicularem $=\frac{1}{\sqrt{2}}$; nam hanc esse ordinatam maximam statim patebit. Referet hinc lineæ istius pars quoad $+1$ realis formam signi ∞; pars imaginaria quoque facile patet, (pag. 202); interest quippe sæpius reale imaginariumque ex eadem expressione sibi invicem respondentia considerare.

Hosted by Google

Est autem linea ab $x=0$ utrinque symmetrice æqualis; quum x^2 et x^4 sint eadem, pro eadem quantitate ipsius x sive positiva sive negativa; atque pro $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ utrinque tangens axi parallela est; nempe pro hoc valore fit

$$\partial y=\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}=0;$$

et substituto $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\pm\omega$ ipsi x in $y=\sqrt{x^2-x^4}$, ordinatam quamvis aliam minorem esse, quam pro $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ patet, nempe tum est

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot$$

Si vero pro parte ex. gr. positiva ipsius x ad dextram considerentur ordinatæ intra $x=+\frac{1}{\sqrt{2}}$, erit

$$x^2-x^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\omega\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\omega\right)^4$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2\omega}{\sqrt{2}}+\omega^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{4\omega}{2\sqrt{2}}+\frac{6\omega^2}{2}-\frac{4\omega^3}{\sqrt{2}}+\omega^4\right)$$

$$=\frac{1}{4}-2\omega^2+\frac{4\omega^3}{\sqrt{2}}-\omega^4,$$

quod minus priore $\frac{1}{4}$ est; nam $2\sqrt{2}.\omega^3-2\omega^2-\omega^4$ negativum est, pro valore ipsius ω minore quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$; nam etsi $\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ponatur, erit $2\sqrt{2}.\omega^3=2\omega^2$, et si valor ipsius ω adhuc minor fractio vera sit, erit $2\omega^2>2\sqrt{2}.\omega^3$. Ita si ultra $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ accipiatur $\frac{1}{\sqrt{2}}+\omega=x$, erit

$$x^2-x^4=\frac{1}{4}-2\omega^2-2\sqrt{2}\,\omega^3-\omega^4,$$

ubi omnes termini præter primum, qui valor ipsius x^2-x^4 pro $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ est, negativi sunt.

h) Ast etiam pro $\partial=\infty$ fieri maximum vel minimum potest. Exemplum superius, $y=b-x^{\frac{2}{3}}$ dat maximum, et $y=b+x^{\frac{2}{3}}$ dat minimum pro

Hosted by Google

$x=0$; nempe y pro quantumvis parvo $\omega=x$ posito, donec $\omega^{\frac{2}{3}}=b$ fiat, ordinatam $b-\omega^{\frac{2}{3}}$ utrinque minorem dat, quam $b-0^{\frac{2}{3}}=b$; postea vero fient ordinatæ utrinque negativæ crescentes in ∞; ita $y=b+(\pm\omega)^{\frac{2}{3}}$ dat pro quantovis ω ordinatam ipso b maiorem.

De quo tamen plura inferius.

i) Punctum isolatum exhibet $y=\sqrt{x^3-x^2}$, pro $x=0$; nempe tum $y=0$, et initium abscissarum solus valor realis erit, usquequo $x=1$ fiat, et tum item $y=0$ punctum in abscissa dabit, unde linea ordinatis crescentibus ramo uno superius alteroque æquali inferius incipiet; ab $x=0$ autem sive negative in infinitum, sive positive usque ad 1 crescat x, valores omnes imaginarii sunt; nam $(\vdash x)^3$ et $-x^2$ utrumque negativum est, $(\vdash\!\!+ x)^3$ autem pro $x<1$ est $<x^2$, adeoque radix e negativo erit. Est autem

$$\partial y=\frac{\frac{1}{2}(3x^2-2x)}{\sqrt{x^3-x^2}},$$

quod item imaginarium est tam pro x negativo quam pro $x<1$; nempe ante et post punctum isolatum incrementa imaginaria sunt. Est autem

$$\partial^2 y=\frac{6x-2}{2\sqrt{x^3-x^2}}-\frac{(3x^2-2x)^2}{4\sqrt{(x^3-x^2)^3}},$$

quod pro $x>1$ aliquamdiu tantum negativum est; nam multiplicando per $4\sqrt{x^3-x^2}$, erit

$$12x-4-\frac{(3x^2-2x)^2}{x^3-x^2}=12x-4-\frac{(3x-2)^2}{x-1}$$

$$=\frac{12x^2-4x-12x+4-(9x^2-12x+4)}{x-1}$$

$$=\frac{3x^2-4x}{x-1},$$

ubi quum $x>1$ sit, $x-1$ positivum est, adeoque tantum de numeratore quæstio est; et facile valor reperitur, usque ad quem crescente x ultra 1, $3x^2-4x$ semper negativum, postea autem semper positivum est;

Hosted by Google

itaque eousque lineæ ramus superior concavus, postea semper convexus erit. Est nempe $3x^2 - 4x = 0$ pro $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$. Dum x positivum et $< \frac{4}{3}$, numerator $x(3x-4)$ semper negativus, pro $x > \frac{4}{3}$ autem semper positivus. Itaque pro $x = \frac{4}{3}$ inflexio est.

k) Sint denique adhuc exempla ad subtangentem finitam. Parabolæ pro parametro p est

$$y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}, \text{ et } \partial y = \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-1}{2}};$$

adeoque subtangens

$$= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-1}{2}} = 2x,$$

quod ad verticem fit 0; et derivatæ ibidem valore infinito reddito, angulus tangentis, tangenti infinitæ respondens, rectus est.

Si $y = a^x$ sit, quod lineam logarithmicam exhibet, in qua abscissæ logarithmi ordinatarum quoad basim a sunt, est (pag. 227)

$$\partial(a^x) = a^x \partial \log.(a^x) = a^x \partial(x \log. a) = a^x \log. a,$$

$\log. a$ quoad e intelligendo (pag. 183), unde

$$s = \frac{a^x}{a^x \log. a} = \frac{1}{\log. a};$$

et subtangens pro quovis x est constans, æqualis modulo systematis, cuius basis a est (pag. 187). Pro $a = e$ fit $\log. a = 1$, et $s = 1$; est etiam tangens anguli, quem tangens cum axe facit $= 1$ pro $x = 0$; nam $e^0 \log. e = 1$, et angulus ipse est dimidius rectus; atque dum x positive tendat ad ∞, tang. anguli tangentis crescit in infinitum, adeoque angulus tendit ad rectum; si vero x negative $\backsim \infty$, tum $e^x \backsim 0$, adeoque tang. anguli tangentis $\backsim 0$ et angulus $\backsim 0$, fitque axis *asymptota*.

Nempe si detur talis recta $\mathfrak{A}$, qua pro axe sumta, dum abscissa crescit in infinitum, ordinata tendit ad 0, adeoque non fit 0 (pag. 35 d citur $\mathfrak{A}$ *asymptota* lineæ generatæ. Sermo hic tantum de asymptota recta in plano est.

Hosted by Google

Posset quoque dici: si inter rectam infinitam $\mathfrak{A}$ et ramum r lineæ cuiuspiam nulla recta cadat, quæ sufficienter producta aut cum neutro quidquam aut nonnisi punctum unum utrique commune habeat; tum $\mathfrak{A}$ dicitur *asymptota* ipsius r, si nihil cum r commune habeat; si vero punctum commune habeat, *tangens* audit.

E definitione priore patet, quod si linea abscissarum et angulus ordinatarum ita accipi queat, ut a certo valore α abscissæ usque ad certum valorem β eundo, ordinata $\backsim \infty$, priusquam abscissa $= \beta$ fieret, pro abscissa $= \beta$ vero fiat ∞, ordinata ista asymptota erit. Nempe et ordinata huic quam proxima secabit curvam. Ex. gr. si $y = \frac{1}{x}$, eundo a valore certo ex. gr. 1 ipsius x usque ad $x = 0$, fit, priusquam $x = 0$ fierit, y omni dabili maius, et pro $x = 0$ fit ∞; et quicunque fuerit angulus ordinatarum, recta e puncto, ubi $x = 0$ est, ordinatis reliquis parallela, asymptota lineæ per æquationem dictam generatæ est.

Sed pro valore ipsius x crescente in infinitum, recta Q infinita ad axem ex initio abscissarum perpendicularis explorandæ asymptotæ inservit: nimirum quævis recta P in eodem plano est aut ipsi Q parallela aut ad certum angulum v secat eam et quidem ad certam distantiam Z ab initio abscissarum, aut supra aut infra axem, aut in axe pro $Z = 0$. Si v rectus sit, ordinatæ ipsius P omnes æquales erunt. Ordinatæ curvæ et rectæ P dicantur y et Y pro eodem abscissæ fine. Si v non sit rectus, P secabit axem ad certum angulum u, qui pro angulo ordinatarum recto ipsum v ad rectum complebit, per v duorum angulorum deinceps positorum minorem intelligendo.

Nisi vero asymptota ad axem perpendicularis sit, quo in casu necesse est, a valore certo ipsius x usque ad certum ordinatam curvæ fieri dato quovis maiorem, talia Z et u quærenda sunt, ut $Y - y$ a certo valore ipsius x incipiendo in infinitum nunquam fiat $= 0$, sed tendat ad 0.

In (Fig. 49) est $s : y = s - x : z$, et hinc, propter $s = \frac{y}{\partial y}$,

$$z = y - x\partial y;$$

erat vero ∂y æquale tangenti illius anguli, ad quem tangens axem secat; et hinc si x ad ∞ tendente $z \backsim Z$ ac $\partial y \backsim \text{tang.}\, u$, erit

Hosted by Google

$$Z-(y-x\,\text{tang.}\,u)\backsim 0.$$

In (Fig. 50) item est

$$K:Z=K+x:Y \quad \text{et} \quad K:Z=1:\text{tang.}\,u\,;$$

atque hinc

$$K=\frac{Z}{\text{tang.}\,u} \quad \text{et} \quad Y=Z+x\,\text{tang.}\,u;$$

unde

$$Y-y=Z+x\,\text{tang.}\,u-y=Z-(y-x\,\text{tang.}\,u),$$

quod ut plane dictum est, tendit ad 0. Consequenter $\mathfrak{A}$ asymptota est.

Exemplo sit hyperbola æquilatera pro axe $=1$, ubi

$$y=(x^2+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\partial y=\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{1+\frac{1}{2x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}},$$

quod $\backsim 1$, dum $x\backsim\infty$; itaque tangens anguli u est 1. adeoque u æquale est dimidio recto, Z autem $=\frac{1}{2}$; nam

$$z=y-x\partial y=(x^2+x)^{\frac{1}{2}}-\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

quod $\backsim\frac{1}{2}$, dum $x\backsim\infty$.

Si igitur tam $z=y-x\partial y$, quam ∂y limite non infinito gaudeant, recta per finem ipsius Z ad angulum, qui ipsum u ad rectum complet, posita asymptota erit. Si $u=0$ sit, manifesto

$$(y-x\partial y)\backsim y=Z,$$

atque tum ex

$$Z-(y-x\,\text{tang.}\,u)\backsim 0,$$

fit

$$Z-y\backsim 0.$$

Si $Z=0$ esset, poterit ordinata quævis constante b augeri, ut $Z=b$ fiat.

Hosted by Google

Si vero $\mathfrak{A}$ asymptota sit, ramus idem nulla alia gaudet. Nam quæcunque alia recta sit, sive parallela ipsi $\mathfrak{A}$ sive non, si ordinatæ huius cum Y et y iisdem abscissæ punctis respondentes Y' dicantur, $Y'-Y$ adeoque $Y'-y$ non tendit ad 0.

Imo demonstrari etiam potest, pro $x \backsim \infty$, asymptotam nonnisi tunc esse, si nec z, nec ∂y tendat ad ∞; uti applicatio ad alios casus, ubi curva versus axem convexa atque et Z infra axem cadit, facile ostenditur; sed ne figuræ multiplicentur, rem attigisse sufficiat.

Ex. gr. In parabola pro parametro $=1$, est

$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ et } \partial y = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

quod $\backsim 0$; atque

$$z = y - x\partial y = \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

quod $\backsim \infty$; itaque tangens ipsam z ad distantiam data quavis maiorem ad angulum recto quam proximum secat, tendens eo ut axi parallela fiat, quod tamen ad distantiam omni dabili maiorem id est in nullo loco determinato fieri potest, ut ibidem asymptotam præbeat.

Exhiberi quidem linea pro quovis finito Z et angulo u potest, cuius ibidem asymptota sit; si nempe $y = Z + x \operatorname{tang.} u + \omega$ sit, per ω functionem ipsius x talem intelligendo, quæ $\backsim 0$, dum $x \backsim \infty$, tunc enim

$$y - x \operatorname{tang.} u = Z + \omega \text{ et } y - x \operatorname{tang.} u \backsim Z,$$

atque tum

$$Y - y = Z + x \operatorname{tang.} u - y = Z - (y - x \operatorname{tang.} u) \backsim 0.$$

Et facile patet, ordinatarum simultanearum lineæ, pro qua $y - x\partial y \backsim \infty$ differentiam non tendere ad 0, ut asymptota eadem gaudeant. Ex. gr. pro casu præsente parabolæ (pro quovis Z)

$$Z + x \operatorname{tang.} u + \omega - x^{\frac{1}{2}} \backsim -\infty$$

VII. Sed per superius (pag. 311) promissum aliquid de valore quoti duarum functionum u et v, dum, pro $x = b$, utraque 0 fit, adiiciendum.

Si pro quovis x sit $vz = u$, atque a certo valore a ipsius x, ante-

Hosted by Google

quam $x = b$ fiat, semper sit $z = \frac{u}{v}$, pro $x = b$ vero u fiat $= 0$ et $v = 0$; valor quoti verus sub forma $\frac{0}{0}$ quantitatem quamvis denotante latens reperitur sic.

Ex $u = vz$ sequitur $\partial u = v\partial z + z\partial v$, quod pro $x = b$ fiet $= z\partial v$, quia tum $v = 0$; atque hinc $z = \partial u : \partial v$, si non sit iterum $\partial u = 0 = \partial v$ pro $x = b$. Si vero utrumque 0 fiat, operatio dicta iterum atque iterum repeti potest.

Ex. gr. Formula summæ seriei geometricæ pro exponente x et numero terminorum μ atque termino primo $= \alpha$, est $(\alpha x^{\mu} - \alpha) : (x - 1)$; quod pro $x = 1$ fit $\frac{0}{0}$, series autem est $\alpha + \alpha + \alpha + ..$; atque est pro $x = 1$

$$\frac{\partial(\alpha x^{\mu} - \alpha)}{\partial(x - 1)} = \frac{\mu\alpha x^{\mu-1}}{1} = \mu\alpha\,,$$

quæ plane summa vera est.

Ita si $z = \frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha - x}$; fit hoc quoque $\frac{0}{0}$ pro $x = \alpha$; at

$$\frac{\partial(\alpha^2 - x^2)}{\partial(\alpha - x)} = \frac{-2x}{-1} = 2\alpha$$

pro $x = \alpha$, qui plane valor verus est; nimirum eousque semper $\alpha + x$ fuit quotus, nempe $(\alpha + x)(\alpha - x) = \alpha^2 - x^2$; et dum $x \backsim \alpha$, quotus $\backsim 2\alpha$; crescente vero postea ipso x, item semper $\alpha + x$ fit quotus in ∞, uti etiam pro $x = \alpha$ est $2\alpha = \alpha + x$.

Sæpe evenit, ut quotus $\frac{u}{v}$ formam $\frac{\infty}{\infty}$ induat pro valore certo ipsius x; atque huius quoque valor reperiatur, reducendo ad formam $\frac{0}{0}$; nempe $\frac{1}{\infty} = 0$.

VIII. Hactenus ordinatæ omnes parallelæ erant; mentio etiam facienda est ordinatarum e puncto exeuntium, pro abscissis aut in recta ut prius acceptis, aut in peripheria radii 1 e puncto ordinatarum communi tanquam centro descripta, ita ut via puncti a certo puncto peripheriæ dictæ pro principio abscissarum posito semper porro moti, sive

Hosted by Google

positive sive negative incipiendo continuandoque motum, determinet abscissam.

Exemplo quoad prius sit parabola (Fig. 49), ubi $y = x^{\frac{1}{2}}$ pro parametro $= 1$. Est

$$k + x : y = 1 : \text{tang.}\, q\,;$$

et hinc

$$k\,\text{tang.}\, q + x\,\text{tang.}\, q = y = x^{\frac{1}{2}},$$

atque

$$x = k^2\,\text{tang.}^2 q + x^2\,\text{tang.}^2 q + 2kx\,\text{tang.}^2 q\,;$$

e quo exprimi x per q et k, atque expressio talis ipsius x in $y = x^{\frac{1}{2}}$ substitui potest, ut y per k et q expressum prodeat; atque hinc etiam ordinata quævis $\mathfrak{ab}$ pro principio abscissarum $\mathfrak{a}$ et angulo q, quum sit $= \sqrt{(k+x)^2 + y^2}$, per k et q exprimi potest, ut in expressione nonnisi q sit variabilis.

Exemplo quoad posterius sit spiralis archimedea, et spiralis logarithmica. In priore est ordinata $y = au$, in posteriore autem $y = a^u$; in utroque certam unitatem ponendam esse e superioribus manifestum est. Prior æquatio eadem, quæ rectæ pro abscissis in recta et ordinatis parallelis est; posterior eadem quæ lineæ logarithmicæ.

Fiet vero $y = au = 0$ pro $u = 0$, et $y = a$ pro $u = 1$, et $y = 2a$ pro $u = 2$ & . . .

Ita $y = a^u$ fiet $= 1$ pro $u = 0$, et $y = a$ fiet pro $u = 1$, atque $y = a^2$ pro $u = 2$ & . . . Pro $u = -1$ autem fiet $y = a^{-1}$, et pro $u = -2$ fiet $y = a^{-2}$. Unde si positivum $a > 1$ sit, $y \backsim \infty$ dum positivum $u \backsim \infty$, at $y \backsim 0$ dum negativum $u \backsim \infty$. Atque si positivum $a < 1$, res inverse est; nempe $y \backsim 0$, dum u positivum $\backsim \infty$, et $y \backsim \infty$, dum u negativum $\backsim \infty$. In utroque casu autem y, dum tendat ad 0, nunquam $= 0$ fiet, adeoque nec unquam in principium ordinatarum, centrumque peripheriæ radii 1, in qua abscissæ u accipiuntur, perveniet, in quantumvis excreverit abscissa u.

Si vero $a = 1$, tum in perpetuum in peripheria radii 1 terminabuntur ordinatæ.

Est autem manifesto $u = \log. y$ (quoad a), si $y = a^u$.

Hæc est illa linea, cuius evolutam ipsi æqualem esse Iac. Bernoulli detegens eam cum inscriptione «*Haec eadem mutata resurgit*» sepulcro

Hosted by Google

suo incidi postulabat, ut quum semper renascatur, resurrectionis vitæque nunquam interituræ spei symbolum esset.

Quomodo vero subtangentes pro talibus curvis et reliqua determinentur, instituti ratio silentio præterire iubet.

IX. Superius (pag. 208) et proxime (pag. 306) mentione *Theorematis Tayloriani* facta, exponendum venit.

1. Si a valore certo α ipsius x usque ad valorem certum β sit pro iisdem finitis $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$

$$F(x+\omega) = A + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \ldots,$$

sive $\omega = 0$, sive tale fuerit, ut evolutio binomialis (pag. 172) in omnibus terminis locum habeat, quod semper est pro $\omega < x$, atque hæc series aut terminata aut convergens sit: erit

$$F(x+\omega) = F(x) + \omega \mathfrak{d} F(x) + \frac{\omega^2}{2} \mathfrak{d}^2 F(x) + \frac{\omega^3}{2.3} \mathfrak{d}^3 F(x) + \ldots$$

Nam terminis per (pag. 172) evolutis, et serie e quovis termino orta verticaliter deorsum scripta, erit:

$$\begin{aligned} F(x+\omega) = A + Bx^b + Cx^c + \ldots \\ + (bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \ldots)\,\omega \\ + \left((b-1)bBx^{b-2} + (c-1)cCx^{c-2} + \ldots\right)\frac{\omega^2}{2} \\ + \left((b-2)(b-1)bBx^{b-3} + (c-2)(c-1)cCx^{c-3} + \ldots\right)\frac{\omega^3}{2.3} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Est autem linea superior $= F(x)$, secunda vero $= \omega \mathfrak{d} F(x)$, tertia $= \frac{\omega^2}{2} \mathfrak{d}^2 F(x)$, quarta $= \frac{\omega^3}{2.3} \mathfrak{d}^3 F(x)$, ... et μta $= \frac{\omega^{\mu-1}}{2.3\ldots(\mu-1)} \mathfrak{d}^{\mu-1} F(x)$.

Nempe etiamsi

$$A + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \ldots$$

series infinita sit, accipiantur termini numero certo m, et quidem tali pro quovis dato N, ut summa terminorum illorum S dicta, sit $F(x+\omega) - S \prec \frac{1}{N}$, atque etiam summa totidem terminorum seriei

$$A + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

s dicta, sit $F(x) - s \prec \frac{1}{N}$. Patet, cuivis termino lineæ horizontalis secundæ adjecto factore communi, ita porro cuiusvis lineæ horizontalis termino cuivis adiecto factore communi ad finem posito, seriem verticalem, cuius primus terminus est Bx^b, esse seriem convergentem (per hypothesim), cuius summa $\backsim B(x+\omega)^b$, ita seriem verticalem, cuius primus terminus est Cx^c esse seriem convergentem, cuius summa $\backsim C(x+\omega)^c$, et ita porro; atque seriei, cuius termini sunt lineæ horizontales, summam

$$\backsim A + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \ldots + M(x+\omega)^m.$$

Sed est etiam

$$bBx^{b-1} = \partial Bx^b \text{ et } cCx^{c-1} = \partial Cx^c,$$

et ita porro usque ad ultimum; atque hinc (pag. 225) est

$$bBx^{b-1} + cCx^{c-1} + \ldots + mMx^{m-1} = \partial(Bx^b + Cx^c + \ldots + Mx^m) = \partial s.$$

Ita in quavis columna quivis terminus deorsum sequens, derivata præcedentis est, et quævis μ-ta linea horizontalis (præter factorem ultimum communem) est, si linea prima non numeretur, $= \partial^\mu s$.

Unde manifesto

$$s + \omega\partial s + \frac{\omega^2}{2}\partial^2 s + \frac{\omega^3}{2.3}\partial^3 s + \ldots \backsim S.$$

Ast etiam ipsi s ubique $F(x)$ substituendo, seriei summa ad limitem eundem tendit, ad quem S, nempe $\backsim F(x+\omega)$. Nam consideratis terminis seriei utriusque simultaneis, quilibet prioris per ei respondentem terminum posterioris divisus tendit ad 1; nempe

Hosted by Google

$$s : F(x) \backsim 1, \quad \partial s : \partial F(x) \backsim 1, \ldots$$

Nam si $\partial s - \partial F(x)$ pro dato quovis N nequeat fieri $\lhd \partial F(x) : N$, sit k minimum tale ut sit

$$\partial s - \partial F(x) \rhd \frac{\partial F(x)}{k};$$

erit

$$\int \partial s - \int \partial F(x) \rhd \int \frac{\partial F(x)}{k},$$

seu

$$s - F(x) \rhd \frac{F(x)}{k},$$

contra hypothesim, quum $s - F(x) \backsim 0$. Pariter patet quod $\partial^2 s : \partial^2 F(x) \backsim 1$, et ita porro. Consequenter quum etiam $\frac{S}{F(x+\omega)} \backsim 1$, sequitur per (pag. 178) etiam:

$$F(x) + \omega \partial F(x) + \frac{\omega^2}{2} \partial^2 F(x) + \frac{\omega^3}{2.3} \partial^3 F(x) + \ldots \backsim F(x+\omega).$$

Valet autem hoc de casu quovis, ubi supposita locum habent; nempe de quavis functione, quæ forma dicta exprimi potest, atque de talibus valoribus ipsorum x et ω, ut dictum est.

2. Interim tamen quæcunque functio $k(x)$ fuerit, serie analoga evolvi poterit; et quidem iuxta ill. LAGRANGE ubicunque subsistere libuerit, valoribus complementi maximo minimoque quasi finibus, inter quos continetur, assignatis. Unde quando complementum tendit ad 0, dum numerus terminorum tendat ad infinitum, series converget, ut (pag. 150). Est nimirum

$$k(x) = k(0) + x\partial k(u) = k(0) + x\partial k(0) + \frac{x^2}{2} \partial^2 k(u) = \ldots$$

$$= k(0) + x\partial k(0) + \frac{x^2}{2} \partial^2 k(0) + \frac{x^3}{2.3} \partial^3 k(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{1.2.3\ldots\nu} \partial^\nu k(u);$$

per $k(0)$ intelligendo id quod fit, si in $k(x)$ ipsi x ubique 0 substituatur, et per $\partial k(0)$ intelligendo hic non derivatam ipsius $k(0)$, sed id quod fit, si in $\partial k(x)$ ipsi x ubique 0 substituatur, (quod etiam ad ambiguitatem tol-

Hosted by Google

lendam stellula præposita distingui posset), per u vero intelligitur quantitas quæpiam a 0 usque ad x inclusive.

Nam poni potest

$$k(x) = k\big((x - xz) + xz\big) = k(x - xz) + xP,$$

ubi

$$P = \frac{k(x) - k(x - xz)}{x};$$

est vero manifesto $P = 0$ pro $z = 0$, quia tum fit $k(x - xz) = k(x)$.

Ita poni potest

$$k(x) = k\big((x - xz) + xz\big) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + x^2 Q;$$

nam dici potest

$$Q = \frac{k(x) - k(x - xz) - xz\partial k(x - xz)}{x^2};$$

quod continuari posse patet, ut prodeant R, S, T, ... cum derivatis ipsius $k(x - xz)$ ac potentiis ipsius xz altioribus. Est autem etiam $Q = 0$ pro $z = 0$, nam ut prius expressio tunc ad $k(x)$ redigitur; idem de R, S, ... patet.

Hinc si $k(x)$ constans ponatur, et derivatæ utrinque quoad z accipiantur, erit

$$0 = -x\partial k(x - xz) + x\partial k(x - xz) - x^2 z\partial^2 k(x - xz) + x^2\partial Q,$$

idest

$$0 = -x^2 z\partial^2 k(x - xz) + x^2\partial Q,$$

adeoque

$$\partial Q = z\partial^2 k(x - xz)$$

et

$$k(x) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + x^2 \int z\partial^2 k(x - xz).$$

Ita poni potest

$$k(x) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + \frac{x^2 z^2}{2}\partial^2 k(x - xz) + \frac{x^3 z^3}{2 \cdot 3}\partial k(x - xz) + \ldots$$

$$+ \frac{x^{p-1} z^{p-1}}{2 \cdot 3 \ldots p - 1}\partial^{p-1} k(x - xz) + \frac{x^p z^p}{2 \cdot 3 \ldots p}\partial^p k(x - xz) + x^{p+1} T;$$

Hosted by Google

nam subtrahendo terminos ad dextram omnes præter ultimum, et dividendo per x^{p+1}, quotus T dici potest ut antea, quod item manifesto $=0$ pro $z=0$ fieri debet, summa ceterorum terminorum ad $k(x)$ reducta.

Accipiendo autem derivatam utrinque quoad z, fiet

$$0 = -x\partial k(x-xz) + x\partial k(x-xz) - x^2z\partial^2 k(x-xz) + \frac{2x^2z}{2}\partial^2 k(x-xz) - \ldots$$
$$-\frac{x^p z^{p-1}}{2.3\ldots p-1}\partial^p k(x-xz) + \frac{px^p z^{p-1}}{2.3\ldots p}\partial^p k(x-xz)$$
$$-\frac{x^{p+1}z^p}{2.3\ldots p}\partial^{p+1}k(x-xz) + x^{p+1}\partial T,$$

ubi quum primum par terminorum, ita secundum et quotumvis $=0$ sit, fiet

$$\partial T = \frac{z^p}{2.3\ldots p}\partial^{p+1}k(x-xz),$$

adeoque

$$T = \int\frac{z^p\partial^{p+1}k(x-xz)}{2.3\ldots p};$$

nempe post terminum $x^p z^p \partial^p k(x-xz) : 2.3\ldots p$ complementum est:

$$\frac{x^{p+1}}{2.3\ldots p}\int x^p\partial^{p+1}k(x-xz).$$

Si iam valor ipsius z accipiatur nonnisi a 0 usque ad 1 inclusive, et dicatur M_{p+1} valor ipsius $\partial^{p+1}k(x-xz)$ maximus sensu algebraico (uti pag. 31, ubi $0>-1$), et minimus valor eius dicatur N_{p+1}: tum pro nullo valorum dictorum ipsius z est

$$\int z^p N_{p+1} > \int z^p\partial^{p+1}k(x-xz) > \int z^p M_{p+1}.$$

Sed M_{p+1} et N_{p+1} constantes sunt, adeoque

$$\int z^p M_{p+1} = \frac{z^{p+1}}{p+1}M_{p+1} \text{ et } \int z^p N_{p+1} = \frac{z^{p+1}}{p+1}N_{p+1}.$$

Consequenter complementum nempe $x^{p+1}\,T$ pro $z=1$ non est

Hosted by Google

$> x^{p+1} M_{p+1} : 1.2.3 \ldots p(p+1)$ et non $< x^{p+1} N_{p+1} : 1.2.3 \ldots p(p+1)$, nempe tum $z^{p+1} = 1$.

At si u quantitatem quamlibet denotet a 0 usque ad x; quum $x - xz = x(1-z)$, pro valore ipsius z a 0 usque ad 1 accepto, manifesto per u valor quivis ipsius $x - xz$ denotari potest; itaque sub $\partial^{p+1} k(u)$ continentur omnes valores ipsius $\partial^{p+1} k(x - xz)$, adeoque etiam M_{p+1} et N_{p+1}.

Poterit igitur complementum per $x^{p+1} \partial^{p+1} k(u)$ exprimi, ita ut si maximus minimusque valor huius quæratur, complementum inter hos contineri pro quovis z, adeoque et pro $z = 1$ constet. Sed pro $z = 1$ fit $x - xz = 0$ et $k(x - xz) = k(0)$ atque $\partial k(x - xz) = \partial k(0)$.

Consequenter

$$k(x) = k(0) + x\partial k(0) + \frac{x^2}{2}\partial^2 k(0) + \ldots + \frac{x^p \partial^p k(0)}{2.3\ldots p} + \frac{x^{p+1}\partial^{p+1} k(u)}{2.3\ldots p(p+1)}.$$

Ex. gr. Sit $k(x) = (a+x)^\mu$; erit

$$(a+x)^\mu = a^\mu + \mu a^{\mu+1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a^{\mu-2} x^2 + \ldots + \frac{x^\nu \partial^\nu k(u)}{2.3\ldots\nu};$$

nam

$$\partial k(x) = \mu(a+x)^{\mu-1},\ \partial^2 k(x) = \mu(\mu-1)(a+x)^{\mu-2}, \ldots$$

adeoque

$$x\partial k(0) = x\mu a^{\mu-1},\ \frac{x^2}{2}\partial^2 k(0) = \frac{x^2}{2}\mu(\mu-1)a^{\mu-2}, \ldots$$

Complementum $x^\nu \partial^\nu k(u) : 2.3\ldots\nu$ autem est

$$\frac{x^\nu \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu}(a+u)^{\mu-\nu},$$

cuius valores omnes prodibunt, si ipsi u valores a 0 usque ad x substituantur; eritque manifesto valor verus inter

$$\frac{x^\nu \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu} a^{\mu-\nu} \text{ et } \frac{x^\nu \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu}(a+x)^{\mu-\nu}.$$

Hosted by Google

3. Hinc substituendo e superiore $F(x+\omega)$, k ipsi F, et x ipsi 0 atque ω ipsi x: prodibit formula eadem pro $k(\omega)=F(x+\omega)$, quæ prius; nempe

$$k(\omega)=F(x+\omega)=k(0)+\omega\vartheta k(0)+\frac{\omega^2}{2}\vartheta^2 k(0)+\ldots+\frac{\omega^\nu}{2.3\ldots\nu}\vartheta^\nu k(u)$$

$$=F(x)+\omega\vartheta F(x)+\frac{\omega^2}{2}\vartheta^2 F(x)+\ldots+\frac{\omega^\nu}{2.3\ldots\nu}\vartheta^\nu F(x+u),$$

per u quantitatem quampiam a 0 usque ad ω intelligendo, ubi terminus ultimus complementum est, quod si $\backsim 0$, series convergens est, alioquin etiam maximum minimumque valorem, inter quos verus continetur, exhibens.

4. Quod complementum dictum in exemplo prius allato pro $x \lessdot a$ semper tendit ad 0, excepto si μ integer sit, quo in casu fit post aliquem terminum semper $=0$, e superiore (pag. 172) patet; attamen quoad alios casus necesse est de valore facti e factoribus, quorum numerus crescit ad infinitum, uti hic $\frac{\mu}{1}.\frac{\mu}{2}\ldots\frac{\mu-\nu+1}{\nu}$, aliquid dicere.

Sint factores A, B, C, ...; erit (pag. 163)

$$A.B.C\ldots=e^{\log.A+\log.B+\log.C+\ldots}.$$

Itaque si

$$\log.A+\log.B+\log.C+\ldots\backsim\alpha,$$

tum $ABC\ldots\backsim e^\alpha$; adeoque si $\alpha=0$, tum $ABC\ldots\backsim 1$; si $\alpha=+\infty$, tum $ABC\ldots\backsim\infty$; si $\alpha=-\infty$, tum $ABC\ldots\backsim 0$, nam 1 divisum per e, elevatum ad quantitatem positivam in omni dabili maius crescentem, tendit ad 0.

Distinguantur factores hi, qui singuli certo finito eodem minores sint, nec ullus $=0$ sit, et omnes positive accipiantur, in duas species: primo in tales, quorum quivis $\lessdot 1$, secundo in tales quorum quivis $\gtrdot 1$; nempe factores quotvis unitati æquales non mutant factum.

Lege factorum data, poterunt plures in unum mutari, et si præter numerum certum factorum reliquorum factores, quorum numerus dabili quovis maior est, ad primam speciem pertineant: erit, si innumerabiles

Hosted by Google

eiusmodi factores inter eos dentur, quorum quivis certa eadem fractione vera minor est, factum ex iis $\backsim 0$, adeoque etiam factum ex his et ceteris, qui numero finito sunt, $\backsim 0$.

Si factores ii, quorum numerus dabili quovis maior est, ad secundam speciem pertineant: tum si inter eos innumerabiles dentur tales, quorum quivis $> 1 + \beta$, per β quantitatem positivam, etsi $\lessdot 1$ sit, intelligendo eandem pro omnibus, erit factum $\backsim \infty$.

At si solummodo tales factores primæ speciei innumerabiles sint, quorum quivis est $> \frac{1}{3}$, atque ab aliquo a eorundem incipiendo sequentes $b, c, \ldots$ crescant tendendo ad limitem 1, erit ipsorum $a', b', \ldots$ quilibet positivum et $< \frac{2}{3}$, si $1 - a$ dicatur a', $1 - b$ dicatur b' &c.

Est autem (pag. 184)

$$\log. a = \log.\big(1 - (1 - a)\big) = \log.(1 - a') = -a' - \frac{a'^2}{2} - \frac{a'^3}{3} - \ldots,$$

ita

$$\log. b = -b' - \frac{b'^2}{2} - \frac{b'^3}{3} - \ldots,$$

atque primus terminus cuiusvis harum serierum est maior summa sequentium; nam

$$\frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} + \ldots < \frac{a'^2}{2(1 - a')},$$

quia exponens seriei primus est $\frac{2a'}{3}$, sequens est $\frac{3a'}{4}$ et ita porro; est nempe ubivis exponens $< a'$, adeoque summa seriei vera minor, quam si exponens ubique a' esset. Est autem $a' > a'^2 : 2(1 - a')$, quum a' positivum et $< \frac{2}{3}$ sit; nam dividendo per a', est

$$1 > \frac{a'}{2(1 - a')},$$

et substituendo $\frac{2 - \omega}{3}$ ipsi a', pro ω positivo et < 2 est

$$1 > \frac{2 - \omega}{3} : \frac{2(3 - 2 + \omega)}{3}; \text{ nempe } 1 > \frac{2 - \omega}{2 + 2\omega}.$$

Hosted by Google

Unde quum termini omnes negativi sint, nonnisi de $a'+b'+c'+\ldots$ quæstio fit, atque si hoc tendit ad infinitum, tum $ABC\ldots abc\ldots \backsim e^{-\infty}$ adeoque $\backsim 0$; si vero $a'+b'+c'+\ldots \backsim \alpha$ finitum quoddam, $abc\ldots \backsim e^{-\alpha}$, et $ABC\ldots abc\ldots \backsim Pe^{-\alpha}$ finitum quoddam, si factum e reliquis factoribus, quorum numerus certus est, P dicatur; signum facti autem e signis factorum liquet.

Si vero factores innumerabiles speciei secundæ sint, quorum quilibet est $< 1+\frac{2}{3}$, atque a certo a, eorum incipiendo sequentes $b, c, \ldots$ decrescendo tendunt ad limitem 1, et $a-1$ dicatur a', $b-1$ dicatur b' &c.: erit

$$\log. a = \log.\big(1+(a-1)\big) = \log.(1+a')$$

$$= a' - \frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} - \ldots,$$

ita

$$\log. b = b' - \frac{b'^2}{2} + \frac{b'^3}{3} - \ldots;$$

eritque ut prius et hic cuiusvis seriei primus maior quam summa sequentium, etsi omnes positivi essent; est autem $a'+b'+\ldots$ positivum, atque si $a'+b'+\ldots \backsim \alpha$, tum pro α finito, $abc\ldots$ tendit ad e elevatum ad positivum aliquod; nam etsi omnes sequentes termini negativi essent, summa eorum ab $a'+b'+c'+\ldots$ superaretur. Si vero $a'+b'+c'+\ldots \backsim \infty$, tum $abc\ldots$ quoque fit omni dabili maius; nam terminus secundus seriei logarithmum ipsius a exprimentis est maior summa sequentium negativorum; et idem terminus est minor, quam tertia pars prioris.

Nempe $a'^4 : 4(1-a'^2)$ est maius summa negativorum post $\frac{a'^3}{3}$ sequentium. Nam per a'^2 dividendo est

$$\frac{1}{2} > \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2} : \left(1 - \frac{(2-\omega)^2}{3^2}\right),$$

quia hoc est

$$= \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2 - 4(2-\omega)^2},$$

ubi numerator est < 4 et denominator > 20. Idem de b et reliquis patet. Porro quum

Hosted by Google

$$a' < \frac{2}{3},\quad b' < \frac{2}{3}, \ldots$$

est

$$\frac{a'^2}{2} < \frac{2a'}{3.2},\quad \frac{b'^2}{2} < \frac{2b'}{3.2}, \ldots;$$

itaque

$$\frac{a'^2}{2} + \frac{b'^2}{2} + \frac{c'^2}{2} + \ldots < \frac{2}{3.2}(a' + b' + c' + \ldots)$$

Unde quum summa omnis negativi sit

$$< a'^2 + b'^2 + c'^2 + \ldots,$$

et hoc sit

$$< \frac{2}{3}(a' + b' + c' + \ldots),$$

manebit additis seriebus omnibus maius positivum quam $\frac{1}{3}(a'+b'+c'+\ldots)$.

Consequenter, si $a'+b'+c'+\ldots \backsim \infty$, etiam $abc\ldots \backsim \infty$, adeoque et $ABC\ldots abc \backsim \infty$.

5. Applicando hoc ad theorema binomiale (pag. 122) posito $a = 1$ erit

$$k(x) = (1+x)^\mu = k(0) + x\partial k(0) + \frac{x^2}{2}\partial^2 k(0) \ldots + \frac{x^\nu}{2.3\ldots\nu}\partial^\nu k(u)$$

$$= 1 + x\mu + x^2\mu\frac{(\mu-1)}{2} + \ldots + x^\nu\mu\frac{(\mu-1)}{2}.\frac{\mu-2}{3}\ldots\frac{\mu-\nu+1}{\nu}(1+u)^{\mu-\nu},$$

et ultimus terminus complementum est; nempe in nullis terminis potentiæ ipsius 1 sunt adscriptæ, quamvis proprie $\partial k(x)$ fuisset $\mu(1+x)^{\mu-1}$ adeoque $\partial k(0) = \mu(1+0)^{\mu-1}$. Erit autem complementum istud pro quovis μ sive positivo sive negativo, si $x < 1$ fuerit, semper tendens ad 0, si $\nu \backsim \infty$, uti superius demonstratum est; at applicetur ad $x = \pm 1$, unde applicatio ad alios casus patet.

Sit μ negativum et > 1: erit coëfficientis $(p+1)$-ti formula

$$\frac{\mu'}{1}.\frac{\mu'+1}{2}\,\frac{\mu'+2}{3}\ldots\frac{\mu'+p-1}{p},$$

si factores positive accipiantur et $\mu' = -\mu$ sit, ubi factor quilibet > 1 est, nam $\mu' > 1$, at

Hosted by Google

$$\frac{\mu'+p-1}{p}-1=\frac{\mu'-1}{p}\backsim 0$$

Sit $(\mu'+p-1):p$, id quod a dictum erat, erit

$$b=\frac{\mu'+p}{p+1} \text{ et } c=\frac{\mu'+p+1}{p+2}, \ldots$$

atque

$$a'=\frac{\mu'-1}{p},\ b'=\frac{\mu'-1}{p+1},\ c'=\frac{\mu'-1}{p+2}, \ldots$$

atque

$$a'+b'+c'+\ldots=(\mu'-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+3}+\ldots\right),$$

quod $\backsim\infty$, quum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\backsim\infty$. (pag. 175).

Itaque quum potentia ipsius x in hoc casu neque augeat neque minuat, complementum continebitur inter quantitatem omni dabili maiorem per $(1+0)^{\mu-\nu}=1$ multiplicatam, atque eandem per $(1+1)^{\mu-\nu}$, quod omni dabili minus fieri potest, multiplicatam.

Aliud est, si $x<1$ sit, tunc enim (pag. 165) p ita accipi potest, ut quum totidem factores x sint, $\frac{x(\mu'+p-1)}{p}<1$ sit; atque postea [illegible] et factor certa eadem fractione vera minor maneat. Nempe pro μ negativo est formula p-ti factoris positive accepti

$$\frac{x(\mu'-1+p)}{p}=\frac{x(\mu'-1)}{p}+x,$$

ubi patet, quod $x(\mu'-1):p$ decrescat crescente p (sive $\mu'>1$ sive $\mu'<1$ sit) et tendit ad 0, si $p\backsim\infty$; unde factor $\backsim x$. Est autem $\mu'-1$ positivum pro $\mu'>1$, adeoque factor decrescit, tendendo ad limitem x. Si itaque fractio vera

$$f=x+\lambda \text{ et } \frac{x(\mu'-1)}{p}<\lambda$$

fiat, erit in posterum quivis factor $<f$, consequenter factum tendet ad 0.

Hosted by Google

6. At pro $x=1$, si μ' (denotans oppositum ipsius μ) sit <1, erit formula p-ti factoris

$$\frac{\mu'-1+p}{p}=1+\frac{\mu'-1}{p},$$

ubi $(\mu'-1):p \backsim 0$, dum $p \backsim \infty$, adeoque factor $\backsim 1$, sed est semper <1, quia $\mu'-1$ negativum est, fit autem $(\mu'-1):p$ crescente p minus adeoque factor maior; et erit pro hoc casu superius

$$a'+b'+c'+\ldots=\frac{1-\mu'}{p}+\frac{1-\mu'}{p+1}+\frac{1-\mu'}{p+2}+\ldots$$
$$=(1-\mu')\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots\right),$$

quod $\backsim \infty$; consequenter pro hoc casu factum $\backsim 0$. (pag. 329).

Itaque complementum seriei ipsius $(1+1)^{\mu}$ lege binomiali evolutæ continebitur inter factum dictum, quantitatem quæ omni dabili minor reddi potest, per $(1+1)^{\mu-n}$, quæ item dabili quovis minor fit, multiplicatum, et idem factum dictum per $(1+0)$ multiplicatum.

Idem patet de μ positivo, sive >1 sive $=1$ sive <1 sit; nempe formula factoris p-ti est

$$\frac{\mu+1-p}{p}-=\frac{\mu+1}{p}-1,$$

quod positive accipiendo fit $1-\frac{\mu+1}{p}$; et factum ut prius $\backsim 0$.

7. Quod vero series ipsius $(1+1)^{e}$ pro e negativo et $\not>1$ divergat, subsidio criterii recentius ab Oliviero detecti, nuper mihi communicati, facile patet. Nempe si u_n sit terminus generalis seriei, cuius omnes termini positivi vel omnes negativi sint, atque non sit $n \,.\, u_n \backsim 0$, series divergit.

Construatur series accipiendo summas parium oppositorum se invicem excipientium; nempe in $(1+1)^{e}$ pro e negativo evolutæ, erit terminus primus 1, sequens erit negativus, et tum positivus, item negativus, positivus &c,

Hosted by Google

summa primi negativi et sequentis positivi, ac summa sequentis negativi et positivi, et ita porro dabunt seriem, cuius terminus quivis $\frac{n+2}{2}$-tus exprimi per

$$\frac{(e+1)\ e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)(n+2)}$$

poterit; nam duo termini proximi per

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)} \text{ et } \frac{e(e-1)\ldots(e-n)\ (e-n-1)}{2.3\ldots(n+1)\ (n+2)}$$

exprimi possunt; et horum summa est

$$=\frac{e(e-1)\ldots(e-n)(n+2+e-n-1)}{2.3\ldots(n+1)\ (n+2)}=\frac{e(e-1)\ldots(e-n)\ (e+1)}{2.3\ldots(n+1)\ (n+2)};$$

erit autem terminus iste novæ seriei $\frac{n+2}{2}$-tus; et substituendo $\frac{n+2}{2}$ ipsi n in $n.u_n$ et valorem dictum ipsius u_n, erit

$$\frac{(e+1)\ (n+2)\ e(e-1)\ldots(e-n)}{2\ (n+2)\ 2.3\ldots(n+1)}=n.u_n;$$

quod $\backsim\infty$, quia $\frac{(e+1)}{2}$ est constans, $\frac{n+2}{n+2}=1$, et (pag. 331)

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)}\backsim\infty.$$

Nempe duobus terminis proximis constructis, fit exponens seriei $\frac{(e-n-1)\ (e-n-2)}{(n+3)\ (n+4)}$, qui pro e negativo et $\lessdot 2$ erit $\lessdot 1$, adeoque termini decrescent. Pro $e=-2$ autem est constans, et pro e negativo et $\gtrdot 2$ fit $\gtrdot 1$, et termini crescent.

Consequenter $(1+1)^e$ serie binomiali rite exprimitur, excepto si e negativum et non $\lessdot 1$ sit, quo in casu non aliter, nisi complemento addito valet. Nimirum

8. Si $e=-1$ fuerit: erit $(1+1)^{-1}=\frac{1}{2}$, fietque quilibet factor p-tus

$$=\frac{-1-p+1}{p}=-1;$$

Hosted by Google

atque complementum continetur inter

$$\pm 1 . (1+0)^{-1-n} = \pm 1 \text{ et } \pm 1 . (1+1)^{-1-n} = \frac{\pm 1}{2^{1+n}},$$

quod tendit ad 0; nempe

$$(1+1)^{-1} = 1 - 1 + c_1,$$

ubi complementum c_1 inter $1 . (1+0)^{-1-2}$ et $1 . (1+1)^{-3}$, nempe inter 1 et $1 : 2^3$ contentum est; ita

$$(1+1)^{-1} = 1 - 1 + 1 + c_2,$$

ubi complementum c_2 inter -1 et $-1 : 2^4$ contentum esse patet. Quod igitur nullius valoris est.

9. Superius (pag. 243) in $(1+z^2)^{-1}$ ponendum est $z \lhd 1$; si ex. gr. $z = 1 - \omega$, pro ω positivo utvis parvo valebit formula, atque integrale erit

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots;$$

at si $\omega \backsim 0$

$$\frac{(1-\omega)^3}{1} \backsim 1, \quad \frac{(1-\omega)^5}{1} \backsim 1, \ldots;$$

consequenter dum $\omega \backsim 0$, adeoque $z \backsim 1$, tum

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

atque

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

simul cum arcu ipsi z ibidem respondenti ad limitem communem tendunt.

Nempe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right),$$

et seriei parenthesi inclusæ terminus n-tus per

Hosted by Google

$$\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$$

exprimi potest; nimirum quivis denominator est factum e duobus imparibus, quorum prior est numerus impar $(2n-1)$-tus, cuius valor est $4n-3$. Seriem dictam convergentem esse, supra (pag. 244 et 341) demonstratum est.

10. Quod $(1-1)^e$ attinet, non pro e positivo solum valet formula binomialis, sed certo sensu etiam pro e negativo valet, sive pro $e'=-e$ posito $e'<1$, sive $e'=1$, sive $e'>1$ sit; nempe pro e negativo est

$$(1-1)^e = \frac{1}{0^{e'}}$$

quod $=\infty$; nempe pro x positivo, $\frac{1}{(1-x)^{e'}} \backsim \infty$ dum $x \backsim 1$; fietque etiam $(1-1)^e$ serie binomiali expressum omni dabili maius, ut statim patebit.

Est nimirum pro e positivo

$$(1-1)^e = 0^e = 0 = 1 - e + \frac{e(e-1)}{2} - \ldots + \frac{e(e-1)\ldots(e-n+1)}{2.3\ldots n} + c,$$

complemento c contento inter

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)}(1+0)^{e-n}$$

et

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)}(1-1)^{e-n},$$

adeoque inter quantitatem, quæ quovis dabili minor fit, atque eandem per ∞ multiplicatam. Atque huius complementi fines, inter quos continetur, semper amplius removentur, quamvis series convergat, et complementum tendat ad 0; interim tamen complementum inter fines illos continetur hic quoque, etsi ad illud æstimandum nihil valeat, possitque aliter facile æstimari.

Quod autem $(1-1)^e$ per seriem binomialem rite exprimatur pro e

Hosted by Google

positivo, patet sic: $(1-x)^e$ pro $x<1$ rite exprimitur; si $x \backsim 1$, tum et $x^2 \backsim 1$, $x^3 \backsim 1, \ldots$; itaque et

$$\frac{-ex}{-e} \backsim 1, \quad \frac{e(e-1)x^2}{2} : \frac{e(e-1}{2} \backsim 1,$$

atque quivis terminus seriei ipsius $(1-x)^e$ per ei respondentem terminum seriei ipsius $(1-1)^e$ divisus $\backsim 1$; si igitur demonstretur seriem ipsius $(1-1)^e$ convergere, constabit per (pag. 172) seriem ipsius $(1-x)^e$ et seriem ipsius $(1-1)^e$ ad limitem eundem tendere, dum $x \backsim 1$; nempe series ipsius $(1-1)^e \backsim 0$, quia $(1-x)^e \backsim 0$, dum $x \backsim 1$. Convergit autem series ipsius $(1-1)^e$, ut ex additamentis patebit.

Pro e negativo etsi $\lessdot 1$ est $\frac{e-1}{1} \gtrdot 1$, atque hinc $\frac{e-n}{n} \gtrdot 1$; suntque termini seriei ipsius $(1-1)^e$ omnes positivi, et factum nu_n non tendit ad 0 Itaque series divergit, et summa $\backsim \infty$, uti debet; nempe $(1-1)^{\frac{-3}{2}} = 1 : 0^{\frac{3}{2}} = \infty$. Complementum per formulam autem est inter omni dabili maius, et idem per $\frac{1}{0^{n-e}}$ multiplicatum.

Ex. gr.

$$(1-1)^{-1} = 1+1+1+1+\ldots$$
$$(1-1)^{-2} = 1+2+3+4+\ldots$$
$$(1-1)^{-3} = 1+3+6+10+\ldots$$
$$(1-1)^{-4} = 1+4+10+20+\ldots$$

Quod continuando, pro $(1-1)^{-m}$ arithmetica series $(m-1)$-ti ordinis (pag. 153) prodibit, $1+1+1+\ldots$ serie 0-ti ordinis dicta: nempe ex $(1-1)^{-2}$ prodit series primi ordinis, et de quovis exponente $-m$ ad uno altiorem concludere licet, multiplicando $(1-x)^{-m}$ per $(1-x)^{-1}$, x scribendo pro 1. Prodeant nimirum ex $(1-x)^{-m}$ termini

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots$$

et ex $(1-x)^{-1}$ totidem termini

$$1+x+x^2+x^3+\ldots;$$

Hosted by Google

et patet in facto coëfficientem ipsius x esse $1+A$, ipsius x^2 autem $1+A+B$, et $1+A+B+C$ ipsius x^3 &c. Hinc $n$tus terminus seriei ordinis $m$ti exprimitur.

11. Sit adhuc unum exemplum pro facto e factoribus innumerabilibus. Sint

$$1 \pm \frac{1}{2},\ 1 \pm \frac{1}{4},\ 1 \pm \frac{1}{8} \ldots,$$

Pro signo superiore erit

$$a' + b' + c' + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

pro signo — prodit idem; utrumque $\backsim 1$; itaque factum utrumque tendit ad limitem certum finitum non 0, et prius ad maius, posterius ad minus unitate (pag. 329).

12. Ut vero dignosci possit, ad qualemnam tendat limitem $a'+b'+c'+\ldots$; partim comparantur termini cum terminis seriei, de qua iam constat ad quem limitem tendat, ut etiam (pag. 331) factum est; partim alia etiam præter superius dicta criteria serierum convergentium divergentiumque dantur; quæ quamvis nosse maxime intersit, brevitas necessaria nonnisi supra laudatum OLIVIERianum, prouti mihi nuper communicatum est, (vix præter signa mutatum) addere permittit.

De serie tali sermo est, cuius termini omnes simul positivi aut simul negativi sunt atque termini semper porro minores fiunt. Designentur termini per $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{2r}$, nempe terminus $n$tus per u_n; atque $u_{r+1}+u_{r+2}+\ldots+u_{2r}$ dicatur R. Si series convergens fuerit, manifesto $R \backsim 0$, dum $r \backsim \infty$. Est autem $u_{2r} \lessdot$ quovis præcedentium, adeoque et quovis ad lævam usque ad u_r inclusive et $u_r \gtrdot$ quovis sequentium (per hyp.), adeoque et quovis abinde ad dextram usque ad u_{2r} inclusive; atque hinc

$$r \,.\, u_{2r} \lessdot R \lessdot r \,.\, u_r,$$

nempe R est summa r terminorum ab u_r usque ad u_{2r}.

Hosted by Google

Unde quum si series convergat adeoque $R \backsim 0$, atque $2R \backsim 0$; tum et $2r . u_{2r}$, quod $< 2R$ est, $\backsim 0$; consequenter n ponendo pro $2r$ erit $n . u_n \backsim 0$.

Ex. gr. series

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \backsim \infty;$$

nam $n \frac{1}{n}$ non $\backsim 0$; nempe terminus $n$tus u_n est $\frac{1}{n}$, et $n . u_n = 1$.

Criterium convergentiæ vero, nec

$$n u_n \backsim 0$$

nec ab auctore celebri allatum

$$\frac{u_n \; u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} \backsim 0$$

generale est; nam series, cuius terminus generalis $\frac{1}{n \log. n}$ est, contra utrumque divergit, ut infra patebit.

13. Sit denique adhuc exemplum ad (pag. 327).

Denotet arctg. T arcum tangentis T, id est arcum, cuius tangens T est; ita arctg. $(T+q)$ significet arcum, cuius tangens $T+q$ est, atque $k(q)$ denotet idem quod arctg. $(T+q)$ significabat. Erit

$$k(q) = k(0) + q \partial k(0) + \frac{q^2}{2} \partial^2 k(0) + \ldots + \frac{q^{\nu-1}}{2.3 \ldots (\nu-1)} \partial^{\nu-1} k(0) + \frac{q^\nu}{2.3 \ldots \nu} \partial k(u),$$

ubi u quantitatem quampiam a 0 usque q denotat, et

$$k(0) = \text{arctg.}(T+0) = \text{arctg. } T,$$

$\partial k(0)$ autem significat id quod fit, si in derivata ipsius $k(q)$ id est in ∂ arctg. $(T+q)$ pro q ubique 0 ponatur, quod $= \partial$ arctg. T, si pro T variabili posita acciperetur derivata; eritque complementum inter

$$\frac{q^\nu}{2.3 \ldots \nu} \partial^\nu \text{arctg.}(T+q) \quad \text{et} \quad \frac{q^\nu}{2.3 \ldots \nu} \partial^\nu \text{arctg. } T.$$

Hosted by Google

Sit x arcus tangentis T et $x+z$ æquale quadranti, accipianturque derivatæ quoad tang. x, idest cotg. z. Dividatur quivis arcus, de quo sermo erit nempe, x, z ita μz per n, denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$ et $\frac{z}{n}$ per $\dot{z}$, adeoque $\frac{\mu z}{n}$ per $\mu\dot{z}$.

Erit

$$k(0) = x,\ \partial k(0) = \partial x,\ \partial^2 k(0) = \partial^2 x,\ \ldots;$$

atque ∂x quoad cotg. $z = \sin^2 z$, nempe (pag. 254) est

$$\partial x = \cos^2 x\, \partial \operatorname{tang.} x = \sin^2 z\, \partial \operatorname{cot.} z,$$

quia

$$\cos. x = \sin z \text{ et } \operatorname{tang.} x = \operatorname{cot.} z;$$

$\partial^2 x$ autem $= 2 \sin. z\, \partial \sin. z$, quoad cot. z intelligendo utrumque.

Est autem (pag. 286) quoad cotg. z

$$\partial \sin. z = -\cos. z \sin^2 z,$$

ita quoad cotg. μz

$$\partial \sin. \mu z = -\cos. \mu z \sin^2 \mu z,$$

et quoad cotg. z erit

$$\partial \sin. \mu z = -\mu \cos. \mu z \sin^2 z;$$

nam

$$\partial \sin. \mu z = -\cos. \mu z \sin^2 \mu z\, \partial \operatorname{cotg.} \mu z,$$

sed (pag. 285)

$$\partial \operatorname{cotg.} \mu z = \frac{-\mu\dot{z}}{\sin^2 \mu z} \text{ et } \partial \operatorname{cotg.} z = -\frac{\dot{z}}{\sin^2 z}$$

adeoque

$$\dot{z} \doteq -\sin^2 z\, \partial \operatorname{cotg.} z;$$

itaque per (pag. 224) substituendo $-\mu\dot{z} : \sin^2 \mu z$ ipsi $\partial \operatorname{cotg.} \mu z$ et tum $-\sin^2 z\, \partial \operatorname{cotg.} z$ ipsi $\dot{z}$ erit

$$-\cos. \mu z \sin^2 \mu z\, \partial \operatorname{cotg.} \mu z \doteq \mu\dot{z} \cos. \mu z \doteq -\mu \cos. \mu z \sin^2 z\, \partial \operatorname{cotg.} z;$$

consequenter est

$$\partial \sin. \mu z_{\text{(quoad cotg. } z)} = -\mu \cos. \mu z \sin^2 z.$$

Unde iam derivatæ ipsius x quoad cotg. z facile reperiuntur. Nempe

Hosted by Google

$$\mathfrak{d}x = \sin^2 z$$
$$\mathfrak{d}^2 x = 2 \sin. z\, \mathfrak{d} \sin. z = -2 \sin. z \cos. z \sin^2 z = -\sin^2 z \sin. 2z,$$

nempe $2 \sin. z \cos. z = \sin. 2z$. Ita

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}^3 x &= -2 \sin. z \sin. 2z\, \mathfrak{d} \sin. z - \sin^2 z\, \mathfrak{d} \sin. 2z \\ &= 2 \sin. 2z \cos. z \sin^3 z + 2 \cos 2z \sin^4 z \\ &= 1.2 \sin^3 z \sin. 3z,\end{aligned}$$

nam $\sin. 2z \cos. z + \cos. 2z \sin. z = \sin. 3z$.

Si vero

$$\mathfrak{d}^\nu x = \pm 1.2.3 \ldots (\nu - 1) \sin^\nu z \sin. \nu z,$$

tum quoad cotg. z

$$\mathfrak{d}^{\nu+1} x = \mp 1.2.3 \ldots (\nu - 1)\, \nu \sin^{\nu+1} z \sin. (\nu + 1) z.$$

Nam differentiando quoad cotg. z, erit ipsius $\mathfrak{d}^\nu(x)$ derivata

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}^{\nu+1} x &= \mp 1.2.3 \ldots (\nu - 1)\, \nu \sin^{\nu-1} z \cos. z \sin^2 z \sin. \nu z \\ &\qquad \mp 1.2.3 \ldots (\nu - 1) \sin^\nu z . \nu \cos. \nu z \sin^2 z \\ &= \mp 1.2.3 \ldots (\nu - 1)\, \nu \sin^{\nu+1} z (\sin. \nu z \cos. z + \cos. \nu z \sin. z) \\ &= \mp 1.2.3 \ldots (\nu - 1)\, \nu \sin^{\nu+1} z \sin. (\nu + 1) z,\end{aligned}$$

nam $\sin. \nu z \cos. z + \cos. \nu z \sin. z = \sin. (\nu + 1) z$.

Itaque

$$\begin{aligned}k(q) = \operatorname{arctg.}(T+q) &= k(0) + q\mathfrak{d}k(0) + \frac{q^2}{2}\mathfrak{d}^2 k(0) + \ldots + \frac{q^\nu}{1.2.3\ldots\nu}\mathfrak{d}^\nu k(u) \\ &= \operatorname{arctg.} T + q \sin^2 z - \frac{1}{2} q^2 \sin^2 z \sin. 2z + \ldots\end{aligned}$$

addito complemento quod continetur inter

$$\frac{1.2.3\ldots(\nu-1)\, q^\nu}{2.3\ldots(\nu-1)\,\nu}\mathfrak{d}^\nu \operatorname{arctg.} T \text{ et } \frac{1.2.3\ldots(\nu-1)\, q^\nu}{2.3\ldots(\nu-1)\,\nu}\mathfrak{d}^\nu \operatorname{arctg.}(T+q),$$

Decrescat T et fiat demum 0, fiet z æquale quadranti et

$$\sin. z = 1,\ \sin. 2z = 0,\ \sin. 3z = -1,\ \sin. 4z = 0, \ldots$$

Hosted by Google

sitque $q = 1 =$ tangenti dimidii quadrantis pro radio 1 : erit arctg. $T = 0$, fietque arcus tangentis dimidii quadrantis pro radio 1, nempe pro hoc casu $k(q) =$ arctg. $(T + q) =$ arctg. $0 + q$ fiet (ut pag. 334)

$$-0 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots;$$

atque complementum est inter 0 et

$$\frac{1.2.3\ldots(\nu-1)\,q^{\nu}\sin^{\nu}.z\sin.\nu z}{1.2.3\ldots(\nu-1)\,\nu},$$

quod $\backsim 0$, dum $\nu \backsim \infty$, quum nullus sinus sit maior unitate et alter factor $\frac{1}{\nu} \backsim 0$.

Unde tota peripheria est octuplum huius seriei, et peripheria per quartam radii id est per $\frac{1}{4}$ multiplicata præbet aream duplo huius seriei æqualem pro radio 1.

14. Nec silentio præteriri potest, quomodo *Taylorianum* ad plures variabiles applicetur; atque inde differentiale functionis plures variabiles involventis sit summa differentialium partialium quoad singulas variabiles seorsim, reliquis constantibus suppositis, acceptarum.

Considerentur prius duæ tantum variabiles; atque $F(x, y)$ dicatur u, et functio eadem, si variabili x addatur ω ipso y constante posito, dicatur U, atque si in $U = F(x + \omega, y)$ ipso x constante posito addatur λ ipsi y, functio U ita mutata dicatur v; et pro x, y utroque variabili, atque addito ω ipsi x, et λ ipsi y, functio $F(x + \omega, y + \lambda)$ dicatur V. Quæritur V ex u, atque ∂V et $\partial\!\!\!/ V$ quæritur.

Est (pag. 321)

$$F(x + \omega, y) = U = u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots$$

Ita

$$F(x + \omega, y + \lambda) = V = U + \lambda \underset{1,y}{U} + \frac{\lambda^2}{2} \underset{2,y}{U} + \frac{\lambda^3}{2.3} \underset{3,y}{U} + \ldots$$

Substituatur cuivis termino seriei posterioris valor e serie priore; nempe pro U ponatur

Hosted by Google

$$u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots,$$

pro $\lambda \underset{1,y}{U}$ venit

$$\lambda \vartheta \left(u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots\right),$$

pro $\frac{\lambda^2}{2} \underset{2,y}{U}$ venit

$$\frac{\lambda^2}{2} \vartheta^2 \left(u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots\right),$$

. . . . . .

derivatas quoad y accipiendo.

Unde porro continuando, si derivata ν-ta quoad y derivatæ μ-tæ ipsius u quoad x acceptæ per $\underset{\mu,x\,;\,\nu,y}{u}$ denotetur, est

$$\begin{aligned} F(x+\omega, y+\lambda) = \quad & u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots \\ + \quad & \lambda \left(\underset{1,y}{u} + \omega \underset{1,x\,;\,1,y}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x\,;\,1,y}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x\,;\,1,y}{u} + \ldots\right) \\ + \quad & \frac{\lambda^2}{2} \left(\underset{2,y}{u} + \omega \underset{1,x\,;\,2,y}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x\,;\,2,y}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x\,;\,2,y}{u} + \ldots\right) \\ + \quad & \frac{\lambda^3}{2.3} \left(\underset{3,y}{u} + \omega \underset{1,x\,;\,3,y}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x\,;\,3,y}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x\,;\,3,y}{u} + \ldots\right) \\ + \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Quibus rite ordinatis fiet

$$\begin{aligned} F(x+\omega, y+\lambda) = u + \omega \underset{1,x}{u} + \lambda \underset{1,y}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\lambda^2}{2} \underset{2,y}{u} + \omega\lambda \underset{1,x\,;\,1,y}{u} + \\ + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \frac{\lambda^3}{2.3} \underset{3,y}{u} + \frac{\omega^2 \lambda}{2} \underset{2,x\,;\,1,y}{u} + \frac{\omega\lambda^2}{2} \underset{1,x\,;\,2,y}{u} + \ldots \end{aligned}$$

Nempe terminus generalis est

$$\frac{\omega^\mu \lambda^\nu}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu} \underset{\mu,x\,;\,\nu,y}{u},$$

ita ut omnes possibiles imagines literarum, inter quas nonnisi ω, λ sint numero $\mu+\nu$ positarum compareant, at $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu} \underset{\mu,x}{u}$ si λ desit, et si ω desit $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu} \underset{\nu,y}{u}$ ponatur.

Hosted by Google

Nimirum si ω^μ sit sine λ, tum nonnisi e linea superiore accipitur terminus, eritque $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu}\underset{\mu,x}{u}$. Si λ^ν sit sine ω, tum λ^ν extra parenthesim erit in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu}$, et factor socius eius, ut sine ω sit, nonnisi terminus primus eiusdem lineæ horizontalis erit, nempe $\underset{\nu,y}{u}$. Si vero $\omega^\mu\lambda^\nu$ sit; tum λ^ν nonnisi in columna verticali extra parenthesim reperitur, in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu}$, atque factor socius eius complectens ω^μ, nonnisi in linea horizontali eadem erit $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu}\underset{\mu,x;\nu,y}{u}$. Evidenter vero quilibet terminus constat, aut e factoribus $\frac{\omega^\mu}{1.2\ldots\mu}$ et $\underset{\mu,x}{u}$ aut ex $\frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu}$ et $\underset{\nu,y}{u}$, aut ex $\frac{\omega^\mu}{1.2\ldots\mu}.\underset{\mu,x;\nu,y}{u}$ et $\frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu}$.

Manifesto autem suppositum est, *Taylorianum* tam pro ω in serie prima, quam pro λ in serie secunda ita valere, ut complementum tendat ad 0; alioquin autem complementum et hic exprimi posse.

Ut differentiale prodeat substituatur $-\dot{x}$ ipsi ω, et $-\dot{y}$ ipsi λ; nempe etsi y independens sit ab x, quum in quovis casu simul cum x et certa quantate ponatur, dependentia in omni casu simultanea est (pag. 192); quapropter y dici $p(m\dot{x})$ potest et

$$\dot{y}=p(m\dot{x})-p\big((m-1)\dot{x}\big),$$

atque $F(x,y)=u$ dici $A(m\dot{x})$ potest. Quibus positis erit

$$A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big),$$

nempe differentiale verum ipsius $F(x,y)$ æquale ei, quod remanet, subtracta ex u tota serie, quæ ultimo prodiit, ipsi ω ubique $-\dot{x}$ et $-\dot{y}$ ipsi λ prius suffecto; nempe dum in $F(x,y)$ ponitur $(m-1)\dot{x}$, idest $m\dot{x}-\dot{x}$, pro y ponitur $p\big((m-1)\dot{x}\big)$ idest

$$p(m\dot{x})-\big(p(m\dot{x})-p\big((m-1)\dot{x}\big)\big)=y-\dot{y}.$$

Atque hoc pacto differentiale verum ipsius $F(x,y)$ erit

$$u-\Big(u-\dot{x}\underset{1,x}{u}-\dot{y}\underset{1,y}{u}+\frac{\dot{x}^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\dot{y}^2}{2}\underset{2,y}{u}+\dot{x}\dot{y}\underset{1,x;1,y}{u}-\ldots,\Big)=$$

$$=\dot{x}\underset{1,x}{u}+\dot{y}\underset{1,y}{u}-\frac{\dot{x}^2}{2}\underset{2,x}{u}-\frac{\dot{y}^2}{2}\underset{2,y}{u}-\dot{x}\dot{y}\underset{1,x;1,y}{u}+\ldots,$$

Hosted by Google

et facile patet, quod duorum priorum terminorum summa per totum differentiale verum divisa tendat ad 1, dum $n \backsim \infty$; atque summa differentialium partialium quoad singulas variabiles sit differentiale sensu stricto, et derivata quoque sit summa derivatarum quoad singulas variabiles acceptarum.

Unde de duabus variabilibus ad tertiam z et semper porro ad una plures progredi licet. Nempe (x, y) dicatur X et $F(x, y, z)$ dicatur $f(X, z)$: erit

$$\partial f(X, z) = \partial f(X, z)_{(\text{quoad } X)} + \partial f(X, z)_{(\text{quoad } z)}$$

sed $\partial f(X, z)_{(\text{quoad } X)} = \partial F(x, y, z)$, si differentiale ita accipiatur, ut z constans supponatur; et $\partial f(X, z)_{(\text{quoad } z)} = \partial F(x, y, z)$ pro x, y constantibus positis. Est autem $\partial f(X, z)$ pro z constante differentiale functionis duarum variabilium x, y; quod igitur summa differentialium functionis $F(x, y, z)$ quoad x et y seorsim acceptarum est, cui accedit etiam differentiale functionis eiusdem quoad z acceptum.

De lege generali, qua functio quotvis variabilium evolvitur, videatur LAGRANGE, *Théorie des fonctions*, 1813. pag. 130.

Exemplo tamen facili evolutionem functionis duarum variabilium illustrare libet.

Sit

$$F(x,y) = a + bxy;$$

erit

$$F(x+\omega, y+\lambda) = a + b(x+\omega)(y+\lambda) = a + bxy + b\omega y + b\lambda x + b\omega\lambda,$$

quod si $-\dot{x}$ substituatur ipsi ω et $-\dot{y}$ ipsi λ fit

$$= a + bxy - by\dot{x} - bx\dot{y} + b\dot{x}\dot{y},$$

et hoc si ex $a + bxy$ subtrahatur, differentia est

$$by\dot{x} + bx\dot{y} - b\dot{x}\dot{y},$$

quod $\doteq by\dot{x} + bx\dot{y}$. Prodit etiam manifesto idem, sive ipsis x, y simul substituatur $x + \omega$, $y + \lambda$, sive prius tantum ipsi x substituatur $x + \omega$ et tum in hoc substituatur $y + \lambda$ ipsi y; nam si tantum ipsi x substituatur

Hosted by Google

$x+\omega$ manente y sine addito λ, functio nonnisi in eo differet ab $F(x+\omega, y+\lambda)$ quod pro $y+\lambda$ solum y sit; quod si addatur, nihil differet.

X. Superius (pag. 313) mentio maximi minimique fuit; nec superfluum est Theorematis Tayloriani applicationes quasdam ad casus saltem simpliciores ostendere.

1. *Si functio $F(x)$ talis sit, ut pro $x=\alpha$ et ω dabili quovis minore sit $F(x\pm\omega)<F(x)$ aut sit $F(x\pm\omega)>F(x)$, tum $F(x)$ in casu priore maximum, in posteriore minimum est.*

Nimirum

$$F(\alpha+\omega)=F(\alpha)+\omega\,\partial F(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\partial^2 F(\alpha)+\ldots,$$

et

$$F(\alpha-\omega)=F(\alpha)-\omega\,\partial F(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\partial^2 F(\alpha)-\ldots,$$

ubi pro $\omega \backsim 0$ quivis terminus fit maior summa sequentium, si is non sit $=0$, nec ullus fiat ∞.

Hinc in omni tali casu $\partial F(x)$ pro $x=\alpha$ pro casu maximi vel minimi necessario $=0$ esse debet; quum series superior ostendat pro ω positivo incrementum $\omega\,\partial F(\alpha)$, inferior autem $-\omega\partial F(\alpha)$, et terminus uterque maior summa sequentium fiat, dum $\omega \backsim 0$; adeoque si ex. gr. tam ω quam $F(\alpha)$ positivum sit et pro $\alpha+\omega$ incrementum ipsius $F(\alpha)$, quantumvis exiguum sit pro $\omega \backsim 0$, positivum, pro $\alpha-\omega$ erit negativum; si ω negativum sit, erit prius incrementum negativum, posterius positivum.

At conversim si pro $x=\alpha$ sit $\partial F(x)=0$, non sequitur maximum vel minimum esse; potest enim etiam terminus sequens $=0$ esse, imo etiam postea sequentes usque ad μ-tam derivatam; suntque termini pro paribus potentiis ipsius ω in utraque serie æquales, pro imparibus quilibet terminus est ei respondentis oppositus; itaque possunt, si μ numerus par sit, derivatæ eousque singulæ $=0$ sine maximo vel minimo esse, quum in serie superiore sequens terminus, maior summa sequentium, oppositus termini illius sit, qui in serie inferiore ei respondet. Unde pro statu maximi vel minimi, derivatas omnes usque ad μ-tam pro μ impari, sin-

Hosted by Google

gulas æquales 0 esse debere patet, et quidem ut sequens derivata non sit 0; negativa dat maximum, positiva minimum.

Num vero maximum vel minimum sit, substituendo ω utvis parvum tentari etiam potest, eruto prius valore ipsius α ex $\partial(F)x = 0$ posito; imo ut supra dictum est, quum etiam pro $\partial(F)x = \infty$ maximum vel minimum fieri possit, etiam ex

$$\partial F(x) = \infty = \frac{1}{0}, \text{ idest } \frac{1}{\partial F(x)} = 0$$

quæri α potest; quamvis, ut plane monitum est, conversim non sequatur maximum vel minimum esse.

2. *Exempla faciliora.*

a) Dividatur x in duas partes a et $x - a$ tales, ut $x(a - x)$ maximum sit.

Ponatur $\partial . x(a - x) = 0$; erit

$$\partial . x(a - x) = a - 2x = 0,$$

et hinc

$$a = 2x \text{ et } x = \frac{a}{2}.$$

b) Sit in dimidium circulum maximum rectangulum inscribendum. Erit area rectanguli (Fig. 49*) $2x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, et huius derivata

$$2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0;$$

et hinc

$$r^2 - x^2 = x^2, \text{ atque } r^2 = 2x^2, \text{ et } x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

c) Sit recta α in tres eiusmodi partes b, x et $\alpha - b - x$ dividenda, ut triangulum ex iis fiat maximum.

Planimetria docet esse aream trianguli

$$\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

si a, b, c latera trianguli sint, et s æquale dimidio perimetri sit. Itaque pro $s = \frac{\alpha}{2}$ erit area

Hosted by Google

$$= \left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-b\right)\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)\left(\frac{\alpha}{2}-(\alpha-b-x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{2}}(\alpha-2b)^{\frac{1}{2}}(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

cuius derivata, si constans omittatur, utpote quæ ad maximum minimumve nihil confert, quum usque ad finem maneat et demum æquatio per eam dividatur, erit

$$-(\alpha-2x)^{-\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{-\frac{1}{2}}=0,$$

et per $(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ multiplicando fit

$$2b+2x-\alpha=\alpha-2x,$$

et hinc

$$4x=2\alpha-2b, \text{ atque } x=\frac{\alpha-b}{2}.$$

Nempe triangulum pro area maxima æquicrurum erit. Maximum esse patet, quum derivata secunda negativa sit.

d) Si *trianguli aequicruri basis z quaeratur pro area maxima* (fig. 50*), sit a summa laterum; erit

$$y=\left(x^2-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x=\frac{1}{2}(a-z),$$

atque area

$$\frac{1}{2}z\left(x^2-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{4}(a-z)^2-\frac{1}{4}z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}z\left((a-z)^2-z^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}z(a^2-2az)^{\frac{1}{2}},$$

cuius derivata factore $\frac{1}{4}$ omisso est

$$(a^2-2az)^{\frac{1}{2}}-az(a^2-2az)^{-\frac{1}{2}},$$

quo posito 0 et multiplicando per $(a^2-2az)^{\frac{1}{2}}$ fit

$$a^2-2az-az=0,$$

et hinc

$$a^2-3az=0, \text{ atque } z=\frac{a}{3};$$

Hosted by Google

nempe pro area maxima trianguli æquicruri triangulum æquilaterum est.

3. Interim, ut dictum est, derivata prima infinita esse potest, statu maximi vel minimi per id haud sublato; est nempe id momentaneum, pro certo puncto ipsius x, intra et ultra quod terminato x illico derivata finita fiet. Ex. gr. (pag. 313) erat pro

$$b \pm x^{\frac{2}{3}} = y$$

derivata infinita pro $x = 0$, et simul maximum pro signo —, minimum pro +. At hic quoque valor ipsius x, pro quo hoc fit, reperitur modo sequenti:

$$\partial y = \pm \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \pm \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

quod 0 esse nequit; at si ponatur

$$1 : \pm \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = \pm 3x^{\frac{1}{3}} = 0:$$

prodibit $x = 0$ pro hac æquatione, et derivata infinita; atque quum neque ex $\partial y = 0$ nec ex $\partial y = \infty$ sequatur maximum vel minimum esse, tentari potest, num pro illo valore ipsius x ita sit, et si fuerit, quodnam sit.

Vix monendum est, maxima aut minima pro pluribus etiam valoribus ipsius x dari posse, uti etiam maximorum vel minimorum maximum vel minimum posse in certis casibus dari.

XI. Sit fas applicationem *Tayloriani* etiam ad varios *tactus* ordines, et *radium curvaturae*, e quo etiam conceptus *evolutae* et *evolventis* nascitur, breviter addere.

1. Lineam l dicitur tactus ordine μ-to tangere linea L, si ordinata Y ipsius L sit $= F(x)$, et ordinata y ipsius l sit $= f(x)$, atque pro $x = \alpha$ sit

$$F(\alpha) = f(\alpha),\ \partial F(\alpha) = \partial f(\alpha),\ \partial^2 F(\alpha) = \partial^2 f(\alpha), \ldots,\ \partial^\mu F(\alpha) = \partial^\mu f(\alpha),$$

et non sit $\partial^{\mu+1} F(\alpha) = \partial^{\mu+1} f(\alpha)$.

Hosted by Google

Patebit rectam nonnisi ordine tactus primo tangere; circulum vero dari, qui ordine tactus primo, dari, qui etiam secundo tactus ordine tangat curvam; nec inter hunc et curvam e puncto tactus ullum alium circulum duci posse, uti nulla recta inter tangentem et curvam duci potest. Radius illius circuli vocatur *radius osculi* vel *curvaturae*, et *circulus* ipse *osculator* audit; nempe quum de quantitate curvedinis ad aliquod punctum p sermo est, circulus iste intelligitur.

2. Ponatur tam in $F(\alpha)$, quam in $f(\alpha)$, $\alpha + \dot{x}$ pro α: erit

$$F(\alpha + \dot{x}) = F(\alpha) + \dot{x}\,\partial F(\alpha) + \frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2 F(\alpha) + \frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3 F(\alpha) + \ldots,$$

et

$$f(\alpha + \dot{x}) = f(\alpha) + \dot{x}\,\partial f(\alpha) + \frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2 f(\alpha) + \frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3 f(\alpha) + \ldots$$

Sitque linea tertia λ, cuius ordinata $u = k(x)$, et sit pro $x = \alpha$

$$F(x) = f(x) = k(x),$$

atque

$$\partial F(x) = \partial f(x),$$

sed non $= \partial k(x)$, sintque $F(x)$, $f(x)$, $k(x)$ positiva; et dicatur terminorum seriei ipsius $f(x + \dot{x})$ per *Taylorianum* evolutæ post $\partial f(x)$ sequentium summa S et terminorum seriei ipsius $k(x + \dot{x})$ item per *Taylorianum* evolutæ post $\partial k(x)$ sequentium dicatur s, ac brevitatis gratia $\dot{x}\partial f(x)$ dicatur ∂ et $\dot{x}\partial k(x)$ dicatur ∂'.

Erit ∂, ∂' aut utrumque positivum, aut utrumque negativum, aut unum positivum alterum negativum.

a) Sit prius utrumque positivum, et pro ω positivo sit $\partial = \partial' + \omega$. Pro $N > 1$ et utvis magno poterit $\dot{x}$ tam parvum accipi, ut $S < \frac{\partial}{N}$ et simul etiam $s < \frac{\partial'}{N}$ sit; atque tum $\partial + S$ positivum et $> \partial - \frac{\partial}{N}$. Nam etsi S negativum esset, ipso $\frac{\partial}{N}$ minus destrueret ex ∂; item $\partial' + s$ positivum et $< \partial' + \frac{\partial'}{N}$. Hinc poni

$$\partial - \frac{\partial}{N} = a,\ \partial' + \frac{\partial'}{N} = b + q,\ \partial + S = a + p,\ \partial' + s = b$$

Hosted by Google

potest pro a, p, b, q positivis; et patet

$$a+p-b>a-(b+q)$$

esse sensu (pag. 37).

Itaque

$$\mathfrak{d}+S-(\mathfrak{d}'+s)>\mathfrak{d}-\frac{\mathfrak{d}}{N}-\left(\mathfrak{d}'+\frac{\mathfrak{d}'}{N}\right),$$

adeoque si probetur posterius positivum et non 0 esse, prius maius positivum erit.

Est vero

$$\mathfrak{d}-\frac{\mathfrak{d}}{N}-\left(\mathfrak{d}'+\frac{\mathfrak{d}'}{N}\right)=\mathfrak{d}-\mathfrak{d}'-\frac{\mathfrak{d}+\mathfrak{d}'}{N}$$

$$=\omega-\frac{2\mathfrak{d}'+\omega}{N}=\frac{(N-1)\omega-2\mathfrak{d}'}{N},$$

quod positivum est. Nam

$$\omega=\dot{x}\left(\mathfrak{d}f(x)-\mathfrak{d}k(x)\right),$$

quod $=\dot{x}.h(x)$ poni potest; itaque

$$\frac{(N-1)\omega-2\mathfrak{d}'}{N}=\dot{x}\,\frac{(N-1)h(x)-2\mathfrak{d}k(x)}{N},$$

ubi in numeratore $N-1$, $h(x)$, $\mathfrak{d}k(x)$ positiva sunt, et

$$(N-1)h(x)>2\mathfrak{d}k(x)$$

est, simulac

$$N-1>\frac{2\mathfrak{d}k(x)}{h(x)}$$

accipiatur.

Itaque in hoc casu $f(x+\dot{x})>k(x+\dot{x})$, et linea tertia λ infra lineam l e puncto communi $\mathfrak{p}$ cursum incipit; et quum idem ad $Y=F(x)$ applicetur, λ infra L et l cursum ex $\mathfrak{p}$ incipiet.

b) Si vero $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'$ utrumque negativum sit et $\mathfrak{d}>\mathfrak{d}'$, pro serie ipsius $f(x+\dot{x})$ maius negativum prodibit. Nam si negativa positive et positiva negative acciperentur, maius positivum prodiret; atque huius modo oppositum prodire debet. Itaque linea λ e puncto communi $\mathfrak{p}$ cursum supra lineas L et l incipit, quum eadem ad L applicentur.

Hosted by Google

c) Si autem unum positivum, alterum negativum, ex. gr. $\mathfrak{d}'$ negativum et $\mathfrak{d}$ positivum sit, tum etsi totum S negativum esset, ipsum $\mathfrak{d}$ destruere non poterit, itaque $\mathfrak{d}+S$ necessario positivum erit; s vero etsi totum positivum esset, $\mathfrak{d}'+s$ negativum erit; itaque $f(x)$ ipsum positivum, addito

$$\dot{x}\,.\,\mathfrak{d}f(x)+S,$$

nanciscetur incrementum positivum, $k(x)$ autem pariter positivum, addito

$$\dot{x}\,.\,\mathfrak{d}k(x)+s,$$

imminuetur; adeoque λ cursum e puncto communi infra L et l incipit.

Idem ad reliquos casus applicari evidens est; atque simul idem etiam porro donec libuerit continuari posse; si nempe pro $x=\alpha$ sit:

$$F(x)=f(x),\ \mathfrak{d}F(x)=\mathfrak{d}f(x),\ \mathfrak{d}^2F(x)=\mathfrak{d}^2f(x),\ldots,\ \mathfrak{d}^{\mu-1}F(x)=\mathfrak{d}^{\mu-1}f(x),\ \mathfrak{d}^{\mu}F(x)=\mathfrak{d}^{\mu}f(x),$$

et

$$f(x)=k(x),\ \mathfrak{d}f(x)=\mathfrak{d}k(x),\ \mathfrak{d}^2f(x)=\mathfrak{d}^2k(x),\ldots,\ \mathfrak{d}^{\mu-1}f(x)=\mathfrak{d}^{\mu-1}k(x),$$

sed non $\mathfrak{d}^{\mu}f(x)=\mathfrak{d}^{\mu}k(x)$, tum linea λ per $k(x)$ generata e puncto tactus cursum aut supra L et l utramque aut infra utramque incipiet.

3. *Sit L linea recta*; poterit hæc, ubivis fuerit in eodem plano cum l, per $(\beta+x)b$, pro β, b certis constantibus, exprimi, nisi perpendicularis ad x vel ipsi parallela fuerit; pro quo casu linea abscissarum x ita mutari poterit, ut L per $(\beta+x)b$ exprimatur. Ponatur

$$F(x)=fx) \text{ et } \mathfrak{d}F(x)=\mathfrak{d}f(x)$$

pro $x=\alpha$; erit

$$(\beta+\alpha)b=f(\alpha) \text{ et } b=\mathfrak{d}f(\alpha);$$

atque quum $\beta b+\alpha b=f(\alpha)$ sit, est

$$\beta=\frac{f(\alpha)}{b}-\frac{\alpha b}{b}=\frac{f(\alpha)}{\mathfrak{d}f(\alpha)}-\alpha,$$

atque hinc ordinata rectæ L, quæ pro $x=\alpha$ æqualis est ordinatæ y lineæ l, et quarum etiam derivatæ primæ sunt æquales, est

Hosted by Google

$$= \left(\frac{f(\alpha)}{\partial f(\alpha)} - \alpha + x\right) \partial f(\alpha)$$

$$= f(\alpha) + (x - \alpha)\, \partial f(\alpha).$$

Neque vero recta ulla alia, cuius ordinata

$$Y' = (\gamma + x)\, c,$$

datur, quæ e fine ipsius y inter L et l duci possit; nam tum pro $x = \alpha$ debet

$$(\gamma + \alpha)\, c = F(\alpha) \text{ et } \partial\, (\gamma + \alpha)\, c = \partial F(\alpha)$$

esse; alioquin recta nova supra vel infra L et l cursum incipiet; e dictis æquationibus autem, $\gamma = \beta$, et $c = b$, atque $Y' = Y$, adeoque recta prior L prodibit.

Ex. gr. Sit $y = x^{\frac{1}{2}}$ ut in parabola pro parametro $= 1$; erit pro $x = \alpha$ recta tangens, quæ per

$$\beta = \frac{\sqrt{\alpha}}{\partial \sqrt{\alpha}} - \alpha = \alpha \text{ et } b = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

determinatur.

Patet vero derivatam secundam ipsius Y esse $\partial b = 0$; adeoque quum derivata secunda pro nulla linea præter rectam 0 sit, rectam exceptis singulis punctis (pag. 307) allatis tactus ordinis secundi incapacem esse.

4. Sit L circulus; quicunque circulus radii r sit in eodem plano cum l, ordinata eius poterit pro quavis abscissarum linea T, et quovis abscissarum t initio $*$, atque pro certis constantibus b et a, per

$$b + \sqrt{r^2 - (t - a)^2}$$

exprimi. Sit enim diametri ipsi T parallelæ distantia b a T, sitque z ordinata pro abscissis e centro in diametro acceptis; sitque ex. gr. t uti in (fig. 51) est; erit

$$Y = b + \sqrt{r^2 - (t - a)^2};$$

Hosted by Google

donec vero t ab $*$ incipiendo in tantum excrescat, ut $t-a$ aliquamdim non sit $\geqq r$, eousque $\sqrt{r^2-(t-a)^2}$ semper imaginarium est. Reliqui casus quoque patent.

At si x ponatur pro t, atque sit $Y=F(x)$ et simul $\partial F(x)=\partial f(x)$, atque etiam $\partial^2 F(x)=\partial^2 f(x)$ pro certo valore α ipsius x, reperianturque ex his æquationibus r, a, b circulum illum determinantia, pro quo dicta locum habent: tum inter hunc circulum L et curvam l nullus alius circulus duci poterit. Nam sit circulus, cuius pro $x=\alpha$ ordinata

$$k(x)= f(x)=F(x);$$

nisi etiam

$$\partial k(x)=\partial f(x)=\partial F(x),$$

et simul

$$\partial^2 k(x)=\partial^2 f(x)=\partial^2 F(x)$$

ist, circulus novus aut infra lineam utramque L et l, aut supra utramque cursum e puncto communi incipiet. Si vero hæ æquationes locum habeant, tres constantes dictæ eædem prodibunt, modo statim (num. 6) dicendo.

5. Extendi hoc ad quemvis tactus ordinem posse clarum est. Si nempe $F(x)=f(x)$ et derivata pro L et l prima primæ, secunda secundæ, μ-ta μ-tæ æquales sint valore certo α ipsius x, atque æquatio ipsius L contineat constantes numero $(\mu+1)$: hæ e totidem æquationibus dictis determinantur; nec ulla linea inter L et l duci poterit, pro qua derivatæ usque ad μ-tam æquales non sunt; si vero æquales fuerint, eædem constantes et idem L prodibunt.

6. Reperiuntur (in numero 4.) dicta r, a, b modo sequenti.

a) Est

$$Y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}=f(x)=y$$

b) Hinc

$$\partial y=\frac{-(x-a)}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}} \text{ et } (\partial y)^2=\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2},$$

et hinc valor ipsius $(x-a)$ reperitur; nempe

Hosted by Google

$$r^2(\partial y)^2 - (x-a)^2(\partial y)^2 = (x-a)^2,$$

adeoque

$$r^2(\partial y)^2 = (x-a)^2(1+(\partial y)^2),$$

et

$$(x-a)^2 = \frac{r^2(\partial y)^2}{1+(\partial y)^2}, \text{ atque } x-a = \frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}},$$

et

$$a = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

attamen adhuc expressio ipsius a ipsum r involvit nondum determinatum.

c) Est porro

$$\partial^2 y = -\frac{(x-a)^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}},$$

quod si ad denominatorem priorem reducatur, multiplicando posterioris tam numeratorem quam denominatorem per $r^2-(x-a)^2$, fiet

$$= \frac{-(x-a)^2 - r^2 + (x-a)^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}} = \frac{-r^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}}.$$

d) Erat vero in *b*)

$$(\partial y)^2 = \frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2}, \text{ atque } x-a = \frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

e priore est

$$\frac{x-\alpha}{\partial y} = \sqrt{r^2-(x-a)^2},$$

e posteriore est

$$\frac{x-\alpha}{\partial y} = \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

itaque

$$\sqrt{r^2-(x-a)^2} = \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}}.$$

e) Valore hoc ipsius $\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ in valore ipsius $\partial^2 y$ in *c*) reperto substituto, erit

$$\partial^2 y = -r^2 : \frac{r^3}{\sqrt{(1+\partial^2 y)^3}} = \frac{\sqrt{(1+(\partial y)^2)^3}}{-r}$$

et hinc

Hosted by Google

$$r = -\frac{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y},$$

quæ igitur expressio radii osculi est.

f) Constantes reliquæ a, b quoque reperiuntur: nempe in *b*) erat

$$a = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y^2)}},$$

atque ex *a*) est

$$b = y - \sqrt{r^2 - (x-a)^2};$$

atque hinc in valore ipsius b substituendo valorem ipsius

$$\sqrt{r^2-(x-a)^2} = \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}}$$

erit

$$a = x - \frac{\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}}\,\frac{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = x - \frac{\left(1+(\partial y)^2\right)\partial y}{\partial^2 y}$$

et

$$b = y - \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}} = y + \frac{1+(\partial y)^2}{\partial^2 y}.$$

7. Notandum nempe est, expressionis, quæ in exponentis denominatore numerum parem habet, valorem eundem esse sive + sive — ante expressionem ponatur: nempe si dicatur $2 = -\sqrt{4}$, est 2 alicuius valoris ipsius $\sqrt{4}$ oppositum (pag. 124). Ita (in numero *g*) r potest dici $\sqrt{\left(1+(\partial y)^2\right)^3} : \partial^2 y$

8. *Exempla.*

a) Est (Fig. 42, pag. 305)

$$y^2 = s\nu = \frac{y\nu}{\partial y},$$

unde subnormalis

$$\nu = y\partial y.$$

Est porro, normali dicta N,

$$N^2 = \nu(s+\nu) = y\partial y\left(\frac{y}{\partial y} + y\partial y\right),$$

et

Hosted by Google

$$N = y\sqrt{1+(\partial y)^2},$$

atque hoc in valore ipsius r posito, fit

$$r = \frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial^2 y} = \frac{-N^3}{y^3\partial^2 y}.$$

Atque hinc si

$$y = x^{\frac{1}{2}},$$

ut in parabola pro parametro $=1$, est radius osculi $4N^3$; nam

$$y^3\partial^2 y = -\frac{1}{4}.$$

Nempe

$$y^3 = x^{\frac{3}{2}}, \text{ et } \partial y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ atque } \partial^2 y = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

et

$$y^3\partial^2 y = -\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}.$$

Ita ex æquatione generali sectionis conicæ cuiusvis facile prodit, esse $y^3\partial y = -\frac{1}{4}p$ pro parametro p; adeoque radium osculi esse $\frac{4N^3}{p}$.

b) Si (Fig. 52) recta A parallela ad rectam B sit; et $\mathfrak{ba} = 2$ perpendicularis ad A sit diameter circuli, feraturque $\mathfrak{b}$ in B, prius ad lævam, simul cum circulo; atque cogitetur e quovis loco $\mathfrak{b}'$ ipsius $\mathfrak{b}$ accipi ad lævam arcus $\mathfrak{b}'*\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}$, usquequo extremitas arcus accepti prima vice in A cadat; et idem fiat ad dextram: complexus omnium extremitatum, in quibus arcus accepti desinunt, dicitur *cyclois*, et *circulus* dictus *genitor* audit. Facile patet viam puncti rotæ per rectam devolutæ huic approximari.

Est autem manifesto ordinata y pro abscissa v, sinu verso arcus $\mathfrak{b}*\mathfrak{c}$,

$$y = \mathfrak{cd} + z = \sqrt{2v - v^2} + \text{arc. sin. vers. } v,$$

nam

$$\mathfrak{b}''\mathfrak{d} \perp \mathfrak{ba} \text{ et } \mathfrak{b}*\mathfrak{c} = \mathfrak{b}'*\mathfrak{b}'',$$

itaque

$$z = \mathfrak{b}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'*\mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}*\mathfrak{c} = \text{arc. sin. vers. } v.$$

Estque

$$\partial y = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \partial^2 y = v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Hosted by Google

Nam quoad v accipiendo derivatas

$$\partial' y = \partial' \sqrt{2v - v^2} + \partial z = (1 - v)(2v - v^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin. z};$$

nam z æquale est arcui, cuius v sinus versus est, et arcus z derivata quoad sinum versum est $\frac{1}{\sin. z}$; hoc autem est

$$= \frac{1}{\sqrt{2v - v^2}} = (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Itaque

$$\partial' y = (1 - v)(2v - v^2)^{-\frac{1}{2}} + (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - v + 1) = \frac{2 - v}{(2v - v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2 - v)(2v - v^2)^{\frac{1}{2}}}{2v - v^2}$$

$$= \frac{(2 - v)\left(\frac{2}{v} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2 - v} = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Unde

$$\partial'^2 y = -v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$r = \frac{(1 + (\partial' y)^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial'^2 y} = \frac{(1 + 2v^{-1} - 1)^{\frac{3}{2}}}{v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}}{v^{-2}}$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{v} - 1}}{v^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 - v},$$

quod pro puncto $\mathfrak{b}$, ubi $v = 0$ est, fit

$$2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4;$$

nempe radius curvaturæ ibidem est quadruplus radii circuli genitoris.

Quod vero ∂x quoad v sit $= \frac{1}{\sin. x}$, patet sic. Dicatur

$$\dot{v} = \text{sin. vers. } m\dot{x} - \text{sin. vers. } (m - 1)\dot{x},$$

nempe differentiale verum sinus versi x, et dicatur $m\dot{x}$, ut (pag. 273) q. Est

Hosted by Google

$$v = 1 - \cos. q,$$

et

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 1 - \cos. q - \big(1 - \cos. (q - \dot{x})\big) \\ &= 1 - \cos. q - (1 - \cos. q \cos. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x}) \\ &= \cos. q (\cos. \dot{x} - 1) + \sin. q \sin. \dot{x}, \end{aligned}$$

hoc autem per $\sin. q \sin. \dot{x}$ divisum tendit ad 1; nam

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{\cos. q (\cos. \dot{x} - 1)} \backsim \infty;$$

nam (pag. 283)

$$\cos. \dot{x} = 1 - u \sin.^2 \dot{x},$$

denotante u quantitatem aliquam inter 0 et 1; itaque

$$\cos \dot{x} - 1 = - u \sin.^2 \dot{x};$$

adeoque

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{\cos. q (\cos. \dot{x} - 1)} = \frac{- \sin. q}{\cos. q \,.\, u \sin.^2 \dot{x}} \backsim \infty,$$

atque (pag. 284) $\sin. q \sin. \dot{x}$ differentiale ipsius $v = \sin. \text{vers}. x$ est; nempe

$$\dot{v} \doteq \sin. q \sin. \dot{x};$$

hinc autem

$$\sin. \dot{x} \doteq \frac{\dot{v}}{\sin. q}$$

et quum $\sin. \dot{x} \doteq \dot{x}$, sequitur

$$\dot{x} \doteq \frac{\dot{v}}{\sin. q};$$

nempe differentiale arcus est æquipollens differentiali sinus versi per sinum arcus diviso; atque derivata arcus quoad sinum versum est $= 1$ divisa per sinum arcus, omnino omnibus pro radio 1 intellectis.

Quum vero

$$r = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 - v} = 2 \sqrt{2 (2 - v)}$$

sit, est (Fig. 53) $r = 2q$, per q chordam arcus α circuli genitoris cycloidis dimidiæ **bta** intelligendo; nam

$$q^2 = 2 (2 - v),$$

adeoque

$$q = \sqrt{2 (2 - v)}.$$

Hosted by Google

Si itaque ex t ducatur ad q parallela $a+b=2q$; terminabitur hæc in cycloide a * f; cuius summum punctum a est, et circulus genitor priori, adeoque et ipsa inferiori bta æqualis est. Nam $a=q$, adeoque $b=q$; sed utrumque q, nempe chordæ arcuum α utriusque circuli genitoris et $b=q$ sunt parallela; itaque et α'' est parallela et $=\alpha'$, et $\alpha''+\gamma$ perpendicularis ad diametrum circuli genitoris utriusque. Est vero $\alpha'+z'=\alpha+z$, et quum $z=z'$, est $\alpha'=\alpha$. Erit igitur ordinata $\gamma+\alpha''=\gamma+\alpha$; itaque f punctum cycloidis inferiori æqualis erit.

Est autem $a+b$ plane normalis ad punctum t. Nam subtangens

$$s=\frac{y}{\partial y}=\frac{z+\gamma}{\sqrt{2v^{-1}-1}}=\frac{v(z+\gamma)}{\sqrt{2v-v^2}}=\frac{v(z+\gamma)}{\gamma}.$$

Itaque $\gamma:v=\gamma+z:s$, adeoque chorda arcus bc est ad tangentem th parallela; atque hinc quum α et q sint parallela, et angulus ad c in semicirculo rectus sit, est $a\perp$ th.

Hinc autem manifesto pro quovis arcu z circuli genitoris inferioris normalis ordinatæ respondens, radio osculi eidem respondenti æqualis facta, atque ordinata superius ipsi $\pi-z$ respondens in eodem puncto terminatur. Itaque complexus extremitatum normalium omnium cycloidis inferioris radiis osculi respondentibus æqualium est cyclois superior. Est igitur cycloidis *evoluta* quoque cyclois priori *evolventi* æqualis.

Nimirum si E complexus omnis puncti sit, in quo normalis aliqua formæ F, radio osculi eidem normali respondenti æqualis accepta terminatur; dicitur E *evoluta* ipsius F, atque F *evolvens* ipsius E.

Est autem (pag. 306)

$$\text{tg.}p=\frac{1}{\partial y}=1:\sqrt{2v^{-1}-1}=1:\sqrt{\frac{2-v}{v}}=\sqrt{\frac{v}{2-v}}.$$

Si vero z in inferiore circulo genitore fiat $=\alpha$, a b incipiendo, ut fiat V ex v, erit tangens anguli, quem tangens cum ordinata facit,

$$=1:\sqrt{2V^{-1}-1}=\sqrt{\frac{2-v}{v}},$$

Hosted by Google

nam $V = 2 - v$. Est vero $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ cotangens anguli illius, cuius tangens $\sqrt{\frac{v}{2-v}}$ est.

Itaque angulus, cuius $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ tangens est, angulum priorem p ad rectum complet adeoque est $= u$, et $a + b$ tangens cycloidis superioris est. Extendi hoc ad alias evolutas quoque potest, quum u suo alterno æquale sit.

Ingeniose hinc HUGENIUS qui primus pendulum ad horologiis motum æquabiliorem conciliandum applicavit, laminam et ad dextram ipsi $\mathfrak{a} * \mathfrak{k}$ parem posuit, ut filo de laminis cycloidalibus in tangente tenso, centrum oscillationis cycloidem describeret. Quum enim demonstretur ad descensum de cycloidis $\mathfrak{atb}$, pro $\mathfrak{bh}$ verticali, puncto quovis usque ad infimum $\mathfrak{b}$ tempus æquale requiri; sive ad maiorem sive ad minorem arcum ob inæqualitatem dentium excurrat pendulum, isochronum in theoria manet; tempus descensus autem per arcus circuli inæquales inæquale est.

Ultro itaque suboritur quæstio: quomodo e data forma F, eius evoluta E, atque ex E eius evolvens F reperiatur. Sed hoc tantum commemorasse sufficiat.

XII. Quum superius (pag. 206) quæstio suborta fuerit, quænam sit e functionum certarum genere illa, cuius functio certa determinata sub certa quapiam conditione certa quadam qualitate gaudeat: huius etiam, *Calculi variationum* dicti, idea casibus simplicioribus exponenda est.

Sit x variabilis absoluta per n divisa, et sit $y = k(x)$, cuius derivatæ quoad x accipiantur; atque functionum sub genere certo contentarum derivatæ formula generalis sit ex. gr.

$$Ay^a + A'y^{a'} + \ldots + B(\mathfrak{d}y)^b + B'(\mathfrak{d}y)^{b'} + \ldots + Cy^c(\mathfrak{d}y)^d + C'y^{c'}(\mathfrak{d}y)^{d'} + \ldots = X;$$

nempe sit casus, ubi in nullo termino factor alius sit, præter potentiam aliquam ipsius y, potentiam aliquam ipsius $\mathfrak{d}y$, functionem aliquam ipsius x, et constantem. Quæritur talis functio y ipsius x, quæ si Y dicatur, integrale derivatæ dictæ, substituto Y ipsi y, maximum vel minimum sit inter omnia derivatæ huius integralia, quæ pro alio y sumerentur.

Ponatur $Y + \omega$ pro Y denotante ω functionem ipsius x, quæ dato

Hosted by Google

quovis minor fieri possit debeatque, et *variatio functionis* Y dicitur; prodibit pro ∂Y tum $\partial(Y+\omega)=\partial Y+\partial\omega$, et pro $(\partial Y)^v$ erit $(\partial Y+\partial\omega)^v$; atque pro casu integralis maximi minimive incrementum totius derivatæ, tam pro $+\omega$ quam pro $-\omega$, oportet esse aut simul positivum, aut simul negativum. Hoc autem aliter fieri nequit, ut statim demonstrabitur, nisi summa coefficientium ipsius ω in terminis, ubi ω tantum ad 1 elevatur, nec derivata eius adest, N dicta, et summa coefficientium ipsius $\partial\omega$ in terminis, ubi nec ω, nec derivatæ eius prima altiores adsunt, et $\partial\omega$ in prima tantum potentia occurrit, P dicta, sit

$$\int(N\omega+P\partial\omega)=0;$$

N et P autem prodibunt, quum statim pateat in derivata derivatæ datæ esse N coefficientem ipsius ∂y, et P coefficientem ipsius $\partial^2 y$, tam ∂y quam $\partial(\partial y)$ quoad x accepto.

Imo tunc etiam patebit, esse $N-\partial P=0$ pro statu maximi minimive; atque ex hoc et data conditione eruitur Y; quamvis conversim non sequatur, maximum vel minimum esse, ut supra (pag. 345). Inferius quidem brevius ostendetur, quomodo N, P ex evolutione functionis plurium variabilium Tayloriana (pag. 341) reperiantur.

Demonstrandum idcirco venit primo, quod in derivata derivatæ datæ prodeat $N\partial y+P\partial^2 y$, si pro Y ponendo $Y+\omega$, coefficientium ipsius ω summa sit N, et coefficientium ipsius $\partial\omega$ summa sit P; secundo, quod nisi $\int(N\omega+P\partial\omega)=0$ sit, maximum vel minimum esse nequeat.

Sunt duæ variabiles y et ∂y; et $\partial(\partial y)$ quoad x est $=\partial^2 y$; adeoque per (pag. 273 et 281)

$$\partial X=(aAy^{a-1}+a'A'y^{a'-1}+\ldots)\partial y+(bB(\partial y)^{b-1}+b'B'(\partial y)^{b'-1}+\ldots)\partial^2 y+$$
$$(cCy^{c-1}(\partial y)^d+c'C'y^{c'-1}(\partial y)^{d'}+\ldots)\partial y+(dCy^c(\partial y)^{d-1}+d'C'y^{c'}(\partial y)^{d'-1}+\ldots)\partial^2 y+\ldots$$

Unde

$$N=aAy^{a-1}\quad+\ldots+cCy^{c-1}(\partial y)^d+\ldots$$

et

$$P=bB(\partial y)^{b-1}+\ldots+dCy^c(\partial y)^{d-1}+\ldots$$

Ponatur iam $y+\omega$ pro y; fiet functio nova, per theorema binomiale evolvenda

Hosted by Google

$$A(y+\omega)^a + A'(y+\omega)^{a'} + \ldots + B(\partial y + \partial\omega)^b + B'(\partial y + \partial\omega)^{b'} + \ldots$$
$$+ C(y+\omega)^c(\partial y + \partial\omega)^d + C'(y+\omega)^{c'}(\partial y + \partial\omega)^{d'} + \ldots =$$
$$= Ay^a + A'y^{a'} \ldots + B(\partial y)^b + B'(\partial y)^{b'} + \ldots + Cy^c(\partial y)^d + \ldots +$$
$$+ (aAy^{a-1} + a'A'y^{a'-1} + \ldots)\omega + (bB(\partial y)^{b-1} + b'B'(\partial y)^{b'-1} + \ldots)\partial\omega +$$
$$+ (cCy^{c-1}(\partial y)^d + c''yC^{c'-1}(\partial y)^{d'} + \ldots)\omega + (dCy^c(\partial y)^{d-1} + d'C'y^{c'}(\partial y)^{d'-1} + \ldots)\partial\omega + s$$

ubi s æqualis est summæ terminorum, quorum quivis ipsorum ω, $\partial\omega$ tanquam factorem aut utrumque aut aliquem pluries continet. Nam in termino sub formula $A(y+\omega)^a$ contento, evolutoque, post $aAy^{a-1}\omega$ sequitur $\frac{a(a-1)}{2}Ay^{a-2}\omega^2$, et postea semper crescunt exponentes ipsius ω; ita in $B(\partial y + \partial\omega)^b$ evoluto post $bB(\partial y)^{b-1}\partial\omega$ sequitur $\frac{b(b-1)}{2}B(\partial y)^{b-2}(\partial\omega)^2$ et dein semper crescunt exponentes ipsius $\partial\omega$; atque si evolvatur $C(y+\omega)^c(\partial y + \partial\omega)^d$, erit

$$\left(Cy^c + cCy^{c-1}\omega + \frac{c(c-1)}{2}Cy^{c-2}\omega^2 + \ldots\right)\left(\partial y^d + d(\partial y)^{d-1}.\partial\omega + \frac{d(d-1)}{2}(\partial y)^{d-2}.(\partial\omega)^2 + \ldots\right),$$

ubi nonnisi duo priores termini in factore utroque considerandi veniunt, quum reliqui potentiam ipsius $\partial\omega$ aut ipsius ω prima altiorem contineant; est vero

$$(Cy^c + cCy^{c-1}\omega)((\partial y)^d + d(\partial y)^{d-1}\partial\omega) =$$
$$Cy^c(\partial y)^d + cCy^{c-1}(\partial y)^d.\omega + dCy^c(\partial y)^{d-1}\partial\omega + cdCy^{c-1}(\partial y)^{d-1}.\omega\partial\omega,$$

ubi terminus primus ad X pertinet, de posteriore, qui $\omega\partial\omega$ continet, quæstio non est, et reliqui duo suis locis adsunt; patetque valores ipsorum N, P esse qui dicebantur.

2. Potest vero ω tam parvum accipi, ut incrementum functionis dictæ dato quovis minus fiat. Sit quippe $\omega = iv$, pro i constante aliqua, et v functione quapiam ipsius x, quam prouti libuerit, imminuere licebit; in terminis, ubi $\partial\omega$, $(\partial\omega)^2$ &c. ut factores continentur, quoque aderit ubique constans i; imo ubi ω^2 aut $(\partial\omega)^2$, $\omega\partial\omega$ &c. sunt, ad minimum secunda potentia ipsius i aderit. Itaque in $\int(N\omega + P\partial\omega)$ aderit i in prima potentia, in integrali partis reliquæ autem ad minimum in secunda, cum factore

Hosted by Google

socio aliquo omnino finito, omnibus heic finitis suppositis. Consequenter pro dato quovis valore posterioris licebit i tam parvum accipere, ut a priore, nisi hoc $= 0$ sit, superetur.

Pro statu maximi minimive igitur oportet $\int(N\omega + P\partial\omega) = 0$ esse; nam secus accepto una vice $+\omega$, alteravice $-\omega$, prodibit una vice id, quo ab integrali isto reliquum exceditur positive et altera vice negative, adeoque nec maximum nec minimum locum habebit.

Est autem $\int(N\omega + P\partial\omega)$ formæ $\alpha + \beta\omega$ pro α constante; nam

$$\partial(\alpha + \beta\omega) = \beta\partial\omega + \omega\partial\beta,$$

ubi

$$N = \partial\beta \text{ et } P = \beta,$$

atque hinc

$$\partial P = \partial\beta \text{ et } N - \partial P = \partial P - \partial P = 0.$$

Pariter si adessent $Q\partial^2\omega + R\partial^3\omega$ (nempe si in expressione superiore ipsius derivatæ datæ derivatæ altiores ipsius y occurerent) patet

$$\int(N\omega + P\partial\omega + Q\partial^2\omega + R\partial^3\omega)$$

esse formæ

$$\alpha + \beta\omega + \gamma\partial\omega + \delta\partial^2\omega;$$

nam huius derivata est

$$\beta\partial\omega + \omega\partial\beta + \gamma\partial^2\omega + \partial\gamma\partial\omega + \delta\partial^3\omega + \partial\delta\partial^2\omega,$$

ubi esset

$$N = \partial\beta,\ P = \beta + \partial\gamma,\ Q = \gamma + \partial\delta,\ R = \delta;$$

atque hinc

$$N - \partial P + \partial^2 Q - \partial^3 R = \partial\beta - \partial\beta - \partial^2\gamma + \partial^2\gamma + \partial^3\delta - \partial^3\delta = 0.$$

Exempla.

1. *Quaeratur aequatio ordinatae y pro abscissa indefinita t aream datam x longitudine minima claudens.*

Concipiantur y, ∂y quoad x expressa acceptaque, et consideretur res in plano.

Dividatur x per n denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$, atque m-to $\dot{x}$ respondens pars abscissæ sit, ut (pag. 220), $t(m\dot{x}) - t((m-1)\dot{x})$, dicaturque $\dot{t}$, atque $\dot{t}$ et $\dot{x}$ simultanea sibi invicem respondentia intelligantur. Erit (pag. 297)

Hosted by Google

$$\dot{x} \doteq y\dot{t};$$

longitudinis lineæ vero differentiale, ipso ∂y quoad x expresso, est (pag. 293)

$$(\dot{t}^2 + (\partial y)^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{t}^2 + (\partial y)^2 . \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}};$$

quod si $y\dot{t}$ substituatur ipsi $\dot{x}$, fit

$$\dot{t}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}} \doteq \frac{\dot{x}}{y}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}};$$

et $\frac{1}{y}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ dicatur V.

Cuius si, ut dictum est, derivata accipiatur: erit

$$\partial V = \frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{1 + y^2(\partial y)^2}} - \frac{\partial y}{y^2\sqrt{1 + y^2(\partial y)^2}};$$

nam (pag. 225 et 281) V sub formam $\frac{u}{v}$ venit pro

$$v = y \text{ et } u = (1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}};$$

adeoque $(v\partial u - u\partial v) : v^2$ accipiendum erit. Est autem

$$\partial u = \frac{1}{2}(1 + y^2(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial(1 + y^2(\partial y)^2),$$

et

$$\partial(1 + y^2(\partial y)^2) = \partial(y^2(\partial y)^2),$$

quod (pag. 281) est

$$= y^2\partial(\partial y)^2 + \partial(y^2).(\partial y)^2 = 2y^2\partial y\partial^2 y + 2y\partial y.(\partial y)^2.$$

Consequenter si $1 + y^2\partial y^2$ breviter k dicatur, erit

$$\partial V = \frac{yy\partial y.(\partial y)^2.k^{-\frac{1}{2}} + yy^2\partial y\partial^2 y k^{-\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}\partial y}{y^2}$$

$$= \frac{y^2\partial y(\partial y)^2}{y^2\sqrt{k}} + \frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{k}} - \frac{\partial y\sqrt{k}}{y^2};$$

et si terminus posterior ad denominatorem prioris reducatur, erit

Hosted by Google

$$-\frac{\partial y\sqrt{k}}{y^2}=-\frac{(1+y^2(\partial y)^2)\partial y}{y^2\sqrt{k}}=-\frac{\partial y+y^2(\partial y)^2\partial y}{y^2\sqrt{k}},$$

quod priori termino additum fit

$$-\frac{\partial y}{y^2\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}},$$

et terminus qui superest, est

$$\frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}.$$

Est igitur

$$N=\frac{-1}{y^2\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}} \text{ et } P=\frac{y\partial y}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}};$$

pro maximo minimove autem est

$$N-\partial P=0, \text{ adeoque } N=\partial P;$$

atque quum

$$\partial V=N\partial y+P\partial^2 y,$$

est etiam

$$\partial P\partial y+P\partial^2 y=\partial V.$$

Consequenter

$$\int(\partial P.\partial y+P.\partial^2 y)=V+\text{constans}=P\partial y+\text{constans},$$

nam

$$\partial(P\partial y)=\partial P.\partial y+P\partial^2 y.$$

Est igitur

$$V+\text{constans}=P\partial y+\text{constans},$$

nempe

$$\frac{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}{y}=\frac{y(\partial y)^2}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}+\text{constans}.$$

Unde per $y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}$ multiplicando fit

$$1+y^2(\partial y)^2=y^2(\partial y)^2+\text{const.}\,y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2};$$

atque hinc

$$\text{constans}=\frac{1}{y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}, \text{ adeoque } \frac{1}{\text{constans}}=y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2},$$

quo b dicto erit

Hosted by Google

$$b^2 = y^2 + y^4(\partial y)^2, \text{ atque } b^2 - y^2 = y^4(\partial y)^2, \text{ et } \sqrt{b^2 - y^2} = y^2 \partial y,$$

adeoque

$$\partial y : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} = 1.$$

Erat vero ∂y derivata ipsius y quoad x accepta, atque

$$\dot{x} \doteq \dot{t}y;$$

adeoque

$$\partial y : \frac{dy}{\dot{t}y} = \frac{dy}{\dot{x}} : \frac{dy}{ty} \backsim 1.$$

Atque hinc

$$\frac{dy}{\dot{t}y} : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} \backsim 1;$$

seu

$$\frac{ydy}{\dot{t}\sqrt{b^2 - y^2}} \backsim 1;$$

adeoque

$$\frac{\dot{t}\sqrt{b^2 - y^2}}{ydy} = \dot{t} : \frac{ydy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \backsim 1.$$

Consequenter

$$\int \dot{t} = \int \frac{ydy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = t = \sqrt{b^2 - y^2},$$

namque huius differentiale quoad y est $ydy : \sqrt{b^2 - y^2}$. Unde

$$t^2 = b^2 - y^2,$$

quæ æquatio circuli pro radio b et abcissis t e centro acceptis est.

2. *Linea Brachystochrona*, seu linea, per quam grave ex A ad C punctum in alia verticali cadens brevissimo tempore descendit, reperitur hoc modo. (Fig. 54). Dividatur x per n, ducanturque per fines ipsorum $\dot{x}$ horizonti parallelæ; sit tempus descensus t, et respondeat $\dot{t}$ ipsi $\dot{x}$, nempe si de m-to $\dot{x}$ sermo sit, per $\dot{t}$ intelligatur tempus, quo de parallela per m-ti $\dot{x}$ finem superiorem ad parallelam per finem m-ti $\dot{x}$ pervenit grave.

Spatium sub t percursum exprimi per $\dot{t}\sqrt{gx}$ poterit; nempe facile

Hosted by Google

demonstratur in mechanica, velocitatem esse pro quavis linea curva eandem, quæ ad imum abscissæ verticalis x esset; atque superius (pag. 248 et sequ.) erat $v\dot{t} \doteq \dot{s}$.

Consideretur et hic res prius ad planum restricta. Est longitudinis lineæ differentiale $\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$. Erit igitur spatium prius huic æquipollens; nempe

$$\frac{\dot{t}\sqrt{gx}}{\dot{x}\sqrt{1+(\partial y)^2}} \backsim 1,$$

adeoque

$$\dot{t} : \frac{\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}} \backsim 1;$$

adeoque, si pro dato x minimum ipsius $\int \frac{\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}}$ reperiatur, minimum t erit.

Accipiatur itaque $\frac{1}{\sqrt{gx}}\partial(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ pro certo valore ipsius x, idem e certo valore ex. gr. 0 usque ad $2r$ ad quemvis applicari patebit. Erit derivata quæsita quoad x accepta

$$\frac{(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y \partial^2 y}{\sqrt{gx}},$$

nempe $\partial\partial y$ quoad x est $\partial^2 y$ et $\sqrt{gx}$ pro certo x sumitur.

Itaque

$$N=0, \quad P=\frac{(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y}{\sqrt{gx}}.$$

Sed

$$N=\partial P; \text{ adeoque } \partial P=0 \text{ et } P=\text{constans}.$$

Itaque

$$\frac{\partial y}{\sqrt{gx}\sqrt{1+(\partial y)^2}}=\text{constans},$$

sit $=\alpha$; atque hinc

$$\partial y=\alpha\sqrt{gx}\sqrt{1+(\partial y)^2}, \text{ et } (\partial y)^2=\alpha^2 gx+\alpha^2 gx(\partial y)^2$$

et hinc

$$(\partial y)^2=\frac{\alpha^2 gx}{1-\alpha^2 gx}=\frac{\beta x}{1-\beta x}$$

pro $\alpha^2 g=\beta$.

Hosted by Google

Erat autem (pag. 357) pro cycloide

$$(\partial y)^2 = 2v^{-1} - 1$$

pro circuli genitoris radio $= 1$, estque

$$(\partial y)^2 = 2rv^{-1} - 1$$

pro radio r; hic autem

$$v = 2r - x,$$

quo substituto in $2rv^{-1} - 1$ erit

$$\frac{2r}{v} - 1 = \frac{2r}{2r - x} - 1 = \frac{x}{2r - x},$$

quod item tam numeratorem quam denominatorem per $2r$ dividendo fit

$$= \frac{\frac{1}{2r} \cdot x}{1 - \frac{1}{2r} \cdot x} = \frac{\alpha^2 gx}{1 - \alpha^2 gx},$$

si $\alpha^2 g = \frac{1}{2r}$ accipiatur.

Est igitur, quum hoc pro quovis valore ipsius x ita prodeat, cyclois linea, pro qua quæsitum locum habere potest.

Atque etiamsi non restringatur ad planum, facile prodit, eam in plano et quidem verticali esse debere. Nempe si differentiale ipsius $\sqrt{1 + (\partial y)^2 + (\partial z)^2} : \sqrt{gx}$ accipiatur, et coefficiens ipsius ∂z dicatur N', et P' coefficiens ipsius $\partial^2 z$, erit

$$\partial P = 0 = \partial P', \text{ quia } N = 0 = N';$$

itaque P et P' constantes erunt, et $z = y.\text{const.}$ Erit igitur linea in plano et quidem verticali, quum x verticalis sit.

3. Interim tamen e dictis neutiquam maximum minimumve adesse constat, quum nonnisi conditioni, sine qua maximum minimumve fieri nequeat, satisfactum sit; constat quidem, in casu primo circulum, in posteriore cycloidem esse lineam quæsitam, si maximum minimumve detur; sed etiamsi detur, quodnam sit, indecisum adhuc est. At responsio quoad casum præsentem facilis est.

Nempe sit

$$(1 + (\partial y)^2)^{\frac{1}{2}} = f(\partial y)$$

Hosted by Google

pro variabili ∂y; erit per (pag. 321) derivatis quoad ∂y acceptis

$$f(\partial y+\partial\omega)=f(\partial y)+\partial\omega\partial f(\partial y)+\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)+\ldots$$

$$=(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}+\partial\omega(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y+\frac{(\partial\omega)^2}{2}\left(-(1+(\partial y)^2)^{-\frac{3}{2}}(\partial y)^2+(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}\right)+\ldots$$

ubi coefficiens ipsius $\partial\omega$ est id, quod supra P erat; et terminus sequens est

$$=\frac{(\partial\omega)^2}{2(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}};$$

nam parenthesi clausum est

$$=\frac{-(\partial y)^2}{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+(\partial y)^2-(\partial y)^2}{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Potest autem ω tam parvum accipi, ut $\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)$ maius fiat summa sequentium; itaque in hoc casu incrementum derivatæ, $y+\omega$ ponendo pro y, erit positivum; nam pro hoc casu est

$$\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)=\frac{(\partial\omega)^2}{2(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quod positivum est, namque $(\partial\omega)^2$ positivum est et $(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ quoque hic positive accipitur, adeoque et denominator positivus est. Unde in casu tali etiam integrale pro ω utvis parvo positive crescit; consequenter in casu relato minimum est.

4. Possunt quidem etiamsi plures adfuerint valores omnia dicta ex evolutione functionis plurium variabilium (pag. 342) deduci; at Tyronum captui aptius videbatur modo relato incipere.

Nempe si functio superior (pag. 360) dicatur $F(y,\ \partial y)=u$: (pag. 342); erat ibidem

$$F(y+\omega,\partial y+\partial\omega)=u+\omega\underset{1,y}{u}+\partial\omega\,.\underset{1,\partial y}{u}+\ldots,$$

si heic y sit, quod ibi x erat et quod ibi y erat heic ∂y sit, atque ipsius λ vicem $\partial\omega$ subeat; prodibitque coefficiens tam ipsius ω quam ipsius $\partial\omega$,

Hosted by Google

plane is, qui pag. 361 prodiit; nimirum $\underset{1,y}{u}$, nempe derivata ipsius u quoad y accepta, est

$$aAy^{a-1} + \ldots + cCy^{c-1}(\partial y)^d + \ldots;$$

nam termini ubi tantum altera variabilis ∂y reperitur (quæ dum derivata quoad aliam accipitur, constans supponitur) derivata quoad y est 0.

Ita

$$\underset{1,\partial y}{u} = bB(\partial y)^{b-1} + \ldots + dCy^c(\partial y)^{d-1} + \ldots;$$

nam terminorum ubi tantum altera variabilis y, dum derivata quoad aliam nempe ∂y accipitur, constans supposita adest, derivata quoad ∂y est 0.

Itaque superius

$$N = \underset{1,y}{u} \text{ et } P = \underset{1,\partial y}{u}$$

per u ipsum $F(y, \partial y)$ intelligendo.

Erat ex. gr. in exemplo prius allato, ubi aream datam claudens linea brevissima quærabatur, derivata quoad $\dot{x}$, denotante x aream datam,

$$\frac{1}{y}\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sit hoc $= u = F(y, \partial y)$; erit

$$F(y + \omega, \partial y + \partial\omega) = u + \omega \underset{1,y}{u} + \partial\omega \,.\, \underset{1,\partial y}{u} + \ldots;$$

atque (uti pag. 365)

$$\underset{1,y}{u} = \left(\partial \frac{\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y}\right)_{\text{quoad } y} = \frac{y\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)^{-\frac{1}{2}} y(\partial y)^2 - \left(1 + y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y^2},$$

et hoc est

$$= \frac{y^2(\partial y)^2}{y^2\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)} - \frac{\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y^2},$$

quod item ad denominatorem eundem reductum est

$$= \frac{-1}{y^2\left(1 + y^2(\partial y)^2\right)},$$

æquale coefficienti ipsius ω, atque superiori N.

Hosted by Google

Ita

$$\underset{1,\,\partial y}{u} = \left(\partial \frac{\left(1+y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y}\right)_{\text{quoad}\,\partial y} = \frac{\left(1+y^2(\partial y)^2\right)^{-\frac{1}{2}} y^2(\partial y)}{y} = \frac{y\partial y}{\left(1+y^2(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

quum heic y sit constans, et derivata quoad ∂y accipiatur; quod igitur coefficiens ipsius $\partial\omega$ est et superiori P æqualis.

Idem ad evolutionem plurium variabilium applicari atque pro statu maximi minimive

$$\int(N\omega + P\partial\omega + Q\partial^2\omega + \ldots) = 0$$

esse debere et superius dicta sequi patet.

5. Notandum tamen est et hic ut (pag. 345) terminos ulterius quoque $= 0$ esse posse; at si integrale partis reliquæ pro ω utvis exiguo sive negative sive positive accepto positivum sit, minimum, et si negativum sit, maximum esse. Quod si plures adfuerint variabiles, uti in exemplo allato ∂z erat, necesse sit pro casu maximi minimive esse seorsim quoque

$$N - \partial P = 0 \text{ et } N' - \partial P' = 0;$$

si seorsim quæratur conditio pro statu maximi minimive pro una variabili reliquis constantibus positis, et tum pro altera variabili prioribus constantibus positis, perspici potest.

At quum instituti ratio pluribus vacare haud permittat, sufficiat re vix attacta monstrare, unde plura accipi possint; magnus LAGRANGE est, qui lucem huic disquisitionum generi quoque primus affudit; legatur *Théorie des fonctions*, opus sæpius citatum, nunquam satis laudandum, quamvis giganteo plerumque passu per alpes gradiens ambulantes in vallibus relinquat. Inter plurima alia ibidem criteria etiam generalia exponuntur, e quibus dignosci queat, num partis reliquæ integrale positivum vel negativum, adeoque maximum vel minimum aut vero nullum sit; imo etiam ad casum, ubi id, quod 0 erat, ∞ fit ut supra extenditur.

Hosted by Google

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO III.

PRIMAE LINEAE THEORIAE AEQUATIONUM.

§. 38.

Ramorum in quos arbor (pag. 205) dividitur, is etiam quadamtenus explicandus est, ubi pro dato valore α functionis valor variabilis in ea quis sit, quæritur; vocatur hæc *theoria aequationum.*

Si ex. gr. quæratur, quodnam a sit ipsi x substituendum, ut sit

$$f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx^0 = 0.$$

1. Si m integer positivus sit, et in quovis termino sequenti exponens ipsius x unitate decrescat, usque ad $x^0 = 1$, atque p, q, ... constantes sint, dicitur æquatio gradus m-ti; atque si $f(x)$ ad formam

$$x^m + px^{m-1} + \ldots + tx^0$$

reductum sit, *aequatio ordinata* vocatur; a vero dicitur *radix aequationis.* Nempe coefficientium p, q, ... possunt esse quilibet, imo omnes $= 0$; adeoque pro

$$x^m = 0$$

erit

$$x = \sqrt[m]{0} = 0,$$

et pro

$$x^m + t = 0$$

erit

$$x = \sqrt[m]{-t};$$

Hosted by Google

atque nomen radicis ad alios casus quoque hinc extenditur, quamvis proprie pro his tantum casibus reipsa locum habeat.

2. Dicitur etiam *aequatio* superior *determinata*; quum mox pateat, ipsius x, si coefficientium nullus sit signo radicali affectus, aut cuiusvis unus certus valor accipiatur, valores plane numero m dari, inter quos tamen certi, imo etiam omnes æquales esse possunt, qui functionem $= 0$ reddant, quilibet eorum substituatur ipsi x. Imo si etiam plures æquationes totidemque variabiles, *incognitae* dictæ et literis pariter alphabeti ultimis designatæ fuerint, *determinata aequatio* dicitur; nempe cuilibet incognitæ valores duntaxat numero certo substitui possunt, qui æquationibus satisfaciant.

Si vero pauciores sint æquationes, quam incognitæ, *aequatio indeterminata* dicitur. Ex. gr. pro

$$x + y = 0$$

est

$$x = -y,$$

et innumeri valores ipsi x substitui possunt, qui functionem ad 0 redigant. Possunt tamen etiam in æquationibus indeterminatis, ut infra patebit, valores incognitæ certis conditionibus ita restringi, ut valores aut certo tantum numero dentur aut nullus plane sit.

Potest etiam æquatio *plus quam determinata* dicta dari, si nempe plures æquationes quam incognitæ sint; et tum proprie conditioni impossibili satisfieri nequit. Nempe hic, si dicatur æquationes numero n dari, tales intelligantur, quarum nulla per reliquas ponitur; ex. gr. hoc sensu

$$ab = x, \text{ et } \frac{x}{a} = b$$

non duæ æquationes sunt, sed unica est; duæ tantum sunt *identicae* dictæ. Ex. gr. si detur

$$x - a = 0,$$

et

$$x - \frac{a}{b} = 0,$$

quidcunque sit a præter 0 aut b præter 1, conditio impossibilis est.

Hosted by Google

3. Notandum vero est, æquationem aut aliunde dari, ut *resolvatur*, id est radix eius reperiatur, aut certa tantum data exhiberi, e quibus sagacitas æquationem condat; cuius regulæ non dantur, nisi quod perspiciatur, quid sit quærendum, et incognitarum numerus ad minimum redigatur, atque illæ literis ultimis denominentur, et æquatio e datis statuta ordinetur; ac tum per regulas dicendas radix eius quæratur.

4. Notandum etiam est, non quamvis æquationis radicem petito satisfacere. Nempe ex. gr. si puella dixerit, eius ætatem talem x esse, quæ per matris, quæ illam 40-mo ætatis suæ anno peperit, ætatem multiplicata, Methusalemi ætatem exæquet; minime dixit, ætatem suam cuilibet x æqualem esse, quod tale est, ut $x(40+x)=969$; nempe æquationis huius etiam -57 radix est; sed ætas puellæ est talis, ut alicui radicum huius æquationis sit æqualis (pag. 107); tunc tantum est incognita quæsita cuilibet radici æquationis certo æqualis, quum unica tantum radix datur, uti in æquatione gradus primi.

5. Quod ordinationem æquationis attinet, si x nullo signo radicali subsit, prius per quemvis divisorem, in quo x adest, æquatio multiplicetur, id est tam functio ipsius x, quam 0 ad dextram; et tum colligantur e tota functione ipsius x, quæ $=0$ ponitur, omnes termini, in quibus x ad eundem exponentem elevatum est, et summa coefficientium tanquam coefficiens potentiæ illius ipsi præfigatur; atque si potentia summa ipsius x coefficiente gaudeat, per hunc dividatur æquatio. Et manifesto reducetur æquatio ad formam superiorem; atque si huic æquationi satisfiat per $x=a$, idem a et functionem priorem ad 0 rediget. (pag. 12).

Si vero x signo radicali subsit, casus simpliciores sunt sequentes.

Si exponens aliquis aut plures fracti sint, reducantur potentiæ omnes ipsius x ad denominatorem communem, sit is n; et fiet pro potentia priore ipsius x in quovis termino, $x^{\frac{1}{n}}$ elevatum ad exponentem numeratori exponentis novi æqualem.

Ex. gr.

$$x^{\frac{2}{3}}+px^{\frac{1}{2}}+qx^{0}=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{4}+p\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{3}+q\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{0}$$

Hosted by Google

pro $x^{\frac{1}{6}} = y$ est

$$= y^4 + py^3 + q,$$

et si valor α reperiatur, quo ipsi y substituto functio posterior ad o redigatur, erit propter

$$y = \sqrt[6]{x},$$

adeoque

$$y^6 = x,$$

valor α^6 in functione priore ipsi x substituendus, ut functio ad o redigatur; nam

$$y^4 = (\sqrt[6]{x})^4 = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}},$$

et ita de reliquis terminis patet.

At si potentia ipsius x per constantem multiplicata et addita quantitati alicui sit simul signo radicali subiecta, casus tantum simplicioris exempla ostendere sufficiat.

Si tantum in uno termino sit hoc et reliquum dicatur X, adeoque functio sit ex. gr.

$$X + \sqrt[n]{a+bx^2},$$

erit

$$X = -\sqrt[n]{a+bx^2},$$

et

$$X^n = -(a+bx^2),$$

si n impar sit, et

$$X^n = a + bx^2,$$

si n par sit; ex. gr.

$$-\sqrt[3]{8} = -2,$$

et

$$(-\sqrt[3]{8})^3 = (-2)^3 = -8,$$

at

$$(-\sqrt{4})^2 = 4.$$

Aut potest poni

$$(-X)^n = a + bx^2.$$

Sit

$$\sqrt{a+bx^3} + \sqrt{c+x} - \sqrt[3]{d+ex^2};$$

hoc brevius ad formam

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt[3]{A}$$

Hosted by Google

reduci potest, et elevando ad 3 fit

$$\alpha\sqrt{\alpha}+3\alpha\sqrt{\beta}+3\beta\sqrt{\alpha}+\beta\sqrt{\beta}=A,$$

idest

$$(\alpha+3\beta)\sqrt{\alpha}+(3\alpha+\beta)\sqrt{\beta}=A,$$

quod per $\gamma\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}$ exprimendo fit

$$A^2=\gamma^2\alpha+\delta^2\beta+2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta},$$

quod ad formam

$$B=2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}$$

reducendo fit

$$B^2=4\gamma^2\delta^2\alpha\beta$$

et valoribus substitutis functio a signo radicali libera prodibit, seu ut dici solet, *rationalis* reddetur, atque modo supra dicto ordinari poterit.

Sit

$$\sqrt{\frac{a+x}{(b+x)^3}}+\sqrt{c+x}+\sqrt{d-x^3}+\sqrt{x-e};$$

multiplicetur æquatio, supponendo functionis valorem $=0$ esse, per $\sqrt{(b+x)^3}$; patet æquationem formæ sequentis inde emanare,

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta},$$

unde

$$\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=\gamma+\delta+2\sqrt{\gamma\delta},$$

et hinc æquatio formæ sequentis prodit

$$A=\sqrt{B}+\sqrt{C};$$

unde

$$A^2=B+C+2\sqrt{BC},$$

et

$$(A-B-C)^2=4BC.$$

Calculo sæpe operoso e functione primo obtutu simplici æquationem ex ingenti literarum numero demum ordinari, perspici potest.

6. Si vero æquatio e datis constructa et ordinata fuerit, tum si æquationis gradus eiusdem resolutio generalis detur, nonnisi in formula

Hosted by Google

generali ipsius x functionem ad 0 redigentis substituenda substitui debent. Nempe

$$x^1 + a = 0$$

est forma *aequationis gradus primi*, et quæcunque æquatio reducatur ad hanc formam, erit

$$x = -a,$$

quum

$$-a + a = 0$$

sit. Ita quæcunque æquatio reducatur ad formam

$$x^n + a = 0,$$

erit

$$x = \sqrt[n]{-a},$$

quum

$$(\sqrt[n]{-a})^n + a = -a + a = 0$$

sit. Dicitur eiusmodi æquatio gradus n-ti *pura*, si vero adhuc in aliquo termino potentia ipsius x exponentis altioris quam 0 adsit, *affecta* audit.

7. *Quadraticae aequationis formula* est

$$x^2 + px + q = 0,$$

quæ si p non 0, affecta est; quum modus puram resolvendi in aperto sit, ultro succurrit de modo, quo affecta pura reddatur, cogitare; et quum tale quæratur, quod ipsi x substituendo totam functionem $= 0$ reddat, via aperitur quærendi, quidnam ipsi x substitui posset, quod terminum ipsi px respondentem $= 0$ efficeret? Sit id $= y + k$; erit

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (y + k)^2 + p(y + k) + q \\ &= y^2 + 2ky + k^2 + py + pk + q \\ &= y^2 + (2k + p)y + k^2 + pk + q; \end{aligned}$$

ubi illico patet, k ita accipi posse, ut

$$2k + p = 0,$$

adeoque

Hosted by Google

$$(2k+p)y=0$$

sit, et æquatio pura reddatur, e qua prodeunti y addito k prodeat x.

Est nempe

$$k=-\frac{p}{2},$$

et

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-k^2-pk-q} \\ &= \sqrt{-k(k+p)-q} \\ &= \sqrt{\frac{p}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)-q} \\ &= \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,; \end{aligned}$$

adeoque

$$x=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}.$$

Itaque sicubi functio ad formam x^2+px+q reducta fuerit, *differentia dimidii coefficientis primi*, id est coefficientis ipsius x, *a radice quadrata e differentia coefficientis secundi*, per quem x^0 multiplicatur, *a quadrato dimidii coefficientis primi*, est talis quantitas, quæ si ipsi x substituatur, æquationem ad 0 rediget; uti et id ipsum per æquationem generalem Tyrones tentare quoque possunt.

Sunt autem manifesto duo valores ipsius x, nec plures; nam signum $\sqrt{\ }$ duos valores sibi invicem oppositos, alioquin æquales, parit, reliquæ operationes autem unici resultati sunt, posito nempe cuiusvis coefficientis unicum valorem esse; nam si in $x+a$ per a denotetur $\sqrt{4}$, erit $x=\sqrt{4}$. Est vero sæpe valor uterque imaginarius; adeoque si realis quæratur, petito satisfieri non posse in tali casu patet. Ex. gr. si quantitas x quæratur, cuius quadratum sit $=x-2$, erit

$$x^2-x+2=0,$$

et

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-2},$$

quod satisfacit quidem æquationi, sed imaginarium est, quia

Hosted by Google

$$\sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Videatur id etiam quod (pag. 133) de $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ dictum est.

8. Facile interim patet, modum, quo terminus æquationis ordinatæ secundus dispareat, ad quemvis gradum m applicari posse; si nempe

$$x = y + k,$$

et ut in æquatione gradus secundi erat

$$k = -\frac{p}{2},$$

fiat

$$k = -\frac{p}{m}.$$

Nam

$$\begin{array}{lll}
(y+k)^m & = y^m + my^{m-1}k + \frac{m(m-1)}{2}y^{m-2}k^2 + \ldots \\
p(y+k)^{m-1} = & \quad py^{m-1} + p(m-1)\ y^{m-2}k + \ldots \\
q(y+k)^{m-2} = & \qquad\qquad\qquad\quad qy^{m-2} + \ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

ubi summa coëfficientium ipsius y^{m-1} est $mk+p$; adeoque si

$$k = -\frac{p}{m}$$

accipiatur, æquationis novæ eiusdem gradus m terminus secundus disparebit.

Pariter disparebit tertius, si pro coëfficientium ipsius y^{m-2} summa, nempe

$$\frac{m(m-1)}{2}k^2 + p(m-1)k + q = 0,$$

valor ipsius k quæratur, sed ad terminum tertium resolutio æquationis secundi gradus requiritur, uti facile patet resolutionem æquationis $(n-1)$-ti gradus requiri, ut terminus n-tus dispareat; quum in serie superiore exponentes ipsius k in quovis termino ulteriore unitate crescant, verticaliter eorsum versus decrescant. Interim non sequitur valores ipsius

Hosted by Google

k e duabus æquationibus prodeuntes æquales esse, ut simul plures termini dispareant.

9. Notandum autem est, substitutionem dictam novæ incognitæ viam ad transformationes æquationum alias quoque aperuisse, de quibus inferius.

Sublato tamen termino secundo via ad resolutionem æquationis cubicæ patefit. Nempe æquatio generalis tertii gradus

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

sublato termino secundo sub formam

$$X^3 + aX + b = 0$$

venit, pro $x = X + k$ et $k = -\frac{p}{3}$; pro qua æquatione si $X = \beta$, erit

$$\beta^3 + a\beta + b = 0,$$

et erit

$$x = \beta - \frac{p}{3}.$$

Itaque X quæritur.

Sit

$$X = y + z;$$

quo valore substituto erit

$$X^3 + aX + b = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + ay + az + b = 0,$$

idest

$$y^3 + z^3 + (3yz + a)(y + z) + b = 0.$$

Si iam ipsorum y et z tales valores reperiantur, ut

$$y^3 + z^3 + b = 0,$$

et simul

$$3yz + a = 0$$

sit; tum et

$$(3yz + a)(y + z) = 0$$

erit, adeoque

$$y^3 + z^3 + (3yz + a)(y + z) + b = 0$$

Hosted by Google

erit, et summa illorum y et z ipsi X substituta, functionem

$$X^3 + aX + b = 0$$

reddet.

Pro $3yz + a = 0$ autem est

$$y = -\frac{a}{3z},$$

et hoc valore in $y^3 + z^3 + b$ substituto, fit

$$z^3 - \frac{a^3}{27z^3} + b = 0;$$

nempe datur tale z quod functionem istam æqualem 0 reddat; multipli cando enim per z^3, fit si $z^3 = u$ ponatur,

$$z^6 + bz^3 - \frac{a^3}{27} = u^2 + bu - \frac{a^3}{27} = 0$$

e qua æquatione quadratica reperitur

$$u = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2},$$

cuius z radix cubica est.

Dato z vero et y reperitur; substituto enim valore ipsius z in $y^3 + z^3 + b = 0$, erit

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-z^3 - b} \\ &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - b} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \end{aligned}$$

atque

$$X = z + y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}},$$

et demum x prodit, addendo $-\frac{p}{3}$ valori huic ipsius X, qui functionem $X^3 + aX + b$ zero æqualem reddit; et pro $X - \frac{p}{3} = x$ functio proposita

Hosted by Google

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

fit.

Notandum tamen est regulam istam CARDANI, quamvis semper satisfaciat algebraice, pro casu ubi $\frac{a^3}{27}$ negativum et $> \frac{b^2}{4}$ est, radices reales forma imaginarii exhibere; demonstrari enim facile potest, æquationis cubicæ semper unam radicem realem esse; atque si hæc c sit, æquationem esse productum ex $X - c$ et æquatione quadratica, et huius plane pro dicto casu radicem utramque realem esse.

10. Ex hoc resolutio æquationis gradus quarti modo sequente deducitur. Potest hæc sublato termino secundo, ad formam

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

reduci, quod ostendi potest, esse

$$\begin{aligned} &= (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) \\ &= x^4 + (b + c - a^2)x^2 + (ac - ab)x + bc. \end{aligned}$$

Nam valores ipsorum a, b, c prodeunt ex

$$b + c - a^2 = A, \quad ac - ab = B, \quad bc = C$$

positis; nempe

$$b + c = A + a^2, \quad c - b = \frac{B}{a};$$

unde æquationem posteriorem addendo priori, fit

$$2c = A + a^2 + \frac{B}{a};$$

subtrahendo vero posterius e priore, est

$$2b = A + a^2 - \frac{B}{a};$$

atque hinc

$$c = \frac{A + a^2}{2} + \frac{B}{2a} = \frac{Aa + a^3 + B}{2a},$$

et

$$b = \frac{Aa + a^3 - B}{2a};$$

Hosted by Google

atque

$$bc = C = \frac{Aa + a^3 + B}{2a} \cdot \frac{Aa + a^3 - B}{2a}$$
$$= \frac{a^6 + 2Aa^4 + A^2a^2 - B^2}{4a^2};$$

et hinc si $u = a^2$ ponatur, erit

$$\frac{u^3 + 2Au^2 + A^2u - B^2}{4u} = C,$$

et

$$u^3 + 2Au^2 + A^2u - B^2 - 4Cu = 0,$$

idest

$$u^3 + 2Au^3 + (A^2 - 4C)u - B^2 = 0;$$

quæ cum æquatio cubica sit, reperitur u, adeoque et $a = \sqrt{u}$ et tum dato a ex

$$b + c - a^2 = A,$$

erit

$$b = A + a^2 - c,$$

quo valore substituto ipsi b in

$$ac - ab = B,$$

erit

$$ac - aA - a^3 + ac = B,$$

et

$$c = \frac{B + aA + a^3}{2a};$$

quo item in valore ipsius b substituto ipsi c, repertis a, b, c resolvi poterunt æquationes quadraticæ $x^2 + ax + b$ et $x^2 - ax + c$, e quarum facto conflata functio $x^4 + Ax^2 + Cx + C$ est; atque tum quævis radix cuiusvis illarum æquationum quadraticarum erit radix æquationis posterioris; nam

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) = 0$$

erit, si x tale sit in uno factore, quod eum 0 reddat; quia factum quoque ex hoc et factore altero 0 erit.

Manifesto autem et hoc priori operosius difficultati eidem obnoxium est; ad alia igitur media, quibus radix æquationis gradus cuiusvis repe-

Hosted by Google

ritur aut saltem approximatur, confugiendum est. Eo magis quod quamvis innumeræ æquationes altiores resolubiles dentur, formula generalis per coefficientes p, q, ... determinata, nempe functio algebraica (pag. 206), ut in secundi tertii et quarti gradus æquationibus, dari nequeat, quod iam in opere (pag. 206) citato monitum erat; quamvis in eodem pluribus æquationibus altioribus ita resolutis, ut radix *operationum (additionis, multiplicationis et extractionis radicis quadratae) certo numero*, exhibeatur (prorsus mira summi ingenii sagacitate, et profundissimo acumine), talia præstita sint, quæ antea Geometris per annorum millia impossibilia videbantur, uti *peripheriae divisio per n, constructione geometrica* perficitur, si quidem n numerus primus formæ 2^m+1, aut productum fuerit e primis huius formæ, ita ut nullus, excepto 2, pluries quam semel ut factor occurrat; et quidem cum illa restrictione, ut id per nullum alium integrum n fieri queat. Nimirum etsi opus primo aspectu heterogeneum sit, ex (pag. 125) nexus intelligi potest; nam si ex. gr. æquatio

$$x^{17}-1=0$$

numero certo operationum dictarum resolvatur, cosinus 17-mæ partis peripheriæ, adeoque polygonum regulare 17 laterum geometrice construitur, quum 17 requisita qualitate gaudeat; et plane stupendum est, opus istud giganteum ab adolescente 17 annos vix excedente perfectum fuisse.

Exempla.

a) E datis ætatis puellæ (pag. 374) est

$$x(40+x)=969,$$

adeoque

$$x^2+40x-969=0,$$

quod sub formam x^2+px+q cadit; itaque

$$x=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-20+\sqrt{400+969},$$

cuius valores sunt

Hosted by Google

$$-20+37=17, \text{ et } -20-37=-57;$$

quorum duorum valorum uni, nempe ipsi 17, est puellæ ætas æqualis.

b) Notum est gravitates specificas esse uti pondera absoluta divisa per volumina, adeoque uti pondera absoluta, si volumina fuerint æqualia; notum etiam est, corpus fluido totum immersum e pondere suo tantum amittere, quantum pondus fluidi illius est, cuius locum occupat; hinc si corporis dicti pondus P, gravitas specifica G sit, et fluidum sit aqua, cuius, pro certa temperatura sub altitudine certa barometri gravitas specifica sit 1; erit si pondus amissum p sit, hoc p pondus aquæ sub volumine corporis volumini æquali. Itaque erit

$$G:1=P:p,$$

adeoque

$$G=\frac{P}{p}, \text{ et } p=\frac{P}{G}.$$

Hinc problematis Archimedei resolutio. Sit corona ponderis P, summa auri x et argenti $P-x$, denotante x quoque pondus; atque volumen miscelæ sit æquale summæ mixtorum, quamvis ex. gr. spiritus vini voluminis v et aqua voluminis v commixta volumen minus quam $2v$ nanciscantur. Sit auri gravitas specifica G, et argenti sit g; atque P amittat in aqua pondus A; erit

$$\frac{x}{G}+\frac{P-x}{g}=A;$$

nempe pondus absolutum divisum per gravitatem specificam dat pondus amissum, id est pondus voluminis aquæ eiusdem; et summa ponderis amissi partis aureæ et argenteæ ponitur æqualis ponderi amisso coronæ.

Hinc ordinando fit

$$\frac{x}{G}-\frac{x}{g}+\frac{P}{g}-A=0,$$

seu

$$x\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)+\frac{P}{g}-A=0,$$

adeoque

Hosted by Google

$$x+\left(\left(\frac{P}{g}-A\right):\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)\right)=0;$$

quod sub formam $x+a=0$ venit, adeoque $x=-a$, seu pro casu hoc est

$$x=-\left(\frac{P}{g}-A\right):\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)=-\frac{P-Ag}{g}:\frac{g-G}{Gg}=$$

$$=-\frac{(P-Ag)G}{g-G}=\frac{(P-Ag)G}{G-g}.$$

c) Si quæratur, quanti ponderis x suber sit ferro ponderis P addendus, ut in aqua quocunque immersum quiescat: sit G gravitas specifica ferri, g suberis; erit pondus aquæ depulsæ $\frac{P}{G}+\frac{x}{g}$, prius ferro, posterius suberi respondens; atque

$$\frac{P}{G}+\frac{x}{g}=P+x.$$

Tunc enim requiescet, quum summa ponderum tantum premit deorsum, quantum aqua sustinet. Itaque

$$x\left(\frac{1}{g}-1\right)+\frac{P}{G}-P=0, \text{ et } x+\left(\left(\frac{P}{G}-P\right):\left(\frac{1}{g}-1\right)\right)=0$$

adeoque

$$x=-\left(\frac{P}{G}-P\right):\left(\frac{1}{g}-1\right)=\frac{(P-PG)g}{G(g-1)}.$$

d) Si quæratur quantænam diametri x quoad pedem expressæ sit sphæra, cuius involucri, cuius modo crassities negligatur, pes quadratus ponderet q; ut in aëre cuius pedis cubici pondus sit α, requiescat, si ipsa tali aëre repleatur, cuius pedis cubici pondus β est: erit sphæræ volumen $\frac{x^3\pi}{6}$, superficies autem $x^2\pi$, atque pondus sphæræ cum involucro erit $\frac{x^3\pi\beta}{6}+x^2\pi q$, quod ponderi aëris externi eiusdem voluminis æquale esse debet; itaque

$$\frac{x^3\pi\beta}{6}+x^2\pi q=\frac{x^3\pi\alpha}{6};$$

Hosted by Google

adeoque dividendo per $x^2\pi$, et ordinando, fit

$$\frac{x\beta}{6}+q-\frac{x\alpha}{6}=x\,\frac{\beta-\alpha}{6}+q=0;$$

et

$$x+\left(q:\frac{\beta-\alpha}{6}\right)=0,$$

atque

$$x=-\frac{6q}{\beta-\alpha}=\frac{6q}{\alpha-\beta}.$$

e) Si pondus pedis cubici ferri sit q, et quæratur, quantanam sit diameter x globi tormentarii ponderis P, quoad pedem expressa? Erit

$$\frac{x^3\pi q}{6}=P,$$

adeoque

$$\frac{x^3\pi q}{6}-P=0,$$

et

$$x^3-P:\frac{\pi q}{6}=0,$$

atque

$$x=\sqrt[3]{\frac{6P}{\pi q}}.$$

f) Si quæratur ferrum ponderis P quantumnam pedis cubici sit? Sit x, et sit pondus pedis cubici aquæ α, et gravitas specifica ferri sit γ, sitque $\frac{P}{\alpha}=y$; erit $x=\frac{y}{\gamma}$, nempe quo maior gravitas specifica, volumen pro eodem pondere eo minus erit; itaque

$$x=\frac{P}{\alpha\gamma}.$$

g) Motus soni, ut lucis, æquabilis est; percurrat sonus in certo aëre certæ temperaturæ sub 1″ id est minuto secundo spatium s; quæritur certus obex, rupes aut murus exstruendus, ad quam distantiam minimam esse debeat, ut certum hexametrum reddat? Distantia hæc manifesto tanta x est, ut si ad versum pronunciandum n'' requirantur, prima syl-

Hosted by Google

laba pronunciatione finita redeat, adeoque hæc viam ns percurrat; quæ quum dupla sit distantiæ obicis erit $x = \frac{ns}{2}$.

h) Si lapis in puteum demittatur, et effluxerint n minuta secunda a dimissione lapidis usquequo sonus eius aquam attingentis in aurem perveniat; quæritur, quanta sit profunditas usque ad aquæ superficiem?

Sit ea x; temporis effluxi pars prior ad descensum lapidis requirebatur, quæ $= \sqrt{\frac{2x}{g}}$, et altera ad ascensum soni, quæ est $\frac{x}{s}$. Itaque

$$n = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{s},$$

adeoque

$$n - \frac{x}{s} = \sqrt{\frac{2x}{g}},$$

et quadrando est

$$n^2 - \frac{2nx}{s} + \frac{x^2}{s^2} = \frac{2x}{g};$$

unde

$$\frac{x^2}{s^2} + x\left(-\frac{2n}{s} - \frac{2}{g}\right) + n^2 = 0,$$

et

$$x^2 + x\left(-2ns - \frac{2s}{g}\right) + n^2s^2 = 0,$$

quod sub forman $x^2 + px + q = 0$ veniens resolvitur (pag. 378).

i) In thermometro est ad punctum regelationis glaciei aquæ 0 *Reaumur*, atque *Fahrenheit* 32 gradibus suis inferius posuit zero; ad punctum ebullitionis aquæ, sub altitudine barometri normali ☿, sunt $80R$ et $212F$; itaque

$$80R = 180F,$$

et

$$1R = \frac{9F}{4},$$

et

$$1F = \frac{4R}{9}.$$

Si igitur quæratur, nR quot F facit, sit xF, et n positivum; erit

Hosted by Google

$$nR = \frac{9nF}{4} + 32F = x,$$

ita

$$-nR = -\frac{9nF}{4} + 32F = x,$$

nam e numero graduum Fahrenheitianorum, quos Reaumuriani infra $0R$ efficerent, 32 sunt Fahrenheitio positivi; consequenter

$$x = \frac{9n}{4} + 32,$$

si n generaliter numerum graduum R sive positivorum sive negativorum denotet. Unde si quæratur xF quot R facit, erit

$$n = \frac{4}{9}(x - 32).$$

k) Si quæratur, index minutarius quando assequetur horarium, si hic ad XII et is ad XI sit? Sit unitas temporis hora, et unitas spatii $\frac{1}{12}$-ta pars peripheriæ, in qua tanquam puncta directione eadem circulari moveri indices concipiantur; unitates hæ arbitrarie ponuntur, sed celeritatis unitas tum determinata, nempe illa est, qua mobile tempore horæ $\frac{1}{12}$-tam peripheriæ describit. Erit igitur 1 celeritas horarii, et 12 minutarii, et 720 celeritas secundarii, qui nempe sub hora 60-ies percurrit peripheriam, quæ $=12$. Dicatur x tempus ad cuius finem horarius minutariusque in coniunctionem veniant. Spatium est in motu æquabili æquale celeritati per tempus multiplicatæ, et via a minutario percurrenda est maior via horarii, illi nempe id quoque quo retro est, decurrendum est, sit hoc a; erit igitur

$$12x = a + x, \quad \text{unde} \quad 11x - a = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{11},$$

quod pro casu dicto est $=\frac{1}{11}$-tæ unius horæ, nam si minutarius ad XI sit, $a = 1$ est. Si vero $a = 0$ sit, tum per $\frac{a}{11}$ nonnisi id exprimitur, quod abinde usque ad coniunctionem nullum tempus sit; sed proxima sequens coniunctio ita exhibetur, si a ponatur $=12$, nempe statim post illud tem-

Hosted by Google

poris punctum, quantumvis exiguum tempus sit, spatium minutarii 12-ies maius erit, adeoque simul esse non poterunt, priusquam minutarius totum circulum percurrendo eodem perveniat, ubi in coniunctione erat, et præterea etiam spatium horarii sub eo tempore percursum et postea usque ad coniunctionem percurrendum exæquet; est autem, tempore a coniunctione priore ad proximam usque x dicto, spatium horarii x, minutarii autem $12x$, itaque

$$12x = 12 + x$$

esse debet; unde

$$x = \frac{12}{11} = 1 \text{ horæ} + \frac{1}{12}\text{-tæ unius horæ.}$$

Ita si secundarius ab horario distantia b retro sit; erit tempore, quod usque ad coniunctionem est, y dicto,

$$720y = b + y,$$

et

$$y = \frac{b}{719},$$

et si $b = 0$, ut antea, erit $y = \frac{12}{719}$, quod a coniunctione secundarii cum horario usque ad proximam est.

l) Si autem quæratur, quandonam minutarius secundariusque cum horario simul in coniunctionem veniant; si tam a quam b sit 0, tum manifesto tam x quam y numero certo effluxisse oportet, ut tres indices simul sint; nam si tres simul sint, tum et minutarius et secundarius in coniunctione cum horario est; itaque $nx = my$, pro n, m integris, esse debet; adeoque

$$\frac{n \,.\, 12}{11} = \frac{m \,.\, 12}{719},$$

seu

$$n = \frac{11m}{719},$$

cuius quum 11 non metiatur numerum 719, valor minimus integer est pro $m = 719$, et tum $n = 11$ erit; id est 11-ies evenire novam minutarii

Hosted by Google

cum horario coniunctionem oportet, sive 719-ies coniunctionem secundarii cum horario; idest coniunctio trium proxima fiet ad finem 12 horarium. Ita si plures sint, cuiusvis coniunctio cum tardissima prius quærenda est.

m) Notandum vero est, posse hos indices quoque ita locari, ut nunquam in coniunctionem venire queant. Sit ex. gr. secundarius cum horario in coniunctione, et distantia minutarii, qua retro est, sit $a = \frac{11}{2.719}$, nempe contra structuram horologii ponatur ita, immotis ceteris. Erit tempus, quod usque ad proximam minutarii cum horario coniunctionem requiritur $= \frac{1}{2.719}$; atque, pro n, m integris, deberet esse

$$\frac{1}{2.719} + nx = my,$$

ut tam minutarius quam secundarius cum horario in coniunctione sint; itaque

$$\frac{1}{2.719} = \frac{12m}{719} - \frac{12n}{11},$$

et hinc reducendo ad denominatorem eundem, et utrinque per 11.719 multiplicando

$$\frac{11}{2} = 12.11m - 719.12n;$$

quod absurdum est, nam membrum ad dextram numerus integer est, ad lævam autem est

$$= 5 + \frac{1}{2}.$$

n) Attentionem meretur etiam acuta *Zenonis* obiectio, in qua germen primum progressionis geometricæ, et seriei infinitæ convergentis limitisque, motus retardati, imo etiam dependentiæ unius variabilis ab alia, atque problematis proximi resolutio reperitur.

Sit sub 1-mo t, 2-do t, 3-tio t, . . . $(m-1)$-to t, m-to t

Hosted by Google

$$\begin{array}{llllll} \text{via testudinis} & 1, & \frac{1}{n}, & \frac{1}{n^2}, \ldots & \frac{1}{n^{m-2}}, & \frac{1}{n^{m-1}}, \\ \text{Achillis} & 0, & 1, & \frac{1}{n}, \ldots & \frac{1}{n^{m-3}}, & \frac{1}{n^{m-2}}, \end{array}$$

nempe si ea ponatur conditio, ut celeritas Achillis sit celeritate testudinis n-ies maior semper post primum t; dependebit Achillis celeritas in quovis t a celeritate testudinis, qua sub illo t ire libuerit; si itaque sub quovis sequente t testudo celeritate n-ies minori moveatur, Achilles sub quovis t quidem n-ies maiorem viam describet, sed via testudinis erit usque ad finem cuiusvis m-ti t summa terminorum seriei superioris usque ad $\frac{1}{n^{m-1}}$ inclusive, via Achillis autem est summa seriei inferioris eousque; patet vero, ab 1 incipiendo, quemvis terminum μ-tum unius μ-to alterius æqualem esse, sed terminum sub $(m-1)$-to t superioris, m-to inferioris esse æqualem; adeoque ad finem m-ti t viæ testudinis excessum supra viam Achillis esse semper æqualem termino m-to superioris. Itaque pro temporibus t æqualibus, dependentia ista celeritatis Achillis posita, testudinem nunquam assequetur, at excessus iste nempe $\frac{1}{n^{m-1}} \backsim 0$; et si tantum ad distantiam 1 ab Achille, motum incipere testudo ponatur, limes viæ testudinis erit limes summæ seriei, cuius exponens $\frac{1}{n} < 1$ est, nempe

$$\frac{1}{n} : \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} : \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n-1},$$

et si testudo, sublata conditione priore, æquabiliter repat, et celeritas eius sit 1, erit celeritas Achillis n, ac si tempus quo eam assequetur, x dicatur, erit

$$nx = x + 1,$$

unde

$$x = \frac{1}{n-1},$$

quæ limes viæ testudinis erat, nempe $S = CT$ (pag. 48) fit $= T$ pro $C = 1$.

Pluribus exemplis brevitas necessaria supersedere iubet. Tyrones ipsi ad cubicam quoque problemata condere possunt.

Hosted by Google

§. 39.

Ex (pag. 380) ad plures æquationis transformandæ modos via aperitur, nempe:

1. Ipsi x substituendo $y+a$ (ex. gr. pro $a=1$ erit $y+1$, et $y-1$ pro $a=-1$); ubi æquationis novæ radici addendum a est, ut radix prioris æquationis prodeat; nam $x=y+a$.

2. Si ponatur $my=x$, substituendo prodibit

$$m^n y^n + pm^{n-1}y^{n-1} + qm^{n-2}y^{n-2} + \ldots + smy + t = 0;$$

cuius æquationis, quæ dividendo per m^n ordinatur, radix per m multiplicari debet, ut æquationis primitivæ radix prodeat; nam $x=my$.

3. Si ponatur $y=mx$; substituendo $\frac{y}{m}$ ipsi x ubique, fiet æquatio primitiva

$$\frac{y^n}{m^n} + \frac{py^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{m^{n-2}} \ldots + \frac{sy}{m} + t = 0,$$

ubi radix huius æquationis, quæ per m^n multiplicata ordinatur, per m dividi debet, ut radix primitivæ prodeat; nam $x=\frac{y}{m}$. Si vero $m=-1$ sit, y nempe radix novæ æquationis per -1 divisa, sive multiplicata, fit radix æquationis primitivæ; id est radices novæ priorum oppositæ sunt.

4. Si $x=\frac{1}{y}$ ponatur, atque $\frac{1}{y}$ substituendo ipsi x, æquatio ordinetur; per radicem æquationis novæ unitas dividenda erit, ut x nempe radix æquationis primitivæ prodeat; eritque maxima radix, ex. gr. positiva, æquationis novæ minima prioris; nam quo maius y, eo minus $\frac{1}{y}$ est.

5. Atque (ex 1.) si per theorema binomiale evolvantur termini æquationis novæ, in quam prior, nempe $f(x)=0$, mutata est; erit, $\alpha+y$ ponendo pro x,

Hosted by Google

$$
\begin{aligned}
(\alpha+y)^n &= \alpha^n + n\alpha^{n-1}y + \ldots + P\alpha^2 y^{n-2} + \alpha y^{n-1} + y^n,\\
p(\alpha+y)^{n-1} &= p\left(\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha^{n-2}y + \ldots + R\alpha y^{n-2} + y^{n-1}\right),\\
q(\alpha+y)^{n-2} &= q\left(\alpha^{n-2} + (n-2)\alpha^{n-3}y + \ldots + y^{n-2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s(\alpha+y) &= s\alpha + sy,\\
t &= t.
\end{aligned}
$$

Quorum omnium summa, collectis coefficientibus potentiarum earundem ipsius y e columnis verticalibus, erit æquatio nova, coefficientibus A, B, ... dictis

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n+2} + \ldots + Sy + \alpha^n + p\alpha^{n-1} + q\alpha^{n-2} + \ldots + s\alpha + t = 0\,;$$

ubi id, per quod potentia 0 ipsius y multiplicata est, pro ultimo accipi potest, et ab $f(x)$ nonnisi in eo differt, quod α sit pro x; unde hoc, substituendo ubique α ipsi x in $f(x)$ illico prodit; adeoque, si $\alpha = 1$ sit, erit $1 + p + q + \ldots + t$, et si $\alpha = -1$ ponatur, erit

$$(-1)^n + p(-1)^{n-1} + q(-1)^{n+2} + \ldots - s + t\,;$$

quod mox, dum radix æquationis altioris quæretur, usui erit.

6. In (pag. 393, 3.) si æquatio per m^n multiplicetur; fiet

$$y^n + mpy^{n-1} + m^2qy^{n-2} + \ldots + m^{n-1}sy + m^n t = 0\,;$$

et manifesto, si quis coefficiens fractus sit, denominatore m præditus, is a denominatore liberabitur, cum quilibet terminus per potentiam integram ipsius m multiplicetur. Itaque si minimus talis numerus eligatur, quem coefficientis cuiusvis, etiam ipsius y^0, ad terminos minimos reducti denominator metitur, atque pro m is sumatur, quivis coefficiens, si antea quantitas realis et commensurabilis fuerit, numerus integer evadet; atque postmodum nonnisi de tali casu sermo erit.

Notandum tamen est, uti e deductione patet, heic nullam potentiam ipsius y negligendam esse, etsi coefficiens alicuius 0 fuerit.

Hosted by Google

7. Posito, quod vix credibile esset a Geometris pluribus celebribus per se evidens visum fuisse, æquationem cuiusvis gradus radice aliqua, si non reali, saltem imaginaria gaudere; facile sequitur æquationem gradus n radices numero n nec plures paucioresve habere. Nempe quidcunque sit a, est

$$x^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-1}x^0) + a^n$$

et in genere

$$\beta x^\mu = (x-a)(\beta x^{\mu-1} + \beta a x^{\mu-2} + \beta a^2 x^{\mu-3} \ldots + \beta a^{\mu-1} x^0) + \beta a^\mu;$$

nam multiplicando prius per x, tum per $-a$ prodibit

$$\begin{aligned} &\beta x^\mu + \beta a x^{\mu-1} + \beta a^2 x^{\mu-2} + \ldots + \beta a^{\mu-1} x + \beta a^\mu \\ &\quad - \beta a x^{\mu-1} - \beta a^2 x^{\mu-2} - \ldots - \beta a^{\mu-1} x - \beta a^\mu; \end{aligned}$$

quod $= \beta x^\mu$ est, pro quovis valore ipsius x.

Tyrones, ipsi n possunt ex. gr. 5 substituere, ut clarius perspiciant. Est vero hinc

$$\begin{aligned} &x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + sx + t = \\ &\quad = (x-a)\big(x^{n-1} + (a+p)x^{n-2} + (a^2 + ap + q)x^{n-3} + \\ &\qquad + (a^3 + a^2p + aq + r)x^{n-4} + \ldots + \\ &\qquad + (a^{n-1} + a^{n-2}p + \ldots + ar + s)\big) + \\ &\qquad + a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + \ldots + sa + t. \end{aligned}$$

Ratio e sequenti exemplo, in quo etiam n ipsi 5 substitui potest, facile perspicitur.

Sit $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + tx^0$;

erit

$$\begin{aligned} x^5 &= (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) + a^5, \\ px^4 &= (x-a)(px^3 + apx^2 + a^2px + pa^3) + pa^4, \\ qx^3 &= (x-a)(qx^2 + aqx + qa^2) + qa^3, \\ rx^2 &= (x-a)(rx + ra) + ra^2, \\ sx &= (x-a)s + sa, \\ t &= t. \end{aligned}$$

Hosted by Google

Unde collectis e columnis verticalibus eiusdem potentiæ ipsius x coefficientibus, erit

$$f(x) = (x-a)\big(x^4 + (a+p)x^3 + (a^2+ap+q)x^2 + (a^3+a^2p+aq+r)x + \\ + (a^4+pa^3+qa^2+ra+s)x^0\big) + a^5 + pa^4 + qa^3 + ra^2 + sa + t.$$

Dicatur $a(x)$ id, quod intra paranthesim maiorem est, et α id, quod post parenthesim est, et quod 0 est, si a radix æquationis $f(x) = 0$ est; patet vero, quod $a(x)$ præbeat æquationem $(n-1)$-ti gradus, si $f(x)$ fuerit n-ti.

Pariter erit

$$a(x) = (x-b)\,b(x) + \beta,$$

et

$$b(x) = (x-c)\,c(x) + \gamma,$$

et ita porro donec ad tale ex. gr. $(x-d)\,d(x) + \delta$ deveniatur, ut quum $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, ... æquationes gradus in quavis sequenti unitate decrescentes præbeant, demum aliqua $d(x)$ primi gradus prodeat.

Quid autem per $b(x)$, β, $c(x)$, γ, ... intelligatur, facile ex ipso $a(x)$ et α perspicitur; nempe si primus coefficiens in $a(x)$ dicatur p', secundus q', & ..., erit applicando ad casum proximum,

$$\beta = b^4 + p'b^3 + q'b^2 + r'b + s',$$

per s' coefficientem ipsius x^0 in $a(x)$ intelligendo; unde reliqua patent.

Itaque pro quibusvis valoribus ipsorum x, a, b, c, ..., d, est

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\,a(x) + \alpha \\ &= (x-a)\big((x-b)\,b(x) + \beta\big) + \alpha; \\ &= (x-a)\;(x-b)\,b(x), \end{aligned}$$

quod est

si pro valore a ipsius x sit $f(x) = 0$, et pro valore b ipsius x sit $a(x) = 0$; nam tum

$$\alpha = a^5 + pa^4 + qa^3 + ra^2 + sa + t = 0,$$

et

$$\beta = b^4 + p'b^3 + q'b^2 + r'b + s' = 0.$$

Ita porro, si c radix ipsius $c(x) = 0$ sit, pro $x = c$ fit $\gamma = 0$, et ita porro, ut demum pro $x = d$ fiat $\delta = 0$, adeoque quodvis ipsorum α, β, γ, ..., $\delta = 0$ sit; itaque

Hosted by Google

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-d)\,d(x)$$

sit; atque

$$d(x) = (x-e).1 + \varepsilon$$

ubi $\varepsilon = 0$, si primi gradus $d(x)$ fiat $= 0$ pro $x = e$.

Atque hinc manifesto, cuivis ex. gr. ipsorum $a, b, c, \ldots, d, e$ ponatur x æquale, $f(x) = 0$ erit, et b radix æquationis $f(x) = 0$ erit; ac si n ex. gr. 5 fuerit, prodeunte $x - a$ functio $a(x)$ quarti gradus facta est, et hinc prodeunte $x - b$ prodit $b(x)$ gradus tertii, et hinc prodeunte $x - c$ prodiit $c(x)$ gradus secundi, atque hinc prodeunte $x - d$ evadit $d(x)$ gradus primi, et hinc prodeunte $x - e$, ipsa a, b, c, d, e pro casu proximo efficient quinque radices, nempe radices numero gradus ipsius $f(x) = 0$.

Consequenter si habuerit $f(x) = 0$ æquatio gradus n unam radicem, radices numero n habere constat, quarum tamen possunt aliquæ, imo omnes ut patebit, esse æquales; at quæritur, num plures habere possit? Responsio facilis est: nam si illa k nulli dictarum in casu dicto quinque radicum æquales esset, substituendo k ipsi x, fieret

$$0 = f(k) = (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)(k-e),$$

quod fieri nequit, nisi factor aliquis producti 0 sit, id est k alicui ipsorum a, b, c, d, e æqualis sit.

Solet hoc inde deduci, quod sit

$$\frac{\beta(x^\mu - a^\mu)}{x-a} = \beta(x^{\mu-1} + ax^{\mu-2} + \ldots + a^{\mu-2}x + a^{\mu-1}),$$

uti peracta divisione (pag. 150) patet; atque hinc evolutis hoc modo terminis

$$\frac{x^n - a^n}{x-a}, \quad \frac{px^{n-1} - pa^{n-1}}{x-a}, \quad \frac{qx^{n-2} - qa^{n-2}}{x-a}, \ldots, \frac{sx - sa}{x-a},$$

et denuo multiplicando quotum per $x - a$, atque addendo utrinque

$$a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + \ldots + sa + t,$$

prodibit plane id, quod supra. At pro $x = a$, fit tam dividendus quam

Hosted by Google

divisor 0, divisionem vero plane pro æquationis radice $a = x$ per $x - a$ peragi oportet. Interim (per pag. 319) fit tum

$$\frac{0}{0} = na^{n-1} + (n-1)pa^{n-2} + (n-2)qa^{n-3} + \ldots + s,$$

nempe dum $x \backsim a$, quotus ad hunc limitem tendit, quem coefficienti priori ipsius $x - a$, substituendo in eo a ipsi x, æqualem esse facile demonstrari potest, quod Tyronibus relinquitur; exemplo pro $\mu = 5$ rem illustrare possunt.

Tum item, si b ponendo pro a in nova æquatione valor huius 0 fiat, et per $a - b$ fiat divisio pro $a = b$, omnia perinde sequi patet; sed methodus prior clarior faciliorque est.

Si igitur æquatio gradus n gaudeat una radice a, erit e numero n factoribus eiusmodi uti $x - a$, $x - b$, ... conflata, et quævis literarum in iis ab x diversarum, radix erit, nec ulla alia ab his diversa datur. Ac conversim quoque si

$$(x - a)(x - b) \ldots = 0$$

erit, quodcunque ipsorum a, b, ... ponatur pro x; ex. gr.

$$(a - a)(a - b) \ldots = 0,$$

aut

$$(b - a)(b - b) \ldots = 0, \text{ \&c.};$$

quæcunque et quotvis quantitates a, b, ... fuerint, $(x - a)(x - b)$, ..., si in eo ipsi x ipsorum a, b, ... quodvis substituatur, 0 fiet; poterunt autem a, b, ... omnes æquales quoque accipi, uti

$$(x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$$

gaudet duabus quidem hoc sensu radicibus, sed quæ æquales sunt.

Si itaque æquatio productum talium factorum sit, coefficientes ipsius x a radicibus dependere facile perspicitur; et ultro sequitur in legem, qua formantur, inquirere.

8. Erat etiam (pag. 158) quæstio de facto plurium binomiorum. Multiplicando $x - a$ per $x - b$, prodit

Hosted by Google

$$x^2 + (-a-b)x + ab,$$

et hoc multiplicando per $x-c$ fiet

$$x^3 + (-a-b-c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc,$$

et idem porro continuando donec libuerit, eousque patet; quod, si literæ ab x diversæ eo signo accipiantur, uti in factoribus $x-a$, $x-b, \ldots$ sunt, denotantes radicum opposita, coefficiens primus sit summa literarum dictarum, secundus sit summa amborum, tertius summa ternorum, m-tus summa m-ionum, quæ e literis dictis accipi possunt, et quidem ita ut quævis m-io factum ex iis literis sit e quibus constat; ex. gr. pro $m=2$, si ambo e literis $-a$ et $-b$ sit, accipiatur $(-a).(-b)=ab$; ad finem vero coefficiens ipsius x^0 sit factum ex omnibus literis dictis, quod igitur semel tantum est.

Si vero de prodeunte P e numero n factoribus eiusmodi valeat lex; valet, etiamsi $(n+1)$-tus factor accedat. Nam sit novus factor $x-d$, et sit $-a=a'$, $-b=b'$, ..., $-d=d'$, atque sit coefficiens m-tus M æqualis summæ m-ionum, quæ ex n literis a', b', ... accipi possunt, et $(m+1)$-tus coefficiens sit N æqualis summæ $(m+1)$-ionum, quæ ex iisdem a', b', ... (excluso d') accipi possunt. Multiplicato P per terminum priorem ipsius $x-d$, augebitur exponens ipsius x unitate in quovis termino, adeoque et æquatio uno altior prodibit; factor $-d$ scilicet exponentes ipsius x non mutat. Est autem in P terminus m-tus (haud numerato primo, ubi potentia altissima ipsius x cum coefficiente 1 est) Mx^{n-m}, et sequens est Nx^{n-m-1}; atque multiplicando P per $x-d$, potentia exponentis $n-m$ ipsius x nonnisi ex Mx^{n-m} per $-d$, et Nx^{n-m-1} per x multiplicato prodire potest; terminus itaque facti, in quo x^{n-m} est, fiet $(N+d'M)x^{n-m}$; est autem hic terminus $(m+1)$-tus in novo facto ab x^{n+1} (excluso hoc) numerando usque ad x^{n-m}; atque N continet omnes $(m+1)$-iones quæ ex a', b', ... excluso d' accipi possunt, M vero omnes m-iones ex iisdem, quæ singulæ per d' multiplicatæ exhibent omnes $(m+1)$-iones, ex a', b', ..., d', quæ ipsum d' continent.

Quod ultimum attinet, is dum per d' multiplicatur, prodit $a'\,b' \ldots d'$;

Hosted by Google

penultimus autem per d' et ultimus per x multiplicatus, dat primam potentiam ipsius x, et sub formula dicta generali continetur.

9. Si æquatio in talem (per pag. 394) transformata sit, ut quivis coefficientium numerus integer sit; tum si radix quantitas cum unitate commensurabilis sit, numerus integer, et quidem e factoribus termini ultimi est. Nam factorem termini ultimi esse e (pag. 401) patet; si vero radix non esset numerus integer, sit $\frac{a}{b}$ pro a et b *numeris inter se primis*, quos nullus alius integer præter 1 metitur. Substituto $\frac{a}{b}$ ipsi x, esset

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{qa^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots + \frac{ra}{b} + s = 0,$$

et per b^n multiplicando, est

$$a^n + bpa^{n-1} + b^2qa^{n-2} + \ldots + b^{n-1}ra + b^ns = 0,$$

et hinc

$$\frac{a^n}{b} = -(pa^{n-1} + bqa^{n-2} + \ldots + b^{n-2}ra + b^{n-1}s);$$

quod absurdum est, nam b non metitur numerum a^n, quia, ut paulo inferius demonstrabitur, numerus primus b inter factores ipsius $aaa\ldots$ adesse deberet &; membrum æquationis ad dextram autem manens integer est. Itaque radix realis, si quantitas commensurabilis sit, numerus integer est.

Hinc modo sequente investigari potest, num radix æquationis realis commensurabilis detur; nempe factoribus termini ultimi integris ipsi x substitutis, videri potest, num valor functionis ad 0 redigatur. Ceterum si quis factorum integrorum termini ultimi radix sit, ad finem operationis sequentis prodire 0, ex operatione ipsa patet.

Sit ex. gr.

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

atque sit a radix; erit

$$a^3 + pa^2 + qa = -r;$$

adeoque

$$a^2 + pa + q = \frac{-r}{a},$$

Hosted by Google

ubi $\frac{r}{a}$ integer est, dicatur r'. Est porro

$$a^2 + ap = -r' - q,$$

et

$$a + p = -\frac{r' + q}{a},$$

ubi $\frac{r'+q}{a}$ pariter integer est, dicatur q'; est demum

$$a = -q' - p, \quad \text{et} \quad \frac{a}{a} = -\frac{q' + p}{a} = 1,$$

seu

$$\frac{q'+p}{a} + 1 = 0, \quad \frac{q'+p}{a} = -1.$$

Ex. gr. Sit

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0;$$

erit substituendo 2 ipsi x, quæ radix æquationis est, quilibet quotorum $\frac{r}{a}$, $\frac{r'+q}{a}$, $\frac{q'+p}{a}$, . . . numerus integer, et ultimus $= -1$ est, nempe

$$\frac{8}{2} = 4, \quad \frac{4-10}{2} = -3, \quad \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Nisi quilibet quotorum integer et ultimus $= -1$ sit, numerus substitutus radix esse nequit.

10. Si æquationis ordinatæ gradus μ *completae*, adeoque ex $\mu + 1$ terminis constantis, per $f(x) = 0$ designatæ, coefficientes omnes, abstrahendo a signo præposito, positivi, atque radices omnes reales sint; tot *transitus*, ex $+$ in $-$ vel vice versa, erunt, quot radices positivæ, et tot *successiones*, nempe $+ +$ aut $- -$, quot radices negativæ. Successiones signorum æqualium dicuntur breviter *successiones*, uti successiones signorum inæqualium *transitus* dicuntur.

Nam per a, b, . . . positiva intelligendo, æquatio formæ $x - a$, aut formæ $x + b$, *simplex* dicitur, et quidem prior positiva, posterior negativa; quum æquationis e talibus factoribus conflatæ prior radicem positivam a, posterior negativam $-b$ procuret.

Prodibit autem æquatio eadem, quocunque ordine multiplicentur æquationes simplices, adeoque etsi prius tantum positivæ multiplicentur,

Hosted by Google

et factum F per aliquam æquationem simplicem negativam, et quod prodit per novam negativam, et hoc item per novam, si adfuerit, multiplicentur, donec nulla supersit; aut inverse factum f e negativis per positivas simplices modo dicto multiplicetur.

Si iam numerus æquationum simplicium, adeoque radicum, positivarum sit n, et numerus negativarum adeoque numerus radicum negativarum sit m: atque demonstretur a) f per æquationem simplicem positivam multiplicatam unum transitum novum acquirere, et quodvis factum ita prodiens per æquationem simplicem positivam multiplicatum, unum transitum novum nancisci; multiplicatione per omnes æquationes simplices consummata, patebit, in $f(x)$ ad minimum n transitus dari. Ita si demonstretur b) F per æquationem simplicem negativam multiplicatum unam successionem acquirere; patebit, in $f(x)$ ad minimum m successiones adesse. Atque quum numerus omnium successionum, sive æqualium sive inæqualium, in $f(x)$ sit $n+m=\mu$, quum $\mu+1$ termini sint, plures transitus quam n dari nequeunt; nam tum m nempe numerus successionum imminueretur, quem dari constat, n transitus vero certo adsunt; ita m successiones adsunt, nec plures esse possunt, quia tum n numerus transituum imminueretur. Consequenter plane n transitus, nempe quot radices positivæ, et m successiones erunt, nempe quot radices negativæ.

Itaque nonnisi a) et b) demonstranda veniunt.

Quoad a) Sint multiplicandi signa quocunque ordine, et multiplicator sit æquatio simplex positiva, ex. gr. $x-a$, pro a positivo; erit, si tantum signa coefficientium scribantur et in facto coefficientes potentiæ cuiusvis ipsius x addantur, schema sequens; notando, quod coefficiens termini primi in utroque factore sit 1, atque terminus primus facti sit 1.1, coefficiens uno altioris potentiæ ipsius x; postea vero signa plane multiplicandi in linea facti superiore describantur, quum multiplicatio per x omnia signa immutata relinquat; multiplicando per $-a$ autem eadem signa in contraria mutata, sub secundo superioris incipiendo, uno ulterius terminentur; atque quodvis ν-tum seriei superioris et $(\nu-1)$-tum inferioris simul coefficientem potentiæ exponentis $\mu-\nu+2$ ipsius x efficiant;

Hosted by Google

quum nempe potentiæ ipsius x in multiplicando quovis termino ulterius ad dextram unitate decrescant, adeoque si primus terminus sit x^{μ}, in termino ν-to est potentia ipsius x exponentis $\mu - \nu + 1$; et idem terminus per priorem multiplicatoris terminum dat $x^{\mu-\nu+2}$, ac potentia eadem ipsius x duntaxat e multiplicatione termini $(\nu - 1)$-ti multiplicandi per terminum secundum multiplicatoris prodeat.

Quibus præmissis patet in schemate sequente

$$\begin{array}{cccccccc}
+ & - & - & + & - & + & + & - \\
+ & - & & & & & & \\
\hline
+ & - & - & + & - & + & + & - \\
 & - & + & + & - & + & - & - \quad + \\
\end{array}$$

qualisvis fuerit signorum ordo in multiplicando, quemvis transitum, qui in multiplicando est, transitum in facto parere, et præterea unum transitum accedere. Nam si in multiplicando fuerit $+ -$ aut $- +$ fiet e primo $\sqsupset$ e posteriore $\sqsubset$; atque ubi in multiplicando prima vice occurrit $-$, adeoque primus transitus est, fiet in multiplicando $+ -$ et $\sqsupset$ in facto, adeoque terminus negativus, qui cum termino primo transitum efficiet; ita postea veniens primus positivus in multiplicando producet secundum transitum in multiplicando, et secundum in facto, quum in multiplicando tum $- +$ efficiat $\sqsubset$ in facto; et ita porro quivis novus transitus in multiplicando pariet novum in facto; nam si ex. gr. prodeat in facto $\sqsupset$, sed antequam prodierit $\sqsubset$, iam terminus positivus prodiret, transitus evenit.

Consequenter quivis transitus multiplicandi transitum in facto parit. Sed præterea adhuc unus transitus in facto accedit; nam si in facto alicubi tale $\sqsupset$ occurrat, post quod nullum $\sqsubset$ est, tum in multiplicando post illud $+ -$, per quod illud $\sqsupset$ productum est, usque ad ultimum terminum quemvis negativum esse oportet; nam secus $- +$ produceret $\sqsubset$; si vero in facto tale $\sqsubset$ sit post quod nullum $\sqsupset$ est, tum in multiplicando abinde termini usque ad ultimum positivi sunt, secus $+ -$ produceret $\sqsupset$, et post $\sqsubset$ esset $\sqsupset$ contra hypothesin. Itaque quum terminus ultimus seriei superioris et inferioris e termino eodem, nempe

Hosted by Google

ultimo multiplicandi, prodeant, nempe superior per $+x$ inferior per $-$ multiplicando, in utroque casu, sive $\underline{\underline{-}}$ sive $\overset{+}{\underset{+}{}}$ occurrat in facto ultima vice, a termino seriei superioris ad ultimum inferioris unus transitus erit, in casu primo a negativo ad positivum, in altero casu a positivo ad negativum. Consequenter semper ubi per æquationem simplicem positivam multiplicatur, factum ad minimum unum transitum acquirit.

Quod *b)* attinet, qualiacunque signa multiplicandi se invicem excipiant, multiplicando per æquationem simplicem negativam, ex. gr. $x+2=0$, erunt signa multiplicatoris $+$ $+$, adeoque ex. gr. schema sequens erit:

$$\begin{array}{cccccc}
+ & - & - & + & + & - \\
+ & + & & & & \\
\hline
+ & - & - & + & + & - \\
 & + & - & - & + & + & - \\
\end{array}$$

Nempe series signorum multiplicandi ipsa est series facti tam superior quam inferior, terminis huius uno ad dextram protrusis.

Ubi in facto $\underline{\underline{-}}$ aut $\overset{+}{\underset{+}{}}$ est, in casu primo coefficiens negativus, in altero positivus est; ita termini ultimi inferioris, qui solus coefficiens ipsius x^0 est, signum quod ibidem est manet; ubi autem $\mp$ aut $\pm$ est, a magnitudine coefficientium pendet, quodnam signum terminus is nanciscatur.

Sed uti *Segner* ingeniose animadvertit, signum in facto manet id, quod in serie superiore est, donec post $\underline{\underline{-}}$ tale $\pm$ aut post $\overset{+}{\underset{+}{}}$ tale $\mp$, aut post $\mp$ tale $\pm$ aut post $\pm$ tale $\mp$ sequatur, ut si pro casu primo in $\pm$, pro secundo in $\mp$, pro tertio in $\pm$, pro quarto in $\mp$ coefficiens inferior sit maior superiore, atque pro casu tertio in $\mp$, quod ante $\pm$ est, et pro casu quarto in $\pm$, quod ante $\mp$ est, coefficiens superior sit maior inferiore; manifesto enim in his solis casibus fit *descensus* a signo seriei superioris ad sequentem inferioris, uti schemata hæc exhibent.

$$\begin{array}{c}-\\-\end{array}\diagdown\begin{array}{c}+\\-\end{array}\qquad \begin{array}{c}+\\+\end{array}\diagdown\begin{array}{c}-\\+\end{array}\qquad \begin{array}{c}-\\+\end{array}\diagdown\begin{array}{c}+\\-\end{array}\qquad \begin{array}{c}+\\-\end{array}\diagdown\begin{array}{c}-\\+\end{array}$$

Patet vero in omnibus his casibus descensum successionem parere, a $-$ ad $-$, vel a $+$ ad $+$ eundo.

Hosted by Google

Post signum autem, ad quod descensum est, series signorum inferius plane illa sequitur, quæ superius post signum, a quo descensum est; adhucdum itaque numerus successionum uno auctus est; manet vero in facto signum seriei inferioris abinde, donec post $\frac{-}{-}$ tale $\pm$, aut post $\frac{+}{+}$ tale $\mp$, aut post $\mp$ tale $\pm$ vel inverse sequatur, ut pro casu primo in $\pm$, pro secundo in $\mp$, pro tertio in $\pm$, pro quarto in $\mp$ coefficiens superior maior sit inferiore, etquidem ita ut pro casu tertio in $\mp$, pro quarto in $\pm$ coefficiens inferior sit maior superiore; in his enim casibus fiet *ascensus* a *Segnero* dictus, nempe a signo seriei inferioris ad signum superioris ascendendum erit; uti schemata hæc exhibent:

$$\frac{-}{-}\Big/\frac{+}{-} \qquad \frac{+}{+}\Big/\frac{-}{+} \qquad \frac{-}{+}\Big/\frac{+}{-} \qquad \frac{+}{-}\Big/\frac{-}{+}$$

Ubi item patet in duobus casibus prioribus unam successionem, quæ in inferiore, adeoque in multiplicando quoque est, destrui; quum in casu primo pro $- -$ fiat $- +$, in secundo pro $+ +$ veniat $+ -$; in duobus posterioribus vero transitum mutari in successionem.

Itaque si prius accesserit una successio, hic una quæ in multiplicando adfuit, destrui potest, usque ad signum, ad quod accensum est.

Post ascensum eadem signorum series, quæ in multiplicando a signo respondenti est, sequitur; atque dicta denuo repetuntur; patetque quotvis descensus fuerint, totidem successiones oriri tales, quæ in multiplicando non erant, at vero per quemvis ascensum posse successionem aliquam, quæ in multiplicando adest, destrui.

Interim descensuum numerus in omni casu numerum ascensuum uno superat; nam aut ascensus nullus est, aut datur ultimus; si nullus sit, tum si alius descensus non detur, saltem ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi æquale descendendo una successio nova producitur, quæ in multiplicando non fuit; si detur ascensus, sive unus sive plures fuerint, erit ultimus, nempe ultra quem alius non datur; atque tum is aut ad signum ultimum seriei superioris ascendet, aut ad aliquem ante ultimum; in casu posteriore manebunt signa seriei superioris sequentia usque ad ultimum, et in utroque casu accedet nova successio, descendendo ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi æquale.

Hosted by Google

Unde si in multiplicando fuerint successiones numero N, et in facto descensuum numerus sit β, ascensuum numerus erit $\beta-1$; atque etsi quovis ascensu N uno minor fieret, adeoque ex N fieret $N-(\beta-1)$, idem per numerum descensuum fieret $N-(\beta-1)+\beta=N+1$. Itaque semper ubi nova radix negativa infertur, multiplicatione per æquationem simplicem negativum factum ad minimum unam successionem acquirit.

Atque hinc per superius dicta assertum patet.

Ex. gr. $x^3+x^2-10x+8$ unam successionem et duos transitus, atque duas radices positivas, 1 et 2, ac unam negativam, -4 habet; $y^3-y^2-10y-8$ vero uno transitu et duabus successionibus gaudens, unam positivam radicem, 4 et duas negativas, -1 et -2 habet. Nempe radices posterioris sunt radicibus prioris plane oppositæ; quum substituto (pag. 393) $-y$ ipsi x, fiat

$$-y^3+y^2+10y+8=0,$$

et dividendo per -1, ut potentia suprema a signo $-$ liberetur, erit

$$y^3-y^2-10y-8=0.$$

cuius radix y est opposita radici prioris, nempe $y=-x$. Si exponens potentiæ supremæ par sit, tum termini ad exponentes pares manifesto manent, et tantum termini, in quibus exponentes impares sunt, mutantur in opposita; ubi vero exponens supremus impar est, tantum termini in quibus exponens par est, haud excepto 0, mutantur in opposita, ut radices novæ æquationis priorum oppositæ reddantur. Ex. gr.

$$x^4+6x^3-5x^2-42x+40$$

habet radices $1, 2-4, -5$, et radices ipsius

$$x^4-6x^3-5x^2+42x+40$$

sunt -1, -2, 4 ac 5.

Per præcedentia igitur si radices omnes reales sint, quot sint positivæ et negativæ, dignoscitur; observando interim, quod si quis terminus desit, 0 tam $+$ quam $-$ accipi possit; et si per hoc numerus

Hosted by Google

radicum positivarum et negativarum diverso modo indicaretur, radicem imaginariam adesse constet.

11. Si radix commensurabilis sit, illam numerum integrum (per pag. 400), et factorem termini ultimi (per pag. 401) esse constat. Itaque inter factores termini ultimi quærendus est, qui functionem $f(x)=0$ reddat, si is in ea ipsi x ubique substituatur; uti in exemplo proximo, terminus ultimus est 40, et radices, quum omnes commensurabiles sint, e factoribus integris ipsius 40 sunt.

Si tamen terminus ultimus t nimis magnus sit, multisque factoribus gaudeat, facile poterit (per pag. 394) æquatio, substituto $y+a$ ipsi x in $f(x)$, in talem transformari, cuius radici y addendum a est, ut x prodeat; adeoque e factoribus ipsius t illi tantum tentandi erunt, num radices ipsius $f(x)$ sint, qui subtracto a factores termini ultimi æquationis novæ sunt. Sæpius sufficit, $a=+1$ vel -1 accipere; et si æquationum pro $x=y+a$, et $x=y'-a$ transformatarum ultimi dicantur U et u, patet factorem k ipsius t radicem ipsius $f(x)$ nonnisi tunc esse posse, si detur ipsius U factor talis y et factor talis y' ipsius u, ut $k=y+a=y'-a$ sit.

Ex. gr. Pro

$$x^4-40x^3+595x^2-3900x+9504=0,$$

fit substituendo $y+10$ ipsi x, æquationis novæ terminus ultimus $=4$, cuius $1, 2, -1, -2$ factores; atque $10+1$, $10+2$, $10-1$ $10-2$ radices æquationis prioris sunt.

12. Si vero radix realis quidem, sed non sit cum 1 commensurabilis; tum quærantur talia a et b, inter quæ radicem cadere oportet; atque ipsis a et b quanto propius ad se invicem latis, radix inter ea cadens modo dicendo approximetur. Si $f(a)$ positivum et $f(b)$ negativum sit, demonstrabitur paulo inferius, $f(x)=0$ radice reali inter a et b cadenti gaudere; itaque talia a et b a se invicem quo minus differentia reperienda sunt. Substituendo nempe ipsi x pro radice positiva numeros $0, 1, 2, \ldots$ et pro radice negativa $0, -1, -2, \ldots$ si ex. gr. sit

$$f(x)=x^3-3x^2-17x+43,$$

Hosted by Google

si sub quemque ponatur valor ipsius $f(x)$ substituto illo numero ipsi x, erit

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ -1, & 40, & 57, & 56, & 43, & 24, & 5, & -8, & -9, & 8, \end{array}$$

itaque unam radicem positivam inter 2 et 3, alteram inter 4 et 5, tertiam vero negativam inter -3 et -4 cadere constat.

Est autem etiam, ut substituendo numeros ipsi x decrescat aliquamdiu $f(x)$, et tum item crescat manente signo eodem: ex. gr. sit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 21x + 55;$$

erunt

$$\begin{array}{lrrrrrrrr} \text{numeri} \ldots & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \text{valores ipsius } f(x) \ldots & 81, & 73, & 55, & 33, & 13, & 1, & 3, & \ldots \end{array}$$

atque radix positiva erit, si quidem realis fuerit, inter 2 et 3, aut inter 3 et 4; tentandum in tali casu est, addendo $\pm\omega < 1$ in hoc casu ipsi 3, num $f(3 \pm \omega) \backsim 0$; quo in casu $3 \pm \omega$ eo propius radici erit, quo minus $f(3 \pm \omega)$ erit. Si vero $f(3 \pm \omega)$ neutiquam tendat ad 0, tum radices omnes imaginariæ erunt, siquidem $f(x)$ abinde signo eodem utrinque crescat semper, ab illo termino seriei tam ad dextram quam ad lævam eundo. In hoc quidem casu, pro $\omega = \frac{1}{2}$ est

$$f\left(3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8};$$

adeoque radix inter $3 + \frac{1}{2}$ et $3 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ est.

Omnia hæc autem illustrantur, si x tanquam abscissa et $f(x) = y$ ordinata abscissæ x respondens consideretur, et quæratur tale c ut

$$f(c) = y = 0$$

sit; atque ad ductum lineæ per extremitates ordinatarum descriptæ reflectatur, nempe si a fine abscissæ a puncto in linea abscissarum lato, donec ex a fiat b; posito interea $f(x)$ semper reale finitum esse, transibit linea ex una plaga in alteram per partem abscissæ inter fines ipsarum a et b, si $f(a)$ positivum et $f(b)$ negativum sit.

Hosted by Google

13. Ut tamen molestia tot numeros tentandi minuatur; e re est certos nosse, intra quos tentare sufficiat; nec de aliis nisi positivis radicibus agere necesse est, quum æquatio facile (pag. 393) in talem mutetur, cuius radices positivæ per -1 multiplicatæ, radices negativas prioris præbeant; dicuntur autem *limites radicum* positivarum duo valores eiusmodi, quorum unus maior quavis radice illius æquationis positiva, alter vero minor quavis radice positiva eiusdem sit.

Si quævis radix positiva <1 fuerit, tum 1 est unus limes. Consideretur itaque radix positiva unitate maior pro æquatione gradus n.

Sit $-M$ coefficiens negativus maximus, et $-N$ sit coefficiens termini negativi primi, terminorum omnium m-ti, haud numerato primo: erit terminus m-tus $=-Nx^{n-m}$; et si

$$x > 1 + \sqrt[m]{M}$$

accipiatur, pro x positiva et unitate maiore valor ipsius $f(x)$ certo positivus erit. Nam tum summa terminorum ab m-to usque ad illum, in quo x^0 est, etsi omnes coefficientes seorsim $=-M$ essent, esset $-\frac{M(x^{n-m+1}-1)}{x-1}$, si $-Mx^{n-m}$ primus, et x exponens ponatur per (pag. 151); quo si x^n maius sit, $f(x)$ positivum erit, nempe si ipsi x tale α positivum substituatur. Fiet vero hoc, si

$$\alpha > 1 + \sqrt[m]{M}$$

sit; nam tum pro $\alpha > 1$ erit

$$\alpha - 1 > \sqrt[m]{M},$$

et

$$(\alpha - 1)^m > M,$$

atque

$$(\alpha - 1)\alpha^{m-1} > M;$$

et hinc multiplicando utrinque per $\frac{\alpha^{n-m+1}}{\alpha-1}$, erit

$$\alpha^n > \frac{M\alpha^{n-m+1}}{\alpha - 1};$$

quod si fuerit, tanto fortius fiet

Hosted by Google

$$\alpha^n > \frac{M(\alpha^{n-m+1}-1)}{\alpha-1};$$

consequenter $f(x)$ positivum erit, si ipsi x substituatur

$$\alpha > 1 + \sqrt[m]{M}.$$

Facile hoc ad exempla proxima allata applicatur.

14. Ita si (pag. 393) transformetur æquatio, ponendo $x = \frac{1}{y}$, atque æquatio ordinetur, reperta tali quantitate Q, qua si y maius accipiatur, valor functionis novæ positivus sit, erit pro $Q' > Q$,

$$\frac{1}{Q'} < \frac{1}{y},$$

per y radicem positivam novæ æquationis intelligendo; adeoque

$$\frac{1}{Q'} < x,$$

nempe $\frac{1}{Q'}$ est minima radice positiva æquationis minor. Itaque in præcedentibus tale prodierat, quo radix maior esse nequit, quia tum $f(x)$ fieret positivum et non 0, hic autem tale prodiit, quo x maius est.

15. Quoad radices negativas autem transformanda æquatio in talem est (per pag. 406), cuius radices positivæ per -1 multiplicatæ, exhibeant radices negativas prioris; atque limitibus radicum positivarum æquationis novæ quæsitis, limites radicum negativarum prioris reperientur.

Vix autem monendum est, heic limitem non sensu superiore accipi; item quod si radix una a ipsius $f(x) = 0$ prodierit, $\frac{f(x)}{x-a}$ præbeat æquationem uno gradu inferiorem, cuius radices pariter quæri possunt. Patet etiam, quod si terminus ultimus deficiat, unam radicem 0 esse; nempe si 0 substituatur ipsi x, functio ad 0 redigetur; est quoque termini ultimi 0 unus factor $=0$. Ita si terminus secundus deficiat, summa radicum $=0$ est (pag. 399), adeoque summa radicum positivarum est summæ negativarum æqualis. Ita etiam patet coefficientem termini secundi non posse

Hosted by Google

realem esse, nisi radices imaginariæ, si adfuerint, se invicem destruant. Patet quoque radicem positivam non dari, si coeficientes omnes, etiam ipsius x^0, positivi sint; nam tum pro quovis valore positivo ipsius x, valor positivus et non 0 erit.

16. Si autem æquationis radicem per dicta inter certos integros contineri constet, atque tentationibus inter illos factis, prodierit tale w, ut vera radice x dicta, sit ex. gr.

$$x - w < \frac{1}{10}, \text{ vel } x - w < \frac{1}{100}, \text{ \&c.}$$

nempe

$$x = w + f$$

denotante f fractionem veram exiguam; erit methodo Newtoniana

$$\begin{aligned} x^n &= (w+f)^n = w^n + nw^{n-1}f + f'f \\ px^{n-1} &= p(w+f)^{n-1} = pw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2}f + f''f, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t &= t; \end{aligned}$$

atque $f'f + f''f + \ldots$, id est summa terminorum, in quibus fractio vera f ad una altiorem potentiam elevata est, Ff dicta: erit

$$\begin{aligned} f(x) &= w^n + pw^{n-1} + qw^{n-2} + \ldots + sw + t \\ &+ (nw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2} + q(n-2)w^{n-3} + \ldots + s)f + Ff = 0; \end{aligned}$$

atque hinc

$$f = -\frac{w^n + pw^{n-2} + qw^{n-3} + \ldots + sw + t + Ff}{nw^{n-1} + p(n-1)w^{n-2} + q(n-2)w^{n-3} + \ldots + s},$$

unde ex æquatione et quantitatis deficientis limite, æstimando maximum errorem qui committi potest, negligendo Ff ob potentias fractionis veræ exiguæ altiores, omisso Ff fit

$$x = w + f = w - \frac{w^n + pw^{n-1} + qw^{n-3} + \ldots + t}{nw^{n-1} + (n-1)pw^{n-2} + (n-2)qw^{n-3} + \ldots + s}$$

Hosted by Google

et ad denominatorem eundem reducendo, et addendo fit

$$x = \frac{(n-1)w^n + (n-2)pw^{n-1} + (n-3)qw^{n-2} + \ldots - t}{nw^{n-1} + (n-1)pw^{n-2} + (n-2)qw^{n-3} + \ldots + s}.$$

Approximando hoc pacto, valore reperto w' item novum f quæritur, et operatio iuxta dicta toties quoties repetitur.

Altera methodus est LAGRANGEiana. Si nempe prodierit integer a radice proxime minor, aut valor talis uti supra w, ut sit radix vera

$$x = a + \frac{1}{y} \text{ (pro } y > 1),$$

substituatur $a + \frac{1}{y}$ ipsi x in $f(x)$, et ordinata æquatione quæratur integer b ipso y pr xime minor; itaque

$$a + \frac{1}{b+1} < x < a + \frac{1}{b}.$$

Ponatur

$$y = b + \frac{1}{y'},$$

ubi item $y' > 1$, et æquatione proxima in qua $a + \frac{1}{y}$ substitutum ipsi x est $f_1(y)$ dicta, substituatur $b + \frac{1}{y'}$ ipsi y in $f_1(y)$; et quæratur integer b' ipso y' proxime minor; atque idem semper repetatur; ita ut si prodierit b cum μ accentis, quod dicatur β, integer ipso y totidem accentis insignito, quod dicatur Y, proxime minor, substituatur in æquatione novissima $\beta + \frac{1}{Y'}$ ipsi Y, per Y' intelligendo y uno accento pluribus, quam Y habet nempe, $\mu + 1$ accentis præditum.

Eritque

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b' + \cfrac{1}{b'' + \ldots}}}$$

Itaque radix incommensurabilis fractione *continua* dicta in infinitum protensa approximatur; sed de fractionibus continuis paulo inferius agetur. Patet vero superius incipiendo usque ad b, b', b'', . . . alternatim esse valorem radice maiorem minoremve, quam si illi b, ubi subsistere libet, 1 addatur.

Hosted by Google

§. 40.

Si plures fuerint incognitæ x, y, . . ., et totidem æquationes gradus primi tales dentur, quarum nullius veritas aut falsitas e reliquis fluit:

1. Aut quæritur ex una valor ipsius x, quasi reliquæ incognitæ notæ essent, et reperto valore, substituto ipsi x in æquatione sequenti, quæritur ex hac valor ipsius y, qui hoc pacto neque x nec y continet; atque si z adfuerit, substituto in æquatione sequenti valore ipsius x prius reperto, et tum ipsi y substituto ubique valore proxime reperto prodibit æquatio, in qua x, y non amplius adsunt, et nonnisi z est, si in initio tantum x, y, z fuerint; adeoque z reperitur; et inde regrediendo, ex æquatione, in qua nonnisi y et z erant, substituendo valorem ipsius z, prodibit y, atque ex æquatione, in qua x, y, z sunt, substitutis iam repertis valoribus ipsorum x, y prodibit x quoque.

Quotvis autem fuerint incognitæ numero μ, progrediendo ad æquationem sequentem ν-tam incognitæ numero $\nu - 1$ disparent; adeoque demum una manet; inde reperto huius valore per æquationes, per quas descensum est, ascendendo omnes prodeunt.

2. Aut ita transformantur æquationes, ut e summa earum nova æquatio promanet talis, in qua coefficiens omnium incognitarum, præter unam, quam quærere libet, 0 sit; quo pacto incognita ista reperitur.

Ex. gr. Sit

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c';$$

erit (iuxta 1)

$$x = \frac{c - by}{a},$$

quo substituto in æquatione sequenti erit

$$c' = \frac{a'(c - by)}{a} + b'y = \frac{a'c - a'by}{a} + b'y$$

et hinc

$$y\left(b' - \frac{a'b}{a}\right) + \frac{a'c}{a} - c' = 0,$$

Hosted by Google

atque hinc

$$y + \frac{a'c - c'a}{a} : \frac{b'a - a'b}{a} = 0,$$

consequenter

$$y = -\frac{a'c - c'a}{ab' - ba'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

atque hoc in

$$x = \frac{c - by}{a}$$

substituto, fit

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Idem modo secundo prodit; nempe multiplicando æquationem priorem per b', posteriorem per $-b$, et addendo fiet

$$x(ab' - a'b) + y(bb' - bb') = cb' - bc',$$

unde x idem prodit, quod prius. Pariter y prodit.

Utrumque ad tres pluresve incognitas applicari potest.

Exempla.

a) Quærantur duæ quantitates x et y tales, ut $x + y = s$ et $x - y = d$; erit methodo priore

$$x = s - y,$$

quo substituto in sequente, est

$$s - y - y = d,$$

unde

$$-2y = d - s,$$

adeoque

$$2y = s - d,$$

et

$$y = \frac{s - d}{2};$$

et hoc substituendo in

$$x = s - y,$$

fit

$$x = \frac{s + d}{2}.$$

Hosted by Google

Modo posteriore substituto s ipsi c, et d ipsi c', ac 1 ipsis a et a' et b, atque -1 ipsi b'; erit

$$x = \frac{s(-1) - 1.d}{1.(-1) - 1.1} = \frac{-(s+d)}{-2} = \frac{s+d}{2}$$

ut prius.

b) Nota est mulorum de sarcinis suis conquerentium fabula. Prioris sarcina est x, alterius y; is tantam esse suam queritur, ut si hic illi pondus $=1$ traderet, æque gravati essent; hic autem respondet suum pondus duplum fore, si is illi 1 traderet. Erit hinc

$$x + 1 = y - 1,$$

et

$$y + 1 = 2(x - 1),$$

adeoque

$$x - y = -2,$$

et

$$2x - y = 3;$$

itaque multiplicando superiorem per -1, et addendo, id est superiorem subtrahendo ex inferiore coefficiens ipsius y erit 0, et $x = 5$ erit, quo substituto in quavis æquatione, erit $y = 7$.

Idem prodit, si superius ponatur

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -2,$$
$$a' = 2,\ b' = -1,\ c' = 3.$$

Exempla ad plures incognitas passim reperire et Tyrones ipsi condere possunt; quotvis autem incognitæ fuerint, ingeniosa a Bezout data regula reperiri possunt. Nimirum:

Si e rebus a, b, c, d construantur permutationes ita, ut prius prodeant ab et ba, ac priori præponatur signum $+$. posteriori $-$, et semper omnibus permutationibus factis literarum permutatarum suscipiatur operatio sequens, cum singulis eo ordine quo prodierunt; nimirum sequens litera nova postponatur, deinde migret ista semper uno porro versus sinistram, donec omnes ad dextram post se relinquat; et prima harum permutationum, in qua litera nova ultima versus dextram est, retineat signum

Hosted by Google

illius, cui postponitur, reliquæ autem quavis migratione, uti prodeunt, signum mutent; atque si prodierint permutationes A, B, . . . , prius ex A generentur modo dicto aliæ, tum ex B, et ita porro, ac ordinentur, uti prodierunt, prius ex A generatæ, tum ex B generatæ, &.

Regula porro est sequens. Quod si fuerint tot incognitæ quot æquationes primi gradus, et coefficiens ipsius x sit litera a, coefficiens ipsius y sit litera b, ipsius z litera c et ita porro; quævis in prima æquatione sine accento, in secundo cum uno, in tertia cum duobus, et ita porro; ad dextram vero sit litera sequens post omnium coefficientium literas cum eodem accento, quæ in æquatione est; litera ista vero denotet partem æquationis cognitam, ita ut alterius membri, quod ad sinistram est, quivis terminus sit factum ex incognita in cognitam; tum in denominatore describantur literarum coefficientium permutationes omnes, quæ literas illas omnes continent, illo ordine quo modo dicto prodierunt, atque iis signis afficiantur, quibus prodierunt. Tum pro valore cuiusvis incognitæ scribatur in numeratore supra literam coefficientis incognitæ illius litera, quæ ad dextram est; præter hoc vero supra quamvis literam denominatoris ponatur in numeratore quoque litera eadem, et signa $+$, $-$ eadem sint in numeratore, quam in denominatore; et in quovis termino tam numeratoris quam denominatoris litera prima sit sine accento, quævis sequens vero acquirat unum accentum.

Demonstratione ingeniosa et elegans hæc lex digna videtur. Si valet hæc regula de quotvis incognitis usque ad certum numerum ν incognitarum, a 2 incipiendo, demonstratur valere etiam de numero incognitarum uno maiore; atque verum est de 2, de 3, . . . incognitis ab inductione, &.

I. Exprimantur literæ numeris, primæ incognitæ x coefficiens a numero 1, secundæ y numero literæ ipsius, nempe per 2, &.

Multiplicentur omnes æquationes præter ultimam, prima per m, sequens per n, tertia per p, quarta per q, & . . . Sint m, n, p, q, . . . integri; tum subtrahatur ultima æquatio e summa priorum, atque in differentia pona-

Hosted by Google

tur omnis incognitæ præter illam, cuius valor quæritur, coefficiens $=0$, et erit valor incognitæ, cuius coefficiens remansit, æqualis membro ad dextram diviso per coefficientem incognitæ.

Ex. gr. Sit

$$\begin{aligned}
1\ x+2\ y+3\ z+4\ u+5\ v&=6,\\
1'\ x+2'\ y+3'\ z+4'\ u+5'\ v&=6',\\
1''\ x+2''\ y+3''\ z+4''\ u+5''\ v&=6'',\\
1'''\ x+2'''\ y+3'''\ z+4'''\ u+5'''\ v&=6''',\\
1''''x+2''''y+3''''z+4''''u+5''''v&=6'''',
\end{aligned}$$

erit

$$x(m1+n1'+p1''+q1'''-1'''')=m6+n6'+p6''+q6'''-6'''',$$

et

$$x=\frac{m6+n6'+p6''+q6'''-6''''}{m1+n1'+p1''+q1'''-1''''},$$

si nimirum

$$\begin{aligned}
m2+n2'+p2''+q2'''&=2'''',\\
m3+n3'+p3''+q3'''&=3'''',\\
m4+n4'+p4''+q4'''&=4'''',\\
m5+n5'+p5''+q5'''&=5''''.
\end{aligned}$$

Ita valor cuiusvis alius incognitæ per dicta determinatur; et patet expressionem valoris ingredi numeros indeterminatos m, n, p, q nempe novas incognitas, sed datis una pauciores, pro quibus totidem æquationes dantur; adeoque si pro tot incognitis valeat regula a Bezout data, determinentur ope istius incognitæ m, n, p, q, et in valore ipsius x substituantur valores reperti; idem fiat pro valoribus y, z, ..., et inquiratur, num valores hoc modo reperti regulæ congrui sint. Posito valere regulam de ν incognitis, cuius vicem modo subeat 4; determinabuntur iuxta regulam incognitæ m, n, p, q ex æquationibus earum dictis, quæ modo sequente exprimantur:

$$\begin{aligned}
\overset{*}{1}m+\overset{*}{2}n+\overset{*}{3}p+\overset{*}{4}q&=\overset{*}{5},\\
\overset{*}{1}'m+\overset{*}{2}'n+\overset{*}{3}'p+\overset{*}{4}'q&=\overset{*}{5}',\\
\overset{*}{1}''m+\overset{*}{2}''n+\overset{*}{3}''p+\overset{*}{4}''q&=\overset{*}{5}'',\\
\overset{*}{1}'''m+\overset{*}{2}'''n+\overset{*}{3}'''p+\overset{*}{4}'''q&=\overset{*}{5}''',
\end{aligned}$$

Hosted by Google

ubi per numerum denotetur quidem, quotænam incognitæ coefficiens intelligatur, sed valor ab illo, quem numerus idem sine stellula denotat in prioribus æquationibus, diversus significari queat.

II. Interim valores incognitarum ex proximis æquationibus per regulam a BEZOUT datam expressi facile in numeros stella carentes transferri modo sequente possunt. Nempe $\overset{*}{1}$ denotat 2, $\overset{*}{1}'$ denotat 3, et ita porro deorsum numero accentorum uno maior uno maius denotat; porro $\overset{*}{2}$ mutatur in $2'$, $\overset{*}{3}$ in $2''$, $\overset{*}{4}$ in $2'''$; ita $\overset{*}{1}'$ in 3, $\overset{*}{2}'$ in $3'$; verbo numero accentorum additur 2, ut prodeat numerus, et numerus unitate mulctatus dat accentorum numerum; nam in suprema æquationum proximarum accentus ubique 0 est; in illis æquivalentium suprema vero est ubique $2 = 0 + 2$; accenrusque in hac est in loco primo $0 = 1 - 1$ tum quovis loco accedit unus accentus, uti numerus crescit uno in æquationum primitivarum suprema; porro autem in his in quavis columna verticali deorsum accenti in quavis linea uno crescunt, uti numeri in prioribus in quavis linea eadem horizontali manentes iidem; itaque 2 addito numero accenti dat semper numerum prioris; et accentum esse semper 0 patet, dum 1 transfertur, qualivis accento gaudeat, 2 vero dare accentum $'$; et cum in primitivsi æquationibus numeri in quavis linea horizontali ab 1 progrediantur, priorum vero idem numerus quovis loco unum accentum nanciscatur, est numerus accentorum in translatione numerus translatus unitate mulctatus. Ubi nullus accentus est, reputetur pro accento 0. Aequationes ipsorum m, n, ... (pag. 417) primitivæ dicuntur, quibus priores æquivalent.

Si igitur numerus incognitarum in æquationibus totidem prius propositis quivis sit, et lex de incognitis una paucioribus valeat; considerato casu proposito, in quo numerum 5 e demonstratione ipsa quemvis repræsentare posse patebit, pro valore ipsius x erit:

Hosted by Google

$$m = \frac{\overset{*}{5}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{5}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{5}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots},$$

$$n = \frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{5'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{5'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{5''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots},$$

$$p = \frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{5''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{5'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{5'''} - \ldots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots},$$

$$q = \frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{5'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{5''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{5'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{3''}\,\overset{*}{4'''} - \overset{*}{1}\,\overset{*}{2'}\,\overset{*}{4''}\,\overset{*}{3'''} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{4'}\,\overset{*}{2''}\,\overset{*}{3'''} - \ldots},$$

atque translatione (per II) facta erunt valores

$$m = \frac{2'''3'\,4''\,5''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots} = \frac{3'\,4''\,5'''\,2''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots},$$

$$n = \frac{2\,3'''4''\,5''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots} = \frac{2\,4''\,5'''\,3''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots},$$

$$p = \frac{2\,3'\,4'''5''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots} = \frac{2\,3'\,5'''4''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots},$$

$$q = \frac{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots}{2\,3'\,4''\,5''' - \ldots}.$$

Ita si quævis alia incognitarum quæratur, eodem modo reperiuntur talia m, n, ... ut coefficientes reliquarum evanescant; atque quum pro aliis incognitis non eadem m, n, ... ponantur, et statim dicenda M, N, ..., non eadem pro diversis incognitis sed concernentia intelligantur.

Quæ de valore ipsius x demonstrabuntur, mutatis mutandis ad y, z, ... applicari poterunt.

Quomodo autem ad singularem hanc regulam perveniri potuerit, perspici ex exemplo (pag. 413) allato potest, sicubi coefficientes incognitarum simul cum coefficiente potentiæ exponentis 0 ita ut ibi designantur, denotare contigit.

Denominator tam valoris m, quam reliquarum incognitarum n, p, q est idem, continens omnes permutationes numerorum $\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}$, dicatur d; et denominator d valorum eorundem m, n, p, q postquam modo dicto in numeros stellula carentes translati sunt, dicatur D; numeratores autem

Hosted by Google

sint M, N, P, Q. Eritque

$$x = \frac{\dfrac{6.M + 6'.N + 6''P + 6'''.Q}{D} - 6''''}{\dfrac{1M + 1'N + 1''P + 1'''.Q}{D} - 1''''}$$
$$= \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - 6''''D}{1.M + 1'.N + 1''.P + 1'''Q - 1''''D}.$$

Ita pro reliquis incognitis quoque respective concernentibus m, n, p, q repertis erunt, pro quavis incognita concernentia, id est pro illa prodeuntia M, N, . . ., intelligendo

$$y = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - 6''''D}{2.M + 2'.N + 2''.P + 2'''Q - 2''''D},$$
$$z = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - 6''''D}{3.M + 3'.N + 3''.P + 3'''Q - 3''''D},$$
$$u = \frac{6.M + 6'.N + 6''.P + 6'''Q - 6''''D}{4.M + 4'.N + 4''.P + 4'''Q - 4''''D},$$
. . . . . .

III. Si translatio formularum, qua D ex d et qua M, N, P, Q prodeunt consideretur, cum per hypothesim in quovis termino sint accenti $0\,'\,''\,'''$ patet (per II) prodire in quovis termino ipsorum D, M, N, P, Q numeros 2, 3, 4, 5, accentos vero in D esse in quovis termino $0\,'\,''\,'''$; quia terminus quilibet ipsius d est permutatio numerorum $\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}$; unde etiam in D prodit permutatio quævis numerorum 2, 3, 4, 5, quia prouti in d permutantur numeri 1, 2, 3, 4 imaginis 2, 3, 4, 5 ab accentis constantibus $0\,'\,''\,'''$ pendentis, accenti ita migrant in imagine dicta omni permutatione possibili; itaque si semper iuxta accentos disponantur, patet permutationem quamvis, nec eandem imaginem bis, prodire, quia tum permutatio eadem in d bis occurreret.

Porro cum in expressionum illarum, e quibus M, N, P, Q depromta sunt, quavis adsint omnes permutationes numerorum $\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}, \overset{*}{5}$, nempe in illa, e qua M translata est absque $\overset{*}{1}$, in illa e qua N translata est absque $\overset{*}{2}$, absque $\overset{*}{3}$ in illa e qua P & deprompta est (per hypothesim);

patet adesse quidem in quovis ipsorum M, N, P, Q omnes permutationes numerorum 2, 3, 4, 5, sed in M deesse accentum 0 propter defectum numeri $\overset{*}{1}$ in expressione, e qua deducitur, in N deesse accentum $'$, in P accentum $''$, in Q accentum $'''$ propter defectum numerorum $\overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}$ in expressionibus primariis dictis; nempe (per II) ubi $\overset{*}{1}$ deest, in translato accentus 0 deest, nam numerus accenti est æqualis numero ipsi unitate mulctato; ita ubi 2 deest, in translato accentus $2-1=1$ deesse debet $\mathfrak{S}$.

Si iam in expressione superiore ipsius x in numeratore cuivis termino ipsius M præponatur 6 sine accento, in quovis termino ipsius N præponatur $6'$ cum uno accento, scilicet ibi datur accentus 0, in P loco tertio ponatur in quovis termino $6''$, in Q loco quarto $6'''$ in quovis termino et $6''''$ loco ultimo cuiusvis termini ipsius D; in denominatore vero plane in loca dicta ponatur 1 cum iisdem accentis; prodibunt superius permutationes omnes numerorum 2, 3, 4, 5, 6, inferius omnes numerorum 1, 2, 3, 4, 5; et quum ita ordinentur, ut in valore ipsius x, ubi 1 infra stat, semper 6 stet supra 1, reliqui numeri etiam in quovis termino iidem cum iisdem accentis in quavis verticali iidem esse poterunt. Itaque pro valore ipsius x iuxta regulam Bezout-i prodeunt termini, præterquam quod signa rite prodiisse demonstrandum supersit.

Idem pro alia incognita patet, si hæc locum in æquationibus cum x permutet.

IV. Quod autem signa attinet: sit μ numerus incognitarum in æquationibus totidem propositis; erunt m, n, ... numero $\mu-1$ ex totidem æquationibus determinanda. Dicantur permutationes, quæ pro valoribus ipsorum m, n, ... (per hypothesim) iuxta *regulam Bezouti* rite prodeunt, *primitivae*, et eædem (pag. 417) in numeros stella carentes translatæ dicantur *translatae* priorum; denotetque heic litera in locum exponentis accento postposito numerum accentorum illius numeri, cui quasi exponens adponitur.

Quævis primitiva permutatio numerorum

$$\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \ldots, (\overset{*}{\mu-1})$$

gaudet signo $+$, regulæ BEZOUT-i convenienti, et *translata* quoque illius signum idem retinet, atque permutatio cuivis superimposita signo eodem gaudet.

Erit autem μ aut par, aut impar; et $\mu - 1$ in casu priore fiet impar, et par in posteriore. Si μ par fuerit, prodibunt pro valore ipsius x (pag. 420) termini denominatoris omnes, quoad numerum accentorum ordinati, regulæ convenientes; nempe tum permutationes in D regulæ contrariis signis præditæ, præposito signo $-$ valorem regulæ convenientem dabunt, ut statim patebit.

Si vero μ impar fuerit, tum omnes denominatoris permutationes, simul cum terminis ipsius $-1^{(\mu-1)'}D$, iuxta numeros accentorum ordinatæ, signa regulæ contraria habebunt; atque tam numeratoris quam denominatoris, opposita accipiendo, valore ipsius x immutato, singuli termini signa regulæ convenientia nanciscentur.

Consideretur enimvero prius tantum in d permutatio primitiva prima, et huic in numeratore superimposita. Nempe

$$\frac{\overset{*}{\mu}\ \overset{*}{2'}\ \overset{*}{3''} \ldots (\overset{*}{\mu - 1})^{(\mu-2)'} + \ldots}{\overset{*}{1}\ \overset{*}{2'}\ \overset{*}{3''} \ldots (\overset{*}{\mu - 1})^{(\mu-2)'} + \ldots}$$

erit superioris *translata* una permutatio ipsius M, inferioris *translata* erit una permutatio ipsius D; eritque translata numeratoris, si extremi permutentur, iuxta numeros accentorum ordinando

$$3'\,4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}\,2^{(\mu-1)'},$$

inferior autem erit (per II.)

$$2\,3'\,4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}.$$

Atque hinc pro valore ipsius x in $\frac{(\mu+1)M + \ldots}{1M + \ldots}$ per translationem prodibit

$$\frac{(\mu+1).3'.4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}.2^{(\mu-1)'} + \ldots}{1.3'.4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}.2^{(\mu-1)'} + \ldots};$$

Hosted by Google

in

$$\frac{D.(\mu+1)^{(\mu-1)'}}{D.1^{(\mu-1)'}}$$

autem prodibit

$$\frac{2.3'.4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}.(\mu+1)^{(\mu-1)'}+\ldots}{2.3'.4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}.1^{(\mu-1)'}+\ldots}.$$

Termini tantum denominatoris considerandi veniunt; nempe in denominatore, si incognitæ numero μ fuerint, permutationes numerorum $1, 2, \ldots, \mu$ omnes prodeunt, et dein pro x supra 1 ubique ponitur $\mu+1$, reliquis literis autem iisdem etiam, signa accentique ubique eadem ponuntur.

Translatæ permutationes quævis cum primitivis eodem signo gaudent, tantum valorem facti e quantitatibus permutatis tanquam factoribus producti respiciendo; sed præposito 1 tanquam multiplicatore permutatio $1\,3'4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}2^{(\mu-1)'}$, quæ quoad valorem signo $+$ gaudet, ut factum ex 1 et translata ipsius $+\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{3}\ldots(\overset{*}{\mu-1})^{(\mu-2)'}$, si μ impar fuerit, iuxta regulam signum $-$ habebit.

Nam numerus numerorum in permutatione inter 1 et 2 erit $\mu-2$, adeoque par, si μ par fuerit, et impar si, μ impar sit; 12 vero habebat $+$; ponatur prius 3 ad finem dextrum, manebit signum idem, permutet 3 locum cum præcedente 2, fiet $-$; ponatur sequens nempe 4 ad finem dextrum, manebit $-$, permutet 4 locum cum 3, fiet $+$; et ita porro, semper numerus sequens inmediate maior ponatur ad finem dextrum, qui signum præcedens retinens permutet locum cum præcedenti, donec nullus maior supersit. Hoc pacto patet toties permutari signum, quot numeri inter extremos sunt, et si numerus mutationis signi par sit, signum $+$ manere, si impar sit, signum $-$ iuxta regulam fieri. Itaque pro μ pari id, quod prodit, convenit regulæ, pro μ impari autem contrariatur.

Item si μ par sit, $-D.1^{(\mu-1)'}$ legi conveniens est; si μ impar fuerit, contrariatur. Nam tum 1 erit ultimus; nempe heic numerus accenti uno auctus æqualis est numero loci; numeri intermedii sunt, qui prius in termino primo; itaque quum 21 gaudeat iuxta regulam signo $-$, prodibit

Hosted by Google

pro μ pari $D1^{(\mu-1)'}$ cum signo $-$; itaque factum $D1^{(\mu-1)'}$ iuxta regulam quoque signum $-$ habebit; valori ipsius x etiam satisfaciendo.

Si vero μ impar fuerit, prodibit $D1^{(\mu-1)'}$ iuxta regulam cum signo $+$; itaque quum et præcedentes permutationes denominatoris signis legi contrariis præditæ sint, tam numeratoris quam denominatoris oppositum accipiendo, valore ipsius x immutato, signa legi quoque convenient; nempe tum etiam $-D1^{(\mu-1)'}$ in $+D1^{(\mu-1)'}$ mutabitur.

Quod autem e solo termino denominatoris primo ad omnes concludi queat, patet sic. Quævis permutatio fuerit in translatis, quibus x modo dicto exprimitur; illa ex aliqua primitivarum dictarum orta adposito 1 in denominatore iuxta accentum eius, et supra id $\mu+1$, cum ea signum idem habet in expressione ipsius x, abstrahendo a lege BEZOUT-i. Facile autem perspicitur, quod permutatio quævis rerum certarum e quavis permutatione earundem produci queat, permutatione unius aut plurium certarum cum immediate præcedente ad lævam certo numero facta, et quævis eiusmodi permutatione signum per legem BEZOUT-i mutetur; atque etiam dum in primitiva permutatur aliqua cum præcedente ad lævam, et in translata eius mutetur signum. Atque hinc patet quod si prior permutatio superius dicta legi convenerit, conveniant omnes; si non, tum omnes signa contraria habeant. Quæ uberius exponere, tam prolixitas vitanda quam brevitas necessaria vetat.

Consequenter de x regula generaliter valet; nempe sive par sive impar fuerit μ, valet, si de $\mu-1$ valet; valet autem de duabus, tribus, et quatuor incognitis; itaque valet de quinque, et hinc de sex, atque inde de septem, et ita porro.

Parique modo de reliquis incognitis demonstrando generaliter constat.

§. 41.

Si autem æquationes gradus primi pauciores fuerint quam incognitæ (pag. 373); tum accipiendo tot incognitas, quot æquationes datæ sunt, earum valoribus quæsitis, reliquis incognitis arbitrarie quidvis substitui

Hosted by Google

potest; nisi certa restrictione posita, valores incognitarum certa qualitate præditos esse oporteat.

Ex. gr. Pro

$$10x + 5y + \frac{1}{2}z = 100,$$

et

$$x + y + z = 100,$$

si cuiusvis incognitæ valor integer positivus postuletur,

$$x = 1, \quad y = 9, \quad z = 90,$$

neque alia resolutio ulla datur.

Resolutio eiusmodi æquationis (*indeterminatae* dictæ gradus primi) pro valoribus incognitarum integris commode ope *fractionum continuarum* perficitur: itaque quum et superius (pag. 412) mentio earum fuerit, atque etiam æquatio quadratica ope earum resolvi possit, de his quædam dicenda veniunt; quapropter alia adhuc pariter per se quoque necessaria præmittuntur.

1. Conversa ipsius (pag. 67) quoque valet, nempe *fractionis terminis nonnisi per aequalia multiplicatis, fractio valoris aequalis prodit.* Sit quippe

$$\frac{a}{a'} = \frac{A}{A'};$$

tum

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}.$$

Sit enim

$$\frac{A'}{a'} = q, \quad \text{et} \quad \frac{A}{a} = q \mp r;$$

erit

$$A' = a'q, \quad \text{et} \quad A = a(q \mp r) = aq \mp ar.$$

Sed

$$\frac{aq}{a'q} = \frac{a}{a'} = \frac{A}{A'} = \frac{aq \mp ar}{a'q};$$

unde

$$aq = aq \mp ar,$$

quod nisi $r = 0$ sit, fieri nequit.

Hosted by Google

2. *Si A et A' numeri inter se primi fuerint, tum $\frac{A}{A'}$ terminis minimis exprimitur.*

Nam exprimatur valor idem integris minimis per $\frac{a}{a'}$; erit

$$\frac{a}{a'} = \frac{A}{A'},$$

ac per præcedentia

$$A = aq, \quad \text{et} \quad A' = a'q,$$

ubi q integer præter 1 esse nequit; nam tum integros A, A' integer metitur, adeoque non essent primi. Itaque q aut fractio vera, aut summa fractionis veræ f et integri i est; neutrum esse potest; fractio vera non, quia tum $\frac{af}{a'f} = \frac{a}{a'}$ minoribus terminis exprimeret valorem $\frac{a}{a'}$ contra hypothesim; neque $q = f + i$ est; nam tum $\frac{a}{a'} = \frac{ai + af}{a'i + a'f}$, ubi numerator denominatorque, ita ai et $a'i$, adeoque af et $a'f$ integri sunt; atque $af < a$ et $a'f < a'$ est, quia $f < 1$; itaque valoris eiusdem non esset minima expressio $\frac{a}{a'}$ contra hypothesim, nam $\frac{a}{a'} = \frac{af}{a'f}$.

3. *Si A et A' item numeri inter se primi fuerint et $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$ et $Ak = a$: tum et $A'k = a'$* (per 1); *k vero integer est, si a et a' integri sint.*

Nam $k < 1$ esse nequit: quia $kA < A$ esset, et $\frac{A}{A'}$ per $\frac{a}{a'}$ minoribus terminis experimeretur (contra 2.); sed k neque summa integri i et fractionis veræ f est; nam, ut in præcedentibus, item non esset minima eiusdem valoris expressio.

4. *Si $N = ab$ vel $ab \ldots t$, et N, a, b, ..., t integri, et praeter N omnes numeri per se primi sint*, nempe quorum nullum alius præter se et 1 metitur, id est nullus per alium integrum divisus quotum integrum dat: *tum N alia factorum primorum imagine exprimi nequit*; id est factores primi, quorum factum N est, semper iidem qui prius sunt, nec præter factorum ordinem differunt.

Nam sit prius $n = ab$, pro a, b per se primis; si pro q per se primo esset etiam $n = Bq$: tum $ab = Bq$ fieret, atque hinc

Hosted by Google

$$\frac{a}{q} = \frac{B}{b};$$

et quum a, q per se primi, adeoque inter se primi, nisi æquales sint, esset (per 3.) talis integer k, ut $ak = B$ et $qk = b$: adeoque b non esset per se primus. Si vero $a = q$, tum $B = b$, propter

$$\frac{a}{q} = 1 = \frac{B}{b}.$$

Consequenter si n e duobus factoribus primis constat, ex aliis constare nequit.

Hinc vero de quotvis ad uno plures concluditur; nempe si nullus integer I expressus per m factores primos, cuius imago sit i, queat abstrahendo a factorum ordine ullo modo alia primorum imagine exprimi, accedat factor primus v, et sit $Iv = N$. Tum N nulla alia factorum primorum imagine nisi per iv, abstrahendo a factorum ordine, exprimi poterit.

Nam exprimatur etiam per $\beta\gamma$, denotante γ numerum primum; erit tum $iv = \beta\gamma$, atque hinc

$$\frac{i}{\beta} = \frac{\gamma}{v};$$

ubi, ut antea, γ et v inter se primi sunt, adeoque, pro certo integro k, est $i = \gamma k$. Et si k imagine factorum primorum expressum K dicatur, erit $i = \gamma K$, et quum i ex m factoribus primis constet, i et γK æquales imagines sunt. Atque hinc est $iv = v\gamma K$; et quia $iv = \beta\gamma$ erat, est $v\gamma K = \beta\gamma$, adeoque $vK = \beta$; sed iv adeoque $v\gamma k$ constat ex $m+1$ primis factoribus, itaque vK constat ex m, per hypothesim autem numerus, qui per m factores primos exprimitur, alia primorum imagine exprimi nequit. Consequenter vK et β eadem imago est; adeoque $v\gamma K$ et iv ac $\beta\gamma$ eædem imagines sunt.

5. *Hinc si primorum a, b, . . . quilibet seorsim metitur numerum N, eundem N et productum e quibuslibet eorundem primorum metitur.*

Hosted by Google

Nam sit n imago ipsius N factoribus primis expressi, et sit $N:a=Q$, adeoque $N=aQ$, et sit q imago ipsius Q factoribus primis expressi; erit n et aq imago eadem (per 4.). Itaque a adest in n, pariter quivis ipsorum b, . . . adest; consequenter quilibet eorum ita ordinari possunt, ut partem imaginis constituant.

Conversim quoque integer P integrum N nonnisi ita metitur, si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis alicuius, qua N factoribus primis exprimitur, partem constituat. Nam si $N=P.M$, et N, P, atque M factoribus primis exprimantur, imago eadem ipsius $P.M$, quæ ipsius N erit.

6. Num vero numerus aliquis per se *primus*, aut e primis *compositus*, ut dici solet, fuerit; de hoc videatur opus (pag. 206) citatum. Vulgare est, numerum quemvis primum (numero 3 maiorem) formæ

$$6n \pm 1 = 2.3n \pm 1$$

esse debere, quamvis conversim non sit quivis (ex. gr. 25) formæ $6n \pm 1$ primus. Nempe si integer N per 6 dividatur, sit quotus q, residuum est ipsorum 1, 2, 3, 4, 5 aliquis; si 2 vel 4 sit, tum N par est; si 3 sit, tum

$$N = 2.3.q + 3 = 3(2q+1);$$

si residuum 5 sit, tum

$$N = 2.3q + 2.3 - 1 = 2.3(q+1) - 1,$$

seu $6n-1$. Itaque nisi residuum 1 aut 5 sit, idest N sub formam $6n+1$ vel $6n-1$ veniat, compositus est.

7. E prioribus etiam *divisor communis maximus* plurium integrorum factoribus primis expressorum, necnon *minimus eorem, quem datorum quivis metitur*, reperitur. Nempe quoad primum eiusmodi imago I factorum primorum construenda est, in qua nonnisi talis factor occurrat, qui in quolibet datorum adest, et quivis adsit toties, quoties adest in datorum quovis, nec pluries adsit in omni quovis eorundem; nam tum

Hosted by Google

imago ista I imaginis datorum cuiusvis pars erit; qualiscunque primus p autem adiungeretur ipsi I, ut ex I fiat I', si I' quemque datorum metiatur, tum p adest in quovis datorum, adeoque in I quoque; atque si p in I adfuerit m-ies, tum in I' erit $(m+1)$-ies; itaque et in quovis datorum aderit $(m+1)$-ies; atque in I non adesset toties, quoties in quovis adest, quum nonnisi m-ies adsit.

Quod secundum attinet, talis imago i primorum construenda est, in qua datorum quivis factor primus adsit, et quivis toties, quoties idem in aliquo datorum plurima vice occurrit. Nam datorum cuiusvis omnes factores primi in i adesse debent; nam cuiusvis imaginem, partem ipsius i esse oportet; si vero aliquis factor p ex i tolleretur, si is in illo datorum, K dicto, ubi plurima vice adest, m-ies adsit, etiam in i aderat m-ies, et nunc $(m-i)$-ies remansit; itaque K ipsum i, sublato p, non metitur (per pag. 428).

Hinc si fractionum quarumvis ad terminos minimos reductarum, denominator communis C minimus quæratur, erit is minimus eorum, quem quilibet denominatorum metitur. Et si fractionum datarum quævis $\frac{a}{b}$ sit: erit $\frac{C.a}{b}$ numerator fractionis novæ, quæ $=\frac{a}{b}$ nempe

$$\frac{C.a}{b} : C = \frac{aC}{bC} = \frac{a}{b}.$$

Nam quum a et b inter se primi sint, per integrum multiplicandi sunt, ut valor æqualis prodeat; itaque denominator quivis communem metiri debet. Consequenter denominatorem integrum minimum esse oportet, quem quivis denominatorum metiatur.

8. *Potest quidem divisor communis maximus absque eo quoque, ut factores primi quaererentur, reperiri.* Quotvis integri A, B, . . . fuerint, quæritur prius ipsorum A et B factor communis maximus F, tum quæritur ipsorum F et C factor communis maximus f, et semper novissimi factoris communis, et sequentis numeri dati factor communis maximus quæritur; atque ultimus erit omnium factor communis maximus.

Hosted by Google

Nam si omnes hi integri factoribus primis expressi cogitentur; in imaginibus ipsorum A, B præter F nihil commune erit, neque in F et C præter f; itaque nec in A, B, C præter f commune est; quia id tam in C quam in eo, quod ipsis A, B commune est, nempe in F adesse deberet. Unde ad plura conclusio prona est.

Modus autem alter dictus quoad duos $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est sequens, denotante hic litera quavis tam latina quam germanica integrum. Dividatur $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{b}$ (pro $\mathfrak{a} \succ \mathfrak{b}$), sit quotus a et residuum $\mathfrak{c}$, et divisor novissimus dividatur semper per residuum novissimum, donec residuum $\mathfrak{o}$ sit; et divisor ultimus erit quæsitus.

Sint nempe divisores ordine sequenti se invicem excipientes, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ et quoti sint a, b, c, d. Nempe divisor primus $\mathfrak{b}$, residuum $\mathfrak{c}$; qui tum secundus divisor fit, dando residuum $\mathfrak{d}$, qui tertius divisor fit, cuius residuum $\mathfrak{e}$ tanquam divisor quartus det residuum $\mathfrak{o}$. Unde:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \mathfrak{b}\,a + \mathfrak{c} \\
\mathfrak{b} &= \mathfrak{c}\,b + \mathfrak{d} \\
\mathfrak{c} &= \mathfrak{d}\,c + \mathfrak{e} \\
\mathfrak{d} &= \mathfrak{e}\,d + \mathfrak{o}.
\end{aligned}$$

Erit $\mathfrak{e}$ divisor communis ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ maximus.

Nam $\mathfrak{e}$ metitur utrumque ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, nec ullum $\beta \succ \mathfrak{e}$ metitur. Namque $\mathfrak{e}$ metitur ipsum $\mathfrak{d}$, itaque diagonaliter ad dextram ascendendo etiam ipsum $\mathfrak{d}c$; sed $\mathfrak{e}$ metitur se ipsum quoque, adeoque et ipsum $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}c + \mathfrak{e}$; atque hinc metitur ipsum $\mathfrak{c}b$, sed metiebatur ipsum $\mathfrak{d}$, adeoque metitur ipsum $\mathfrak{b}$; et hinc metitur ipsum $\mathfrak{b}a$, sed metiebatur ipsum $\mathfrak{c}$, consequenter metitur ipsum $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}a + \mathfrak{c}$. Si vero β metiatur tam ipsum $\mathfrak{a}$, quam ipsum $\mathfrak{b}$, tum metitur ipsum $\mathfrak{b}a$, et ipsum $\mathfrak{c}$; quia si ipsum $\mathfrak{b}$ metitur, et ipsum $\mathfrak{b}a$ metitur, atque si et ipsum $\mathfrak{a}$ metitur, etiam in altera parte ipsius $\mathfrak{a}$ certo numero adest. Si vero β metitur tam ipsum $\mathfrak{b}$, quam ipsum $\mathfrak{c}$, metitur descendendo ipsum $\mathfrak{d}$, quia metitur ipsum $\mathfrak{c}b$ et ipsum $\mathfrak{b}$; ita metitur ipsum $\mathfrak{e}$, quia metitur tam ipsum $\mathfrak{d}c$ quam ipsum $\mathfrak{c}$, quod cum $\beta \succ \mathfrak{e}$ esse nequit.

Hosted by Google

9. Ex hac operatione promanat fractio continua vulgaris modo sequenti. Operatio præcedens exprimi potest per

I. $$\overset{a}{\mathfrak{a}:}\overset{b}{\mathfrak{b}:}\overset{c}{\mathfrak{c}:}\overset{d}{\mathfrak{d}:}\mathfrak{e}$$

ubi a, b, c, d quotos exhibent, et diviso $\mathfrak{d}$ per $\mathfrak{e}$ residuum sit 0. Unde

II. $$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}=\frac{\mathfrak{b}:\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}:\mathfrak{b}}=\frac{1}{a}+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}=\frac{1}{a+\frac{\mathfrak{c}:\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}:\mathfrak{c}}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{\mathfrak{d}:\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}:\mathfrak{d}}=$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}}\qquad=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{\mathfrak{e}:\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}:\mathfrak{e}}\qquad=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

III. Si $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ sit, tum $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ est <1; adeoque nullum integrum efficit. Exprimatur hoc per $\frac{0}{1}=0$; et dicantur $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ & fractionis communis forma expressa *fractiones approximantes* ob rationem inferius dicendam; et quidem $\frac{0}{1}$ dicatur prima, et exprimatur per $\frac{A}{A'}$, $\frac{1}{a}$ dicatur secunda, et exprimatur per $\frac{B}{B'}$;

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=\frac{b}{ab+1}$$

dicatur tertia, et designetur per $\frac{C}{C'}$, et ita porro. Tabella sequens etiam modum, quo e quavis fractione approximante sequens per quotum suprascriptum formatur, exhibet.

IV.

a	b	c	d
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b.1+0}{ab+1}$	$\frac{bc+1}{abc+c+a}$
$\frac{A}{A'}$	$\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'}$	$\frac{D}{D'}$
		$\frac{Bb+A}{B'b+A'}$	$\frac{Cc+B}{C'c+B'}$

Hosted by Google

Nempe tertia fractio approximans $\frac{C}{C'}$ prodit ex $\frac{B}{B'}$, si tam numerator quam denominator per quotum suprascriptum multiplicetur, et numeratori numerator præcedens, denominatori denominator præcedens addatur; ita etiam ab inductione patet esse

$$D = Cc + B, \text{ et } D' = C'c + B'.$$

Unde lex generationis cuiusvis e præcedente patet; si nempe lex usque ad $\frac{K}{K'}$ valeat, valet et de $\frac{L}{L'}$. Namque tunc

$$\frac{K}{K'} = \frac{Ii + H}{I'i + H'};$$

prodit autem $\frac{L}{L'}$, si pro i ponatur $i + \frac{1}{k}$; atque tum fiet

$$\frac{I\left(i + \frac{1}{k}\right) + H}{I'\left(i + \frac{1}{k}\right) + H'} = \frac{L}{L'} = \frac{Iik + I + Hk}{I'ik + I' + H'k} = \frac{k(Ii + H) + I}{k(I'i + H') + I'},$$

quod est

$$= \frac{Kk + I}{K'k + I'},$$

quia per hypothesim

$$Ii + H = K, \text{ et } I'i + H' = K'.$$

Nempe quotvis fuerint quoti, donec residuum 0 fiat, literarum maiorum minorumque significatio respectiva perspici potest.

10. Si

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \ldots$$

considerentur; subtrahendo quodvis e sequente differentiæ erunt

$$-\frac{1}{A'B'}, +\frac{1}{B'C'}, -\frac{1}{C'D'}, +\frac{1}{D'E'}, \ldots$$

Hosted by Google

Nam

$$A=0,\ A'=1,\ B=1,\ B'=a,$$

adeoque

$$\frac{AB'-A'B}{A'B'}=\frac{0-1}{A'B'}=\frac{-1}{A'B'};$$

atque quodvis par $\frac{I}{I'}$ et $\frac{K}{K'}$ fuerint, si

$$\frac{IK'-I'K}{I'K'}=\frac{\pm 1}{I'K'},$$

pro $\frac{K}{K'}$ et $\frac{L}{L'}$ erit

$$\frac{KL'-K'L}{K'L'}=\frac{\mp 1}{K'L'},$$

nempe si $IK'-I'K=\pm 1$, erit $KL'-K'L=\mp 1$.

Namque substitutis valoribus ipsorum L, L' ex præcedentibus, erit $KL'-K'L=K(K'k+I')-K'(Kk+I)=KI'-K'I=-(IK'-KI')$; quod est $=\mp 1$, si $IK'-KI'=\pm 1$ fuit. Denominatorem autem subtractione peracta ipsis

$$\frac{KL'}{K'L'}=\frac{K}{K'} \text{ et } \frac{LK'}{L'K'}=\frac{L}{L'}$$

communem esse $K'L'$ patet.

Est vero hinc omnibus positive acceptis quævis *approximans* præcedente alternatim maior minorve, quum differentiæ sint alternatim negativæ et positivæ; sed cur approximans vocetur, nondum videtur. Interim differentiarum nempe ipsius

$$-\frac{1}{A'B'},\ +\frac{1}{B'C'},\ \ldots$$

quamvis sequente minorem esse facile perspicitur: quum

$$B'>A',\ C'>B',\ D'>C',\ \ldots;$$

nam etsi quodvis i, per quod multiplicatur ex. gr. I' ut K' fiat, 1 sit, est $K'=I'i+H'$, et H' nullibi est <1, nempe post $A'=1$, $B'=a$ est $C'=ab+1$, . . . , et a, b, . . . positive accipiuntur.

Hosted by Google

11. Sed *in differentias fractionum harum approximantium dictum a primitiva* $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ inquirendum est.

Denotetur (pag. 431, II.) $b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}$ per β, ita pro quoto k in genere $k+\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{l}}$ denotetur per $\varkappa$; quævis litera græca substituatur ipsi β et latina magna nominis eiusdem ipsi B, atque præcedens ipsi A, et germanicæ parvæ ipsis $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ post literam nominis eiusdem cum B sequentes; erit

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=\mathfrak{b}, \text{ et } (B'\beta+A')\mathfrak{c}=\mathfrak{a}.$$

Nam

$$B\beta+A=B\left(b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}\right)+A=\frac{Bb\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}+A\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}}$$
$$=\frac{(Bb+A)\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}=\frac{C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}},$$

quia $Bb+A=C$ (pag. 431); et hinc

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d},$$

quod est $=\mathfrak{b}$; nam si litera quævis id denotet, quod proprie significat, est

$$B=1,\ \beta=b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}},\ A=0,$$

adeoque

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=\left(b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}\right)\mathfrak{c}=b\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{b}.$$

Atque de quovis ad sequens concluditur generaliter, nempe etiam

$$D\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d};$$

quia

$$D\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=(Cc+B)\mathfrak{d}+C\mathfrak{e},=Cc\mathfrak{d}+B\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=C(c\mathfrak{d}+\mathfrak{e})+B\mathfrak{d}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}.$$

Pari modo liquet esse

$$(B'\beta+A')\mathfrak{c}=C'\mathfrak{c}+B'\mathfrak{d}=\mathfrak{a}=D'\mathfrak{d}+C'\mathfrak{e}=\ldots,$$

dummodo literæ magnæ accento insigniantur; quum plane

$$C'\mathfrak{c}+B'\mathfrak{d}=abc+\mathfrak{c}+a\mathfrak{d}$$

sit, quod est $=\mathfrak{a}$; quia $\mathfrak{a}=a\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=ab\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+a\mathfrak{d}$, nam $\mathfrak{b}=b\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$.

Hosted by Google

Hinc differentia cuiusvis *approximantis* $\frac{B}{B'}$ ab ipsa primitiva $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, litera cuiusvis nominis substituatur ipsi B, ceteras quoque concinne applicando erit

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}-\frac{B}{B'}=\frac{\mathfrak{b}B'-\mathfrak{a}B}{\mathfrak{a}B'},$$

quod substituendo in numeratore valores dictos ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ est

$$=\frac{(B\beta B'+AB')\mathfrak{c}-(B'\beta B+A'B)\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'}=\frac{(AB'-A'B)\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'}=\frac{\pm\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'};$$

nempe si $\frac{A}{A'}$ approximantem n-tam repræsentet, et n par fuerit, est $AB'-A'B=+1$, si vero n impar sit, -1 accipiendum est (pag. 433).

Itaque si *approximantium* $\frac{D}{D'}$ et $\frac{E}{E'}$ differentiæ a $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, nempe ipsa $\pm\frac{\mathfrak{e}}{D'\mathfrak{a}}$ et $\mp\frac{\mathfrak{f}}{E'\mathfrak{a}}$ considerentur, erit posterior manifesto minor priore; quia $E'>D'$, et $\mathfrak{f}<\mathfrak{e}$ est, si $\mathfrak{f}$ non $=0$; patetque, quum differentiæ alternatim positivæ et negativæ sint, valoribus $\frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}$ ... differentia decrescente, valorem $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ approximari, quamvis alternatim sint maiores minoresve. Si vero $\mathfrak{f}=0$ sit, ut pag. 431, tum $\frac{E}{E'}=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, quia $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}-\frac{E}{E'}=0$.

12. *Est autem, si* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{a}$ *inter se primi fuerint, etiam* $E=\mathfrak{b}$, et $E'=\mathfrak{a}$. Nam per (pag. 434) est

$$(D\delta+C)\mathfrak{e}=\mathfrak{b}, \text{ et } (D'\delta+C')\mathfrak{e}=\mathfrak{a};$$

sed si $\mathfrak{f}=0$, tum (pag. 431)

$$\delta=d+\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{e}}=d+\frac{0}{\mathfrak{e}}=d;$$

adeoque

$$\mathfrak{b}=(Dd+C)\mathfrak{e}=E\mathfrak{e},$$

quia (pag. 431) $Dd+C=E$, atque etiam

$$\mathfrak{a}=(D'd+C')\mathfrak{e}=E'\mathfrak{e},$$

Hosted by Google

Estque $\mathfrak{e}$ tum divisor communis maximus ipsorum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, qui itaque, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ inter se primi fuerint, $=1$ est. Unde etiam $E=\mathfrak{b}$, et $E'=\mathfrak{a}$ est.

13. Sed *nec ulla fractio terminorum integrorum* $\frac{p}{q}$ *datur*, quæcunque approximantes $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ fuerint, *quae denominatore ipso* D' *minore gaudens, ipsis* $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ *interseri queat;* id est ut pro casu, si

$$\frac{C}{C'}<\frac{D}{D'}$$

fuerit, sit

$$\frac{C}{C'}<\frac{p}{q}<\frac{D}{D'},$$

et pro $\frac{C}{C'}>\frac{D}{D'}$

$$\frac{C}{C'}>\frac{p}{q}>\frac{D}{D'}.$$

Nam si

$$\frac{C}{C'}<\frac{D}{D'},$$

tum

$$\frac{C}{C'}-\frac{D}{D'}=\frac{-1}{C'D'},$$

et

$$\frac{C}{C'}-\frac{p}{q}=\frac{Cq-C'p}{C'q}=-\frac{m}{C'q}$$

pro m integro positivo et non 0; adeoque

$$\frac{C}{C'}+\frac{1}{C'D'}=\frac{D}{D'},$$

atque

$$\frac{C}{C'}+\frac{m}{C'q}=\frac{p}{q}>\frac{D}{D'}.$$

quia m non <1, et per hypothesim esset $q<D'$. Si vero $\frac{C}{C'}>\frac{D}{D'}$ tum

$$\frac{C}{C'}-\frac{D}{D'}=\frac{1}{C'D'},$$

Hosted by Google

et

$$\frac{C}{C'} - \frac{p}{q} = \frac{m}{C'q};$$

atque

$$\frac{C}{C'} - \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'},$$

et

$$\frac{C}{C'} - \frac{m}{C'q} = \frac{p}{q},$$

quod est $< \frac{D}{D'}$, quum ex eodem $\frac{C}{C'}$ heic plus subtrahatur, quam prius.

14. *Exemplum* sequens illustret præcedentia. Sit $\mathfrak{b} = 7$, $\mathfrak{a} = 19$; erit (pag. 431 et sequ.) schema sequens:

$$19 \overset{2}{:} 7 \overset{1}{:} 5 \overset{2}{:} 2 \overset{2}{:} 1$$

2	1	2	2	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}>$	$\frac{1}{3}<$	$\frac{3}{8}>$	$\frac{7}{19}$
$\frac{A}{A'}$	$\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'} = \frac{1.1+0}{2.1+1}$	$\frac{D}{D'} = \frac{1.2+1}{3.2+2}$	$\frac{E}{E'} = \frac{3.2+1}{8.2+3}$

Patet autem etiam $\frac{n.7}{n.19}$ pro utvis magno n eosdem quotos, adeoque easdem approximantes dare. Unde fractio terminis magnis expressa cum errore in praxi exiguo terminis parvis exprimi potest.

15. Notandum etiam est, *approximantium quamvis minimis terminis expressam esse*. Nam $\frac{C}{C'} = \frac{n}{m}$ pro n, m integris et $n < C$ esse nequit; quia tum pro certo integro q per (pag. 425)

$$C = nq \text{ et } C'l = mq$$

esset. Sed (pag. 433)

$$BC' - B'C = \pm 1;$$

Hosted by Google

itaque substituendo ipsis C et C' esset

$$Bmq - B'nq = \pm 1,$$

adeoque

$$Bm - B'n = \pm \frac{1}{q};$$

quod fieri nequit, quum $Bm - B'n$ integer, $\frac{1}{q}$ vero unitate minor sit.

16. *Sed est praeterea*, si per $\frac{B}{B'}$ post $\frac{A}{A'} = \frac{0}{1}$ sequens intelligatur,

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} = \frac{E}{E'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}};$$

nempe continuando donec libuerit, erit seriei summa æqualis approximanti litera seriei postrema denotatæ. Nam

$$\frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{B'C'},$$

adeoque

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} = \frac{C}{C'},$$

ita

$$\frac{C}{C'} - \frac{D}{D'} = \frac{-1}{C'D'},$$

hinc

$$\frac{C}{C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'};$$

itaque

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'};$$

quod continuari patet. In exemplo allato est

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.8} - \frac{1}{8.19} = \frac{7}{19}.$$

17. Sit

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \ldots$$

Hosted by Google

retineanturque denotationes superiores; nempe

$$\frac{A}{A'}=\frac{1}{0},\quad \frac{B}{B'}=\frac{a}{a'},\quad \frac{C}{C'}=\frac{a}{a'+\frac{b}{b'}},\ldots;$$

erit hic quoque in genere

$$\frac{K}{K'}=\frac{I\,i'+H\,i}{I'i'+H'i},$$

nempe

$$K=Ii'+Hi,$$

et

$$K'=I'i'+H'i;$$

adeo ut lex formationis cuiusvis approximantis e præcedentibus iuxta tabellam sequentem pateat.

$a,\ a'$	$b,\ b'$	$c,\ c'$	$d,\ d'$
$\frac{0}{1}=\frac{A}{A'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'}=\frac{B\,b'+Ab}{B'b'+A'b}$	$\frac{D}{D'}=\frac{C\,c'+B\,c}{C'c'+B'c}$

Nam si

$$I=Hh'+G\,h,$$

atque

$$I'=H'h'+G'h,$$

substituendo $h'+\frac{i}{i'}$ ipsi h', patet prodire $\frac{K}{K'}$; est autem

$$\frac{H\left(h'+\frac{i}{i'}\right)+Gh}{H'\left(h'+\frac{i}{i'}\right)+G'h}=\frac{H\,h'i'+Hi+G\,hi'}{H'h'i'+H'i+G'hi'}=\frac{I\,i'+H\,i}{I'i'+H'i},$$

quia per hypothesim

$$H\,h'+G\,h=I,$$

et

$$H'h'+G'h=I'.$$

Hosted by Google

18. *Erit autem*

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-a}{A'B'},$$

$$\frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{BC'-B'C}{B'C'}=\frac{B(B'b'+A'b)-B'(Bb'+Ab)}{B'C'}=$$

$$=\frac{(BA'-B'A)b}{B'C'}=\frac{ab}{B'C'}.$$

Atque in genere si

$$\frac{I}{I'}-\frac{K}{K'}=\pm\frac{ab\ldots i}{I'K'},$$

est

$$\frac{K}{K'}-\frac{L}{L'}=\mp\frac{ab\ldots ik}{K'L'}.$$

Nam

$$KL'-K'L=K(K'k'+I'k)-K'(Kk'+Ik)=(KI'-K'I)k=$$

$$=-(IK'-KI')k=\mp ab\ldots ik.$$

Erit itaque series differentiarum cuiusvis a sequente

$$-\frac{a}{A'B'}+\frac{ab}{B'C'}-\frac{abc}{C'D'}+\frac{abcd}{D'E'}-\ldots,$$

atque quum sit

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-a}{A'B'},$$

est

$$\frac{A}{A'}+\frac{a}{A'B'}=\frac{B}{B'};$$

et quia

$$\frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{ab}{B'C'},$$

est

$$\frac{B}{B'}-\frac{ab}{B'C'}=\frac{C}{C'}=\frac{A}{A'}+\frac{a}{A'B'}-\frac{ab}{B'C'};$$

quod continuari patet, ut pro $A=0$ sit

$$\frac{a}{A'B'}-\frac{ab}{B'C'}+\frac{abc}{C'D'}-\frac{abcd}{D'E'}=\frac{E}{E'};$$

et ita porro.

Ponatur

$$a=1,\ b=\mathfrak{a}^2,\ c=\mathfrak{b}^2,\ d=\mathfrak{c}^2,\ \&$$

Hosted by Google

atque

$$a' = \mathfrak{a},\ b' = \mathfrak{b} - \mathfrak{a},\ c' = \mathfrak{c} - \mathfrak{b},\ d' = \mathfrak{d} - \mathfrak{c},\ \&$$

erit

$$B' = \mathfrak{a},\ \text{et}\ C' = B'b' + A'b = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{ab};$$

atque si

$$H' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{g},$$

et

$$I' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh},$$

est

$$K' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ghi};$$

nam

$$K' = I'i' + H'i = I'(\mathfrak{i} - \mathfrak{h}) + H'\mathfrak{h}^2 =$$
$$= \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ghi} - \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh}^2 + \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh}^2 = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{hi} = K'.$$

Atque hinc generaliter est pro quavis differentiarum dictarum:

$$\frac{ab \ldots f}{F'G'} = \frac{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 \ldots \mathfrak{e}^2}{\mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{e}.\ \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ef}} = \frac{1}{\mathfrak{f}}.$$

Itaque

$$\frac{a}{A'B'} - \frac{ab}{B'C'} + \frac{abc}{C'D'} - \frac{abcd}{D'E'} = \frac{E}{E'} = \frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{1}{\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{c}} - \frac{1}{\mathfrak{d}};$$

idemque continuari usquequo libuerit patet.

Unde manifesto, *si*

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{1}{\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{c}} - \ldots$$

series convergens sit, et tendat ad s, etiam

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b} - \mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{c} - \mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{d} - \mathfrak{c}} + \ldots$$

tendet ad s. Hinc

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \ldots \backsim \frac{\pi}{4},$$

quæ expressio dimidii quadrantis pro radio 1 a Lord Brounker primo fractionum continuarum auctore est, et cum serie Leibnitiana (pag. 334) convenit, pro

Hosted by Google

$$\mathfrak{a}=1,\ \mathfrak{b}=3,\ \mathfrak{c}=5,\ldots$$

adeoque

$$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=2=\mathfrak{c}-\mathfrak{b}=\ldots;$$

nimirum

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \backsim \frac{\pi}{4}.$$

Potest etiam terminis fractionis permutatis, valor fractione continua exprimi; nempe

$$\frac{4}{\pi}=1:\frac{\pi}{4}=1:\frac{1}{1+\gamma},$$

si

$$\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\ldots$$

per γ exprimatur; itaque

$$\frac{4}{\pi}=1+\gamma=1+\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\ldots$$

19. *Applicatur fractio continua et ad resolutionem aequationis quadticae*, modo sequenti. Sit

$$x(a+x)=b;\ \text{est}\ x=\frac{b}{a+x},$$

et hoc, substituendo ipsi x ad dextram semper $\frac{b}{a+x}$, fiet

$$x=\frac{b}{a+x}=\frac{b}{a+\frac{b}{a+x}}$$

continuando in infinitum. Quæritur, num valor usque ad aliquod a acceptus valori ipsius x dato quovis propius accedat?

Quod in præcedentibus

$$a,\ b,\ c,\ldots a',\ b',\ c',\ldots$$

fuit, est hinc

$$b\ \text{et}\ a;$$

atque

$$\frac{A}{A'}=\frac{0}{1},\quad \frac{B}{B'}=\frac{b}{a},\quad \frac{C}{C'}=\frac{ab}{a^2+b},\quad \frac{D}{D'}=\frac{a^2b+b^2}{a^3+2ab}\ \&c.$$

Hosted by Google

Differentiæ vero sunt

$$-\frac{b}{A'B'}, +\frac{b^2}{B'C'}, -\frac{b^3}{C'D'}, +\frac{b^4}{D'E'}, \ldots$$

ubi exponentem ipsius b semper porro uno crescere patet; atque etiam quodvis ipsorum

$$A,\ B, \ldots, A',\ B', \ldots$$

si $\frac{I}{I'}$ ab $\frac{A}{A'}$ incipiendo $(n+2)$-tum sit, exprimi per n, a, b potest; nempe

$$\frac{I}{I'} = \frac{a^n b + (n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4}b^3 + \ldots}{a^{n+1} + na^{n-1}b + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a^{n-3}b^2 + \ldots}$$

terminis tam in numeratore $= I$, quam in denominatore $= I'$ eousque acceptis, donec factor aliquis 0 fiat. Est nempe pro $(n+2)$-to terminus ultimus numeratoris

$$\frac{(n-p)(n-(p+1))(n-(p+2))\ldots(n-(2p-1))}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots\ p}a^{n-2p}b^{p+1}$$

si p denotet $\frac{n}{2}$ pro n pari, et $\frac{n-1}{2}$ pro n impari. Denominatoris autem terminus ultimus est

$$\frac{(n-(p'-1))(n-p')\ \ldots\ (n-(2p'-2))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ p'}a^{n-(2p'-1)}b^{p'}$$

denotante p' pro n pari id quod antea, pro n impari vero $\frac{n+1}{2}$.

Nimirum si aliquot ipsorum

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'}, \ldots$$

computentur, facile animadvertitur, e quovis prodire sequentis denominatorem, si illius denominator per a multiplicatus numeratori eiusdem addatur, et prodire numeratorem, si illius denominator per b multipli-

Hosted by Google

cetur; unde tabula coefficientium numericorum, qui terminis literarum præfixarum appertinent, sequens conficitur.

A', B	1	0		
B', C	1	0		
C', D	1	1	0	
D', E	1	2	0	
E', F	1	3	1	0
F', G	1	4	3	0

Manifesto secunda columna numerorum verticalis est series numerorum naturalium, tertia est series secundi, quarta tertii ordinis, ... et quivis terminus est summa suprastantis et illius qui ad lævam in columna horizontali superius sequenti est. Hinc ad expressionem dictam perveniendo, de quovis ad sequens concluditur; nempe si valeat usque ad $\frac{I}{I'}$, quod sit $(n+2)$-tum, valet et de $\frac{K}{K'}$, nempe $(n+3)$-to. Erit enim

$$\frac{K}{K'} = \frac{Ia + Hb}{I'a + H'b};$$

estque per hypothesim:

$$Ia = a^{n+1}b + (n-1)a^{n-1}b^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-\mu)(n-(\mu+1))\ldots(n-(2\mu-2))(n-(2\mu-1))}{1 \cdot 2 \ldots \mu}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1} + \ldots$$
$$Hb = a^{n-1}b^2 + (n-2)a^{n-3}b^3 + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}a^{n-5}b^4 + \ldots +$$
$$+ \frac{(n-\mu)(n-(\mu+1))\ldots(n-(2\mu-2))}{1 \cdot 2 \ldots (\mu-1)}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1} + \ldots$$

ubi considerando formulam, eamque applicando ad n et $n-1$, patet terminum ultimum prioris et posterioris terminos generales, atque valo-

Hosted by Google

ribus dictis ipsorum p et p' substitutis ultimos esse, nempe terminum immediate sequentem factorem 0 ingredi; imo eadem substitutione prodit, pro denominatoris termino ultimo ipsius a exponentem 0 fieri pro n impari, et 1 pro n pari, atque

$$\frac{(n-(p'-1))(n-p')(n-(p'+1))\ldots(n-(2p'-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p'}$$

esse $=1$ pro n impari, et $\frac{n}{2}+1$ pro n pari (de $(n+2)$-ta fractione loquendo).

Si vero in dictis terminis generalibus coefficientes eiusdem facti e potentiis ipsorum a et b conflati, reducendo ad denominatorem eundem, addantur; factore communi exemto, erit

$$\mu+n-(2\mu-1)=n-(\mu-1),$$

atque prodibit

$$\frac{(n-(\mu-1))(n-\mu)((n-(\mu+1))\ldots(n-(2\mu-2))}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\mu}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1};$$

quod pro $a^{n-2\mu+1}\,b^{\mu+1}$, in K, in quo terminus primus est $a^{n+1}b$, regulæ dictæ conveniens esse applicando patet. Eodem modo autem de K' demonstrari potest.

Si vero in expressionem $\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b}$ ipsius $\frac{K}{K'}$ ponatur $a+x$ pro a; prodibit

$$\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b}=x;$$

nempe nonnisi pro uno a, quod infimum in fractione continua est, poni $a+x$ debet, ut valor ipsi x æqualis sit; et peracta operatione prodibit

$$\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b}-\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b}=\frac{b(a+x)(H'I-HI')+ba(HI'-H'I)}{((a+x)I'+H'b)(I'a+H'b)}$$
$$=\frac{bx(H'I-HI')}{K'K'+xI'K'},$$

quod, nempe differentia fractionis approximantis a valore unius radicis æquationis quadraticæ, pro a et b positivis ad limitem 0 tendit, si $n\backsim\infty$.

Hosted by Google

Sit enim

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}=\pm\left(\frac{a}{2}+\omega\right)$$

pro ω positivo; erit $-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\omega=\omega$ unus valor ipsius x; eruntque in hoc casu a, b, ω, atque omnes termini ipsorum I', K' positivi; et si $b=1$ ponatur, et $\frac{K}{K'}$ sit fractio $(n+2)$-ta pro n impari, coefficiens potentiæ ipsius b in termino ultimo denominatoris (pag. 444) erit $\left(\frac{n}{2}+1\right)a$; est autem K' (et tanto fortius $K'K'+\omega I'K'$) isto maius; numerator $bx\,(H'I-HI')$ vero est $=\pm\omega$, quia $b=1$, et $IK'-I'K$ signi ratione non habita est potentia ipsius b (pag. 443); atque manente numeratore denominatorem utvis augere licebit.

Ex. gr. pro $a=2$ et $b=1$ sit

$$x^2+2x=1;$$

erit unus valor ipsius x

$$-1+\sqrt{1+1}=\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

et hinc

$$+\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

unde etiam si pro $x^2+2x=1$ fiet $x^2-2x=1$, adeoque unus valor ipsius $x=1+\sqrt{2}$, erit

$$x=\frac{-1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots=\frac{1}{-2+}\,\frac{1}{-2+}\,\frac{1}{-2+}\cdots$$

nempe facile patet, quotamvis fractionem approximantem computatam iisdem terminis, eodemque signo — gaudere.

Sit $x^2+x=1$, erit

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$

Hosted by Google

et hinc

$$-1 \pm \sqrt{5} = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$$

nempe supremi fractionis continuæ termini id, quod infra lineam supremam est, divisor est. Hinc vero

$$\sqrt{5} = \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}} + 1,$$

quod etiam

$$= \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \ldots}}} + 2$$

ex $x^2 + 4x = 1$.

Ita ex $x^2 - x = 5$ est

$$\frac{5}{-1 + \frac{5}{-1 + \ldots}}$$

unus valor ipsius x.

20. Brevitatis studio casus pro b negativo præterire liceat, quum et de resolutione æquationis

$$x^2 - x = a$$

analoga aliquid dicendum sit. Est nempe

$$x^2 = a + x,$$

adeoque

$$x = \sqrt{a + x},$$

et hoc ipsi x semper substituendo donec libuerit, erit

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + x}} = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + x}}}$$

et ita porro; atque hoc quoque pro a positivo eousque continuari potest, ut omisso x quovis ω minus ab x differat, ut statim patebit.

Ex. gr.

Hosted by Google

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \backsim \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ex $x^2 - x - 1 = 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ unus valor ipsius x est.

Ita ex $x^2 - x - 2 = 0$ est

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{+2+}}\ldots} \backsim \pm 2,$$

et 2 est unus valor ipsius x, uti -2 in æquatione

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Unde etiam (pag. 446—7) e t

$$\frac{2}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{2}{1+}\ldots = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = \frac{2}{-1+}\,\frac{2}{-1+}\,\frac{2}{-1+}\ldots$$

Nempe $\sqrt{\ }$, inde ab secundo, sive ubique positive sive ubique negative accepto, duo valores oppositi alioquin æquales prodeunt; quos etiam tales esse oportet, ut eorum unus æquationi $x^2 + x - 2 = 0$, alter ipsi $x^2 - x - 2 = 0$ satisfaciat; ut statim patebit, quum -2 pro casu utroque idem maneat; quamobrem $\frac{+1-3}{2}$ in casu priore, et $\frac{-1+3}{2}$ in posteriore accipi nequit.

Potest quippe etiam x^m pro x^2 poni, *denotante m quemvis integrum positivum*

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\ldots}}} \backsim x$$

pro aequatione $x^m - x - a = 0$.

Sit pro a positivo

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a}} = b,\ \sqrt[m]{a+b} = b' \ \&$$

erit

$$\sqrt[m]{a} < b < b' \ \&;$$

prius b ipsi $\sqrt[m]{a}$, tum b' ipsi b & substitutis. Hinc si

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a}}}$$

Hosted by Google

quousque libuerit ad lævam continuatum, generaliter N dicatur, crescet N semper quovis novo $\sqrt[m]{a+}$ præposito; manebit tamen $<1+2a$; nam si

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\ldots+\sqrt[m]{a}}}=N,$$

erit

$$N^m=a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}};$$

adeoque

$$N^m-a=\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}<N$$

atque hinc quodvis N est $<1+2a$; nam si $N=$ aut $>1+2a$ esset, tum $N^m-a>N$ esset; nempe

$$(1+2a)^m-a>1+2a$$

pro $m>1$. Itaque crescens N sine fine, manens tamen minor, quam $1+2a$, gaudet limite. Sit limes is α, et sit

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}}=\alpha-\omega,$$

et

$$\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}=\alpha-\lambda;$$

erit primo $\sqrt[m]{\ }$ omisso

$$(\alpha-\omega)^m=a+\sqrt[m]{a+\ldots+\sqrt[m]{a}}=a+\alpha-\lambda$$

Sed tam ω, quam λ tendit ad 0; atque tum

$$(\alpha-\omega)^m\backsim\alpha^m,\ \text{et}\ a+\alpha-\lambda\backsim a+\alpha.$$

Consequenter $\alpha^m=a+\alpha$; atque limes ipsius

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}}$$

est radix æquationis $x^m-x-a=0$; atque si m par sit, radicali negative accepto prodibit radix æquationis $x^m+x-a=0$.

21. *Notandum quoque est et*

$$\sqrt{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots}}}$$

Hosted by Google

limite gaudere, esseque limitem hunc $a^{\frac{1}{m-1}}$; excepto $a=1$, nempe tum non limes, sed quivis valor $=a^{\frac{1}{m}}=1$. Nam incipiatur a dextra ad lævam præponendo radicalia in infinitum; erit prius

$$\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}},$$

dein

$$\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a}}=(a^{\frac{m}{m}}.a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m+1}{mm}},$$

atque

$$\sqrt[m]{aa^{\frac{m+1}{m^2}}}=(a^{\frac{m^2}{m^2}}.a^{\frac{m+1}{m^2}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m^2+m+1}{m^3}}.$$

Si vero prodeat

$$a^{\frac{m^p+m^{p-1}+\cdots+1}{m^{p+1}}},$$

fiet $\sqrt[m]{a}$ præponendo,

$$(a^{\frac{m^{p+1}}{m^{p+1}}}.a^{\frac{m^p+m^{p-1}+\cdots+1}{m^{p+1}}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m^{p+1}+m^p+\cdots+1}{m^{p+2}}};$$

exponens hic ipsius a autem est

$$\frac{m^{p+2}-1}{m-1}:m^{p+2}=\frac{m^{p+2}-1}{(m-1)\,m^{p+2}},$$

quod tendit ad $\frac{1}{m-1}$; namque si (pag. 150) dividatur $m^{p+2}-1$ per $m-1$, quotus erit

$$m^{p+1}+m^p+\ldots+1.$$

Consequenter

$$\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots\sqrt[m]{a\ldots}}}\backsim a^{\frac{1}{m-1}}.$$

Ex. gr.

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}\backsim 2^{\frac{1}{2-1}}=2,$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\ldots}}}=5^{\frac{1}{3-1}}=\sqrt{5}.$$

22. Plura huius generis construi posse cuique succurrere potest; sed his amplius immorari non vacat. Interim patet etiam, quod si fuerint

Hosted by Google

$$\frac{\alpha}{d}=q,\quad \frac{\beta}{d}=Q+\frac{r}{d};$$
$$\frac{r}{d'}=q',\quad \frac{d}{d'}=Q'+\frac{r'}{d'};$$
$$\frac{r'}{d''}=q'',\quad \frac{d'}{d''}=Q''+\frac{r''}{d''};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

erit

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:d}{\beta:d}=$$
$$=\frac{q}{Q}+\frac{r}{d}=\frac{q}{Q}+\frac{r:d'}{d:d'}=\frac{q}{Q}+\frac{q'}{Q'}+\frac{r'}{d'}=\frac{q}{Q}+\frac{q'}{Q'}+\frac{q''}{Q''}+\frac{r''}{d''}=\cdots$$

at pro $q, q', \ldots, Q, Q', \ldots$ integris, si α, β incommensurabilia fuerint, residuum nunquam 0 erit; quamvis ex. gr. r'' et d'' per dato quovis minus d''' dividi possit, prodeunte Q''' utvis magno cum residuo $r'''<d'''$, adeoque quoto $=Q+\frac{r'''}{d'''}$, ubi $\frac{r'''}{d'''}<1$; at continuari donec libuerit, et $\frac{\alpha}{\beta}$ per fractiones approximantes dictas approximari posse e iam dictis patet.

§. 42.

Applicatio fractionis continuae ad resolutionem aequationis indeterminatae gradus primi, pro valoribus integris, (pag. 373) exponenda venit.

Sit

$$\pm \mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y = \pm \mathfrak{c},$$

pro $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, pro $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ integris, et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ inter se primis atque signis $\pm$ sive ubique idem, sive diversa denotantibus.

1. Si quodvis ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ integer aliquis i metiatur tertium haud metiens, tum x et y valoribus integris minime gaudent. Nam si x et y integri essent, tum $\frac{\pm \mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y}{i}$ quoque integer esset; $\frac{\mathfrak{c}}{i}$ vero non esset integer; atque integer esset non integro æqualis.

2. Ponatur coefficiens maior, qualicunque signo gaudeat, loco primo; atque si signum — habeat, multiplicetur æquatio per -1, ut ex

Hosted by Google

$$-\mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y = \pm \mathfrak{c}$$

fiat

$$\mathfrak{a}x \mp \mathfrak{b}y = \mp \mathfrak{c}.$$

Tum evolvatur $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ in fractionem continuam, et quæratur approximantium penultima; sit hæc ex. gr. $\frac{E}{E'}$, erit sequens $\frac{F}{F'}$ atque $F = \mathfrak{b}$, et $F' = \mathfrak{a}$, quum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ inter se primi sint, (pag. 435); eritque $EF' - E'F = +1$, si $\frac{E}{E'}$ fuerit a $\frac{0}{1}$ inclusive numerando n-ta et n par sit, et -1 pro n impari. Unde

$$\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}E' = \pm 1,$$

adeoque

$$\mathfrak{a}E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}E'\mathfrak{c} = \pm \mathfrak{c};$$

atque addito

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}q - \mathfrak{a}\mathfrak{b}q = 0,$$

fit

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) - \mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c}.$$

Itaque si signa ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, quibus in hac æquatione gaudent, cum signis, quæ in æquatione proposita habent, convenirent, tum q rite accepto, $E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q$ ipsi x, et $E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q$ ipsi y substitui possent; at si signa dicta non convenerint, transformanda erit æquatio modo sequenti, ut hoc obtineatur.

3. Si $\mathfrak{b}$ in æquatione proposita signum $+$ habeat; pro $-\mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q)$ ponatur $+\mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c} + \mathfrak{a}q)$. Nempe factore utroque per -1 multiplicato, signum ipsius $\mathfrak{b}$ salvo valore mutatur.

Si vero signum ipsius $\mathfrak{c}$ sit diversum in

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) - \mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c},$$

aut in

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) + \mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c} + \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c},$$

tum $\pm \mathfrak{c}$ et coefficientes ipsorum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ multiplicentur per -1; nempe hoc pacto æquatio tota per -1 multiplicata, atque ad formam æquationis propositæ reducta erit.

Pariet autem quævis duarum harum æquationum duas æquationis formas, prouti $\mathfrak{c}$ signo $+$ vel $-$ gaudebit. Nempe

Hosted by Google

e priore $\mathfrak{a}(E\mathfrak{c}-\mathfrak{b}q) \quad -\mathfrak{b}(E'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}q) \quad =\pm\mathfrak{c}$

et $\mathfrak{a}(-E\mathfrak{c}+\mathfrak{b}q)-\mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c}+\mathfrak{a}q)=\mp\mathfrak{c},$

ex altera $\mathfrak{a}(E\mathfrak{c}-\mathfrak{b}q) \quad +\mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c}+\mathfrak{a}q)=\pm\mathfrak{c}$

et $\mathfrak{a}(-E\mathfrak{c}+\mathfrak{b}q)+\mathfrak{b}(E'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}q) \quad =\mp\mathfrak{c}.$

Unde videre est, quod ubi signa ipsorum $E\mathfrak{c}$ et $E'\mathfrak{c}$ conveniunt, etiam signa ipsorum $\mathfrak{a}q$ et $\mathfrak{b}q$ conveniant, sed illis contrarientur, et ubi illa diversa sunt, hæc quoque tam inter se quam cum illis contrarientur.

4. Quæritur, quomodo q pro quavis harum æquationum eligi debeat, ut *valores integri positivi, imo valores minimi prodeant?*

Oportet q esse integrum; quia nisi $\mathfrak{a}q$, $\mathfrak{b}q$ integri sint, $E\mathfrak{c}-\mathfrak{b}q$ et $E'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}q$ integri non erunt, si vero $\mathfrak{a}q$, $\mathfrak{b}q$ integri essent et $q<1$ esset, fieret $\frac{\mathfrak{b}q}{\mathfrak{a}q}$ fractio terminis minoribus expressa quam $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ (pag. 426), quum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ sint inter se primi &c.

In forma prima, ut $E\mathfrak{c}-\mathfrak{b}q$ et $E'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}q$ positivi fiant, debet esse $E\mathfrak{c}>\mathfrak{b}q$ atque $E'\mathfrak{c}>\mathfrak{a}q$; itaque $q<$ tam ipso $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$, quam ipso $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$. Unde manifesto ex integris, qui infra utrumque valorum $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ et $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ sunt, maximus integer eligendus pro q erit, ut quam plurimum destruendo, quam minimum positivum relinquat.

In forma secunda debet esse $\mathfrak{b}q>E\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}q>E'\mathfrak{c}$; itaque $q>\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$, et simul $q>\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$; adeoque pro q ex integris tam ipsum $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ quam ipsum $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ superantibus minimus eligendus est, ut terminus negativus e positivo destruens quam minimum relinquat. Unde forma secunda semper gaudet valore petito; uti etiam prima, quum ibi, si pro q alius integer non detur, 0 accipi possit; nempe si $\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}E'=\pm 1$, tum $\mathfrak{a}E\mathfrak{c}-\mathfrak{b}E'\mathfrak{c}=\pm\mathfrak{c}$ (pag. sequ.).

In tertia forma debet esse $\mathfrak{b}q<E\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}q>E'\mathfrak{c}$: itaque

$$\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}<q<\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}},$$

Hosted by Google

atque si inter $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ et $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ integer detur, quivis ipsi q substitui poterit; si vero nullus detur, nec ipsorum x et y valores ulli integri positivi erunt. In hac æquatione autem, si minimus valor ipsius x quæratur, tum omnium valorum dictorum ipsius q maximus accipiendus est, ut quo plus destruat e positivo; si vero minimum y quæratur, minimum accipi debet, ut negativum destruens quo minus relinquat. In forma quarta $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} < q < \frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$; itaque si detur integer ipso $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ maior et ipso $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ minor, is accipi poterit; atque pro minimo x minimum q, pro minimo y maximum q eligendum est.

5. Si $\mathfrak{c}=1$, tum nonnisi in casu formæ secundæ addi modo relato $\mathfrak{a}\mathfrak{b}q - \mathfrak{a}\mathfrak{b}q$ debet; nam si $\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}E' = \pm 1$ cum æquatione proposita conveniat, tum, ut statim patebit, E et E' valores minimi erunt; si vero non convenerit, in quavis forma præter secundam q fractio vera erit, quia $E < \mathfrak{b}$ et $E' < \mathfrak{a}$, adeoque (pag. 452) valor non erit integer.

Quod E et E' valores minimi sint, si $\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}E' = \pm 1$ propositæ æquationi convenerit, patet sic. Nisi minimi sint: sint $E - n$ et $E' - m$ minimi; erit

$$\mathfrak{a}E - \mathfrak{a}n - E'\mathfrak{b} + \mathfrak{b}m = \pm 1,$$

et subtrahendo æquationem priorem, est

$$\mathfrak{b}m - \mathfrak{a}n = 0,$$

adeoque $\mathfrak{b}m = \mathfrak{a}n$; et hinc

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \frac{n}{m};$$

atque per (pag. 426)

$$n = \mathfrak{b}k \quad \text{et} \quad m = \mathfrak{a}k$$

pro k integro; unde

$$E - n = E - \mathfrak{b}k, \quad \text{et} \quad E' - m = E' - \mathfrak{a}k$$

valores negativi essent non positivi, quia $E < \mathfrak{b}$, et $E' < \mathfrak{a}$.

Hosted by Google

6. *Exempla.*

a) Si quis debeat cruciferum alteri, atque is monetas 17 cruciferorum, et hic nonnisi monetas 7 cruciferorum habeat; quæritur numerus monetarum minimus, quo solutio fiat.

Erit
$$17x - 7y = 1.$$

Evolvatur $\frac{7}{17}$ in fractionem continuam: fiet $17 : \overbrace{7 : \overbrace{3 : 1}^{3}}^{2}$, et approximantes erunt $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{17}$, ubi $E = 2$ et $E' = 5$; atque $EF' - E'F$ idest $E\mathfrak{a} - E'\mathfrak{b} = -1$, quia $\frac{E}{E'}$ est tertia, et 3 est numerus impar; itaque signum ipsius 1 non convenit cum æquatione proprosita. Fiet vero iuxta formam secundam
$$\mathfrak{a}(-E + \mathfrak{b}q) - \mathfrak{b}(-E' + \mathfrak{a}q) = 1,$$
nempe heic $\mathfrak{c} = 1$; est vero $\frac{E}{\mathfrak{b}} = \frac{2}{7}$, et $\frac{E}{\mathfrak{a}} = \frac{5}{17}$, atque ut dictum est, q minimum integrorum utrumque valorem superantium esse debet; erit igitur $q = 1$; atque
$$17(-2 + 7) - 7(-5 + 17) = 1,$$
nempe
$$17 \cdot 5 - 7 \cdot 12 = 1.$$

b) Ita vulgare problema resolvitur: 100 thaleris coempta sunt 100 pecora, vaccæ 10 thaleris, oves 5 thaleris, et sues dimidio thalero; quæritur quotnam fuerint vaccæ, quot oves, et quot sues?
$$10x + 5y + \frac{1}{2}z = 100,$$
$$x + y + z = 100.$$

Unde multiplicando per 2 æquationem priorem, et tum subtrahendo ex ea posteriorem, erit
$$19x + 9y = 100;$$
et si $\frac{9}{19}$ in fractionem continuam evolvatur fiet $19 : \overbrace{9 : 1}^{9}$ atque approximantes erunt $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}$, et ultima fractio est $\frac{9}{19}$, penultima vero est $\frac{1}{2}$; atque
$$EF' - E'F = 19 - 9.2 = 1;$$
et per $\mathfrak{c} = 100$ multiplicando, fit

Hosted by Google

$$19.100 - 9.200 = 100;$$

atque hinc fit

$$19(100 - 9q) + 9(-200 + 19q) = 100$$

æquationi $19x + 9y = 100$ conveniens. Unde per formam tertiam

$$\frac{200}{19} < q < \frac{100}{9},$$

adeoque q integer inter $10 + \frac{10}{19}$ et $11 + \frac{1}{9}$ esse, pro valoribus integris positivis ipsorum x, y debet; quapropter q nonnisi 11 esse potest; eritque

$$x = 100 - 9.11 = 1, \quad \text{et} \quad y = -200 + 19.11 = 9.$$

Unde

$$z = 100 - x - y = 100 - (1 + 9) = 90.$$

c) Ex eodem demonstratur *peripheriam per factum e quotvis numeris primis constructione geometrica dividi posse, si per quemvis eorum id fieri queat, et nullus eorundem in facto pluries quam semel occurrat.*

Sit nempe peripheria $= 1$, et sint primi dicti α, β, γ, ... singuli diversi, et accipiantur prius tantum α et β; erit pro certis x, y integris et $\beta > \alpha$,

$$x \cdot \frac{1}{\alpha} - y \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Nam reducendo ad denominatorem eundem, est

$$\frac{\beta x - \alpha y}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\beta};$$

et hinc

$$\beta x - \alpha y = 1;$$

quod semper valores integros positivos pro x et y per formam secundam habet; si nempe penultima approximans ipsius $\frac{\alpha}{\beta}$ det

$$EF' - E'F = 1,$$

erit $x = E$ et $y = E'$; si vero

$$EF' - E'F = -1,$$

per formam secundam prodibunt valores quæsiti.

Hosted by Google

Atque si de certo quovis factorum α, β, ... primorum numero constet, et de uno pluribus constabit. Sit enim $\alpha\beta\ldots=p$, et accedat factor primus μ; erit aut $p>\mu$ aut $p<\mu$, quia si $p=\mu$ esset, μ compositus fieret; sit igitur ex. gr. $p>\mu$; erit

$$\frac{1}{p\mu}=x\cdot\frac{1}{\mu}-y\cdot\frac{1}{p};$$

nam per hoc esset

$$px-\mu y=1,$$

ubi p et μ inter se primi sunt, adeoque x et y valoribus integris positivis gaudent.

Si vero factor aliquis pluries occurrat, hoc modo neutiquam habebunt x et y valores integros positivos. Nam ex. gr.

$$\frac{1}{\alpha\alpha\beta}=\frac{x}{\alpha}\pm\frac{y}{\alpha\beta}$$

pro x, y integris esse nequit; nam tum esset

$$1=\alpha\beta x\pm\alpha y,$$

et hinc $\frac{1}{\alpha}$ esset $=\beta x\pm\alpha y$, quod fieri nequit, quum $\frac{1}{\alpha}$ fractio vera membrum ad dextram autem integer sit.

Interim alio modo factorem 2 quotiesvis ingredi posse ex elementis Geometriæ notum est. Videatur opus (pag. 206) citatum.

§. 43.

In opere eodem æquatio indeterminata gradus secundi generaliter resolvitur; quod quum, uti pro x, y, ... æquationes altiores, referre instituti ratio haud permittat, cum pluribus aliis supplemento reservatur. Aliquid tamen ad illustrandam (pag. 395) addendum est.

1. Si m aut numerus impar fuerit, aut pro m pari, t negativum sit, $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx+t$ semper radice reali gaudet. Potest enim in casu primo x tam magnum accipi, una vice positive, altera vice negative, in

Hosted by Google

casu posteriore vero una vice tam magnum, altera vice tam parvum, ut in utroque casu valor expressionis una vice positivus, altera negativus sit; atque tum transitum per 0 dari statim patebit.

Sit $px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t=\alpha$, id est dicatur α, et $x^m+px^{m-1}+\ldots+rx^2$ dicatur β, et $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx$ dicatur γ.

Si integer i quovis coefficientium, et coefficiente ipsius x^0, maior, atque $x \ge mi$ accipiatur, erit omnino

$$x^{m-1} \ge x^{m-2} \ge x^{m-3} \ge \ldots$$

eruntque post x^m termini numero m, quorum quivis $\le ix^{m-1}$; itaque $mix^{m-1} \ge \alpha$, seu $mi(mi)^{m-1}$, id est $x^m \ge \alpha$. Itaque pro m impari, si x accipiatur $=mi$ positive, valor expressionis positivus erit, si vero idem negative accipiatur, valor negativus fiet.

Pro m pari autem et t negativo, si

$$x=\frac{1}{i(m-1)}$$

et i talis integer sit, ut is sit maius quovis coefficientium: erunt pro β ante sx termini numero $m-1$, atque quum $x \le 1$ sit, erit

$$x^2 \ge x^3 \ge x^4 \ge \ldots \ge x^{m-1} \ge x^m,$$

adeoque

$$(m-1)six^2 \ge \beta,$$

seu

$$sx \ge \beta.$$

Aut vero si i ita accipiatur, ut $it \ge$ quovis coefficientium sit, et x ponatur $=\frac{1}{mi}$; constabit γ e terminis ante t numero m, et

$$x \ge x^2 \ge x^3 \ge \ldots,$$

atque $mit.\frac{1}{mi}$, id est

$$t \ge \gamma.$$

Hosted by Google

Itaque pro m pari et t negativo poterit quoque per plane dicta x una vice tam magnum accipi, ut valor functionis positivus sit, et altera vice tam parvum, ut valor negativus sit; nempe si $x = \frac{1}{i(m-1)}$ accipiatur negative, si s positivum, et positive, si s negativum fuerit, erit γ negativum, adeoque et addito t negativo functio tota negativa fiet; pariter si x modo posteriore ita accipiatur, ut $t \rhd \gamma$ sit.

Consequenter in omnibus casibus dictis datur functionis valor tam positivus quam negativus; et tum valorem $= 0$ dari (præter pag. 408) et modo sequenti constat.

Pro quovis a datur tale ω, ut $F(x)$ dicta functione

$$x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t,$$

sit

$$F(x+\omega) - F(x) \lhd a.$$

Nam terminus ultimus t adest, imo et reliqui termini omnes ipsius $F(x)$ adsunt in $F(x+\omega)$, adeoque differentia est summa ceterorum; quæ non maior esse potest, quam si termini hic omnes signo eodem gauderent, sed minor est, quam si generaliter pro $A(x+\omega)^\mu$ præter Ax^μ accipiatur $\frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega}$ in termino quovis; nempe

$$A\left(x^\mu + \mu x^{\mu-1}\omega + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^{\mu-2}\omega^2 + \ldots + \omega^\mu\right) - Ax^\mu$$

est minus quam si a $\mu x^{\mu-1}\omega$ incipiendo series infinita exponentis $\frac{(\mu-1)\omega}{2x}$ esset; nam sequentes exponentes decrescunt, atque $\frac{(\mu-1)\omega}{2x} \lhd 1$ fit, si $\omega \lhd \frac{2x}{\mu-1}$ accipiatur; essetque tum limes summæ

$$\mu A x^{\mu-1}\omega : \left(1 - \frac{(\mu-1)\omega}{2x}\right) = \frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega}.$$

Sunt autem in $F(x+\omega)$ termini numero m (præter t) sub formam $A(x+\omega)^\mu$ venientes; eritque quodvis

$$A(x+\omega)^\mu - Ax^\mu \lhd \frac{a}{m}, \text{ si } \frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega} = \frac{a}{m};$$

Hosted by Google

fiet vero hoc, si

$$\omega = \frac{2ax}{2m\mu Ax^{\mu} + (\mu - 1)a},$$

nempe ex eo valor iste ipsius ω prodit, in quo ita augere m licet, ut ω dato quovis λ minus fiat; exprimatur enim per $\frac{h}{mk+l}$, et ponatur νm pro m; erit

$$\frac{h}{\nu mk + l} = \lambda,$$

si

$$\nu = \frac{h}{mk\lambda} - \frac{l}{mk}$$

accipiatur; estque manifesto ν eo maius, quo minus λ est. Si igitur quæratur tale ω, ut

$$(x+\omega)^m - x^m \lessdot \frac{a}{m}, \; p(x+\omega)^{m-1} - px^{m-1} \lessdot \frac{a}{m},$$

et idem fiat pro quovis termino usque ad $s(x+\omega) - sx$; accipiatur minimum illorum ω, sive λ quovis eorum minus, cum $\nu > 1$; eritque quum termini præter t numero m sint,

$$F(x+\omega) - F(x) \lessdot m \cdot \frac{a}{m} = a.$$

Concipiatur iam (Fig. 55) $\boxplus x > mi$, atque feratur extremitas eius retrorsum, ut decrescat usque ad 0 in $\mathfrak{p}$, et inde porro crescat negative semper porro; erit prius aliquamdiu valor functionis positivus, adeoque datur (pag. 20) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod valor semper positivus fit, post quod autem aliquamdiu non est positivus. Erit autem $\mathfrak{p}*$ radix æquationis, nempe $\varkappa$, quod inter $\mathfrak{p}$ et $*$ est, ipsi x substituto, fit $F(\varkappa) = 0$. Nam valor is nec positivus nec negativus (nisi 0) esse potest; si enim positivus esset, sit $= \boxplus a$; accipiaturque $x = \mathfrak{p}* + \omega$, ita ut ω ultra $*$ ad dextram et tale sit, ut si valor novus functionis b dicatur, sit $b - a \lessdot a$; erit b necessario positivum, quia si negativum esset, fieret $b - a \gtrdot a$; si vero $b = 0$ esset, radix ibi esset. Essetque idem pro quovis adhuc minori

negativo ω; itaque punctum ultimum ulterius esse deberet. Si vero $F(x) = F(\mathfrak{p}*)$ negativum esset sit $= \vdash b$, et accipiatur tale $\vdash\!\!+ \lambda$ intra $*$ ad lævam, ut sit pro $x = \mathfrak{p}* - \lambda$ valor functionis c, atque $c - (\vdash b) \lessdot b$; erit c necessario negativum; si enim positivum esset, fieret $c \vdash\!\!+ b \gtrdot b$; itaque punctum ultimum ante $*$ esset, et in neutro casu in $*$ caderet.

Consequenter in omni casu, excepto si m par et t positivum sit, datur radix realis; et nonnisi de hoc casu quæstio est. Realem aliquando et aliquando nonnisi imaginariam dari casus ostendunt; ex. gr. $x^2 \pm 3x + 2$ habet utramque realem, ita $X^{17} - 1 = 0$ unam realem, at $x^2 + x + 2$ nonnisi imaginariam radicem habet. At vero semper si non reali, saltem imaignaria radice quævis æquatio gaudet.

2. Demonstrationem huius tamen ad casum exceptum restringere necesse non est; quum iam anno 1799 prodierit «*Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse; auctore* CAROLO FRIDERICO GAUSS.» — Primitiæ messis ditissimæ — quasi stella venientis solis nuncia — veteranum iuvenis opus — adinstar Herculis, dum serpentem infans disrupit. Demonstrationum, quas summi Geometræ dederant, defectu summa cum modestia revelato, ibidem non solum exacta, sed valde clara, elegans, et evidens exponitur; fit quidem Geometriæ subsidio; sed veritas veritati heterogenea non est, quippe quæ omnes cœlesti fraternitatis vinculo iunctæ, ad quamvis tuendam confluunt; monitum tamen ibidem est, totam demonstrationem mere analytice tradi posse, sed methodus ista rem clarius ob oculos ponere videbatur. Trium quas dedit auctor, prima hæc tantum, et quidem plane nunc huc pervenit.

Instituti ratio eam tantum partem breviter referre permittit, quæ in quovis casu unam saltem imaginariam radicem dari probat; unde, ut ibidem traditur, id quod titulus pollicetur, facile sequitur.

Est (pag. 197.)

$$A + B\sqrt{-1} = u(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z),$$

Hosted by Google

et hoc ad n elevatum est

$$= u^n (\cos. nz + \sqrt{-1}. \sin. nz).$$

Unde si $x^m + ax^{m-1} + \ldots + kx + l$ dicatur X, substituendo

$$r(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)$$

ipsi x, erit

$$\begin{aligned} X = \quad & r^m \cos. mz + ar^{m-1} \cos. (m-1)z + \ldots + kr \cos. z + l \\ & + (r^m \sin. mz + ar^{m-1} \sin. (m-1)z + \ldots + kr \sin. z)\sqrt{-1}\,; \end{aligned}$$

quod si dicatur $U + \sqrt{-1}.\ T$, erit $X = 0$ pro illis z, r, pro quibus $U = 0$ et simul $T = 0$; quia tum

$$U + \sqrt{-1}.\ T = 0 + \sqrt{-1}.0 = 0,$$

atque substituendo $r(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)$ ipsi x, fiet $X = 0$.

Talia z, r igitur dari pro quovis determinato integro positivo m demonstrandum venit. Sit in plano P quaquaversum infinito (Fig. 56) recta $\mathfrak{ab}$ utrinque infinita; et in ea punctum fixum $\mathfrak{c}$; et cuiusvis puncti ipsius P nomen generale sit $\mathfrak{p}$, dicaturque r recta $\mathfrak{pc}$, et angulus $\mathfrak{acp}$ generaliter z dicatur. Concipiatur porro quovis radio r positive accepto in plano P circa centrum $\mathfrak{c}$ circulus, et in quovis puncto $\mathfrak{p}$ erectum ad P perpendiculum $= T$, et quidem supra planum, si valor ipsius T pro illo $\mathfrak{p}$ positivus sit, et infra si negativus sit, atque in plano si $T = 0$ sit; dicaturque complexus omnium extremitatum, in qua aliqua ordinatarum dictarum terminatur, *superficies prima*. Pari modo, nonnisi U pro T ponendo, fiat *superficies secunda*. Erit manifesto superficies utraque continua, et quaquaversum infinita ut planum, spatium quaquaversum infinitum in duas plagas dividens; complexus autem omnis eius, si quid prima cum plano P commune habeat, dicatur *linea prima*, et complexus eius, si quid superficies secunda cum P commune habeat, dicatur *linea secunda;* nempe lineas esse sensu in Geometria sublimiore patebit. Si quod punctum superficiei primæ cum P commune fuerit, manifesto ibi ordinata $T = 0$ est; et in puncto superficiei secundæ cum P communi ordinata

Hosted by Google

$U=0$ est. Determinantur idcirco lineæ prima et secunda per æquationes $T=0$, et $U=0$. Atque si probetur, lineam primam cum linea secunda punctum aliquod $\mathfrak{p}'$ commune habere, tum si recta $\mathfrak{p}'\mathfrak{c}$ dicatur r', et angulus $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{p}'$ dicatur z' erit $r'(\cos. z' + \sqrt{-1}. \sin. z')$ radix æquationis; quia pro illis r', z' tam T, quam U erit simul $=0$.

3. In opere citato plura commemorantur, curvam hanc singularem concernentia; quæ, prouti m et coefficientes accipiuntur, varia pluribusque ramis utrinque infinitis complexa esse potest; et quum plures haud tanti momenti ab inventoribus nuncupatæ sint, nisi inter tot tantaque alia auctoris inventa occasum quasi heliacum pateretur, *Gaussiana* dici posset.

Ex. gr. est curva utraque, si ad coordinatas orthogonales, id est rectangulas, revocetur, ordinis m. Est nempe (Fig. 57)

$$x = r \cos. z, \quad y = r \sin z;$$

et per (pag. 195.) quidquid sit n, est

$$r^n \sin. nz = nx^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots,$$

et

$$r^n \cos. nz = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} y^4 + \ldots$$

Itaque tam functio superior ipsum T, quam functio ipsum U exprimens, pro $T=0$ et $U=0$, pro abcissis x e centro acceptis, et ordinatis y ad x perpendicularibus, constabit per (pag. 195.) e certo terminorum formæ $Ax^\alpha y^\beta$ numero, denotantibus α, β integros positivos, quorum summa, ubi maxima est, fit $=m$.

Danturque ad minimum m intersectiones lineæ primæ cum secunda; quamquam fieri etiam possit, ut prima a pluribus ramis secundæ secetur, et tum X plures factores æquales habebit. Intersectio autem sub angulis rectis fit; et si plura crura utriusque curvæ in eodem puncto convenerint, totidem crura lineæ primæ adsunt, quot crura secundæ, hæcque alternatim posita, sub angulis æqualibus secant se invicem &;

Hosted by Google

sed totam dissertationem describere nimium foret. Hic sufficit unius intersectionis necessitatem demonstrare.

4. Demonstratur ibidem ad scopum præsentem, *e centro* $\mathfrak{c}$ *describi posse circulum, in cuius peripheria sint* $2m$ *puncta, nec plura, in quibus* $T=0$, *totidemque in quibus* $U=0$; *et quidem ita, ut singula posteriora inter bina priorum iaceant.*

Dicatur enimvero (μ) extremitas arcus z ex $\mathfrak{a}$ positive supra $\mathfrak{ac}$ incipientis, si $z=\mu\frac{q}{m}$ pro q æquali dimidio quadranti, atque data æquatione X gradus certi m-ti; dicaturque S summa coefficientium omnium terminorum post x^m sequentium positive acceptorum; dicaturque R quodvis $\mp r$, quod tam posita omnino unitate quam ipso $S\sqrt{2}$ maius est. Eritque pro quibusvis R et μ, atque $z=\frac{\mu q}{m}$, per superius (pag. 462.) dictum,

$$T=R^m \sin. m\frac{\mu q}{m}+R^{m-1}a\sin.(m-1)\frac{\mu q}{m}+\ldots+Rk\sin.\frac{\mu q}{m};$$

quod item est

$$R^{m-1}\left(R\sin.\mu q+a\sin.(m-1)\frac{\mu q}{m}+\ldots+\frac{k}{R^{m-2}}\sin.\frac{\mu q}{m}\right);$$

atque hoc pro $\mu=8i+1$ aut $\mu=8i+3$, denotante i integrum quemvis, positivum, et pro $\mu=8i+5$ aut $\mu=8i+7$ negativum est. Nam si

$$z=(8i+1)\frac{q}{m},$$

erit

$$\sin. mz=\sin.(8iq+q)=\sin. q=\mp\sqrt{\tfrac{1}{2}};$$

nempe sinus dimidii quadrantis (pro radio 1)

$$=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}=\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ita pro

Hosted by Google

$$z = (8i + 3)\frac{q}{m}$$

est

$$\sin. mz = \sin. 3q = +\sqrt{\frac{1}{2}};$$

si vero

$$z = (8i + 5)\frac{q}{m},$$

erit

$$\sin. mz = \sin. 5q = \sin. (-3q) = -\sqrt{\frac{1}{2}};$$

ita pro

$$z = (8i+7)\frac{q}{m},$$

est

$$\sin. mz = \sin. 7q = -\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Unde substituendo in valore proximo $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ipsi sin. μq; erit manifesto pro signo $+$ valor positivus, pro signo $-$ vero negativus; nam etsi termini intra parenthesim post primum, nempe $\pm R\sqrt{\frac{1}{2}}$, sequentes, pro signo $+$ omnes negativi, pro signo $-$ vero omnes positivi essent, quum in nullo termino sinus unitate maior per coefficientem multiplicetur, summa eorum $\geqq S$ esse nequit; est vero $S \leqq R\sqrt{\frac{1}{2}}$ quia $R \geqq S\sqrt{2}$; consequenter $R\sqrt{\frac{1}{2}}$ sive positivum, sive negativum fuerit, per summam sequentium nonnisi ex parte destrui poterit.

Sed etiam pro quovis valore ipsius z inter $(8i+1)\frac{q}{m}$ et $(8i + 3)\frac{q}{m}$ cadente, valorem ipsius T positivum, et pro quovis valore ipsius z inter $(8i + 5)\frac{q}{m}$ et $(8i + 7)\frac{q}{m}$ cadente, negativum esse patet; nam si z maius accipiatur ipso $(8i+1)\frac{q}{m}$ et minus, quam $(8i + 3)\frac{q}{m}$, erit sin. $mz =$ sinui arcus ipso q maioris et ipso $3q$ minoris, adeoque $\geqq\sqrt{\frac{1}{2}}$, eritque positivum; ita si

$$(8i + 5)\frac{q}{m} \leqq z \leqq (8i + 7)\frac{q}{m},$$

Hosted by Google

erit sin. mz = sinui arcus negativi ipso $\vdash q$ maioris et ipso $\vdash 3q$ minoris; adeoque sin. mz erit negativus et $\geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Pariter patet, valorem ipsius U esse negativum ubique pro valore ipsius z a $(8i+3)\frac{q}{m}$ usque ad $(8i+5)\frac{q}{m}$ (inclusive), et positivum ubique pro z a $(8i+7)$ usque ad $(8i+9)$ terminato (inclusive). Nempe pari ter est

$$U = R^{m-1}\left(R\cos.\mu q + a\cos.(m-1)\frac{\mu q}{m} + \ldots + \frac{k}{R^{m-2}}\cos.\frac{\mu q}{m} + \frac{l}{R^{m-1}}\right),$$

atque pro

$$z = (8i+3)\frac{q}{m},$$

id est pro

$$\mu = 8i+3,$$

fit

$$\cos. mz = \cos. 3q = \vdash \sqrt{\frac{1}{2}},$$

et pro

$$\mu = 8i+5$$

fit

$$\cos. mz = \cos. 5q = \vdash \sqrt{\frac{1}{2}},$$

estque cosinus ubique pro mz crescente a $3q$ usque ad $5q$, negativus et $\geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ita

$$\cos.(8i+7)q = \cos. 7q = \cos.(-q) = \mp\sqrt{\frac{1}{2}},$$

et

$$\cos.(8i+9)q = \cos. q = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Unde in peripheria circuli cuiusvis, cuius radius R est, inter quodvis punctum arcum $z = (8i+1)\frac{q}{m}$ terminans, id est inter punctum superius per $(8i+1)$ designatum, et punctum $(8i+3)$, dari aliquod punctum debet, ubi $U = 0$ est; ita inter quodvis punctum $(8i+5)$ et punctum $(8i+7)$. Nempe concipiatur z tanquam abscissa ab $\mathfrak{a}$ positive crescens in peripheria dicta; erunt ordinatæ U semper usquequo $z + \frac{q}{m}$, imo etiam ul-

Hosted by Google

terius aliquamdiu, positivæ, pro $z = \frac{3q}{m}$ erit iam U negativum; itaque pro certo z inter $\frac{q}{m}$ et $\frac{3q}{m}$ terminato valor ipsius $U = 0$ esse debet. Pariter pro

$$z = (8i + 5)\frac{q}{m}$$

est U negativum, et pro

$$z = (8i + 7)\frac{q}{m}$$

fit U positivum, adeoque et inter hæc puncta terminari tale z debet, e cuius fine erectum perpendiculum U fiat $= 0$.

Ita inter quævis puncta $(8i + 3)$ et $(8i + 5)$, atque inter puncta $(8i + 7)$ et $(8i + 9)$ alicubi $T = 0$ esse debet. Itaque

$U = 0$ fit inter (1) et (3), (5) et (7), (9) et (11) &c.,
$T = 0$ inter $(8m - 1)$ et (1), (3) et (5), (7) et (9) &c.

Danturque in peripheria quavis, cuius radius R est, $2m$ puncta, ubi $T = 0$, totidemque, ubi $U = 0$. Nempe peripheria $= \frac{8mq}{m}$, atque pro

$$i = m - 1, \text{ fit } 8i + 7 = 8m - 8 + 7 = 8m - 1,$$

qui numerus impar $4m$-tus est, quem excipit

$$8m + 1 = 8i + 9,$$

pro dicto $i = m - 1$; inter puncta $(8m - 1)$ et $(8m + 1)$ autem, id est inter finem arcus

$$z = (8m - 1)\frac{q}{m}$$

et finem arcus

$$z = (8m + 1)\frac{q}{m}$$

pariter datur punctum, ubi $T = 0$, nempe ubi $z = \frac{8mq}{m}$, et sinus $= 0$ est. Itaque in tota peripheria $4m$ puncta erunt numeris imparibus parenthesi clausis signata, atque simul cum intervallo, quod a $4m$-to impari usque ad $(4m + 1)$-tum cum puncto (1) coincidens est, fiunt intervalla numero $4m$;

Hosted by Google

cuius dimidium est numerus punctorum ubi $T=0$, et alterum dimidium est numerus punctorum ubi $U=0$.

Sed neque plura quam $2m$ puncta sunt in peripheria eadem, ubi $T=0$ fit, nec plura, ubi $U=0$ est.

Denotentur enim puncta, ubi T aut U fiunt $=0$, per numeros absque parenthesi; nempe punctum, ubi $T=0$ fit, inter $(8m-1)$ et (1), dicatur punctum 0; ubi $U=0$ fit inter (1) et (3), dicatur punctum 1; ubi $T=0$ fit inter (3) et (5), dicatur punctum 2; porro ubi $U=0$ fit inter (5) et (7), dicatur punctum 3, et ita porro. Patet punctum quodvis numero pari signatum esse lineæ primæ, impari signatum lineæ secundæ; dicatur illud brevitatis gratia *punctum par*, hoc vero *punctum impar*, et dicantur *puncta similia* quæ in diversis circulis eodem numero parenthesi clauso gaudent, ita quæ numero parenthesi destituto denotantur.

Si iam in eadem peripheria plura quam $2m$ puncta darentur, ubi $T=0$, tum alicubi, ubi punctum par est, in arcu inter præcedentem et sequentem numerum imparem parenthesi clausum comprehenso ad minimum duo puncta esse deberent, ubi $T=0$; quod fieri nequit. Concipiantur enim ordinatæ T ab extremitate crescentis arcus z ex. gr. a puncto (3) usque ad (5), fiatque prima vice $T=0$, pro z in puncto $\mathfrak{d}$ terminato; erit, si ante (5) detur adhuc punctum ubi $T=0$ est, aut post $\mathfrak{d}$ aliquamdiu $T=0$, aut in aliquo puncto $\mathfrak{e}$ erit post $\mathfrak{d}$ prima vice $T=0$; neutrum vero esse potest; nam statim patebit post $\mathfrak{d}$ non esse continuo aliquamdiu $T=0$; crescet igitur aliquamdiu T a 0, et demum decrescet, dum ad $\mathfrak{e}$ item $T=0$ fiet; cogitetur nempe punctum in arcu $\mathfrak{de}$ porro motum, secum ferre perpendiculum, in quo punctum ex $\mathfrak{d}$ incipiendo semper in extremitatem ordinatæ T veniat, usquequo in $\mathfrak{e}$ desinat; punctum hoc in perpendiculo moto prius ex $\mathfrak{d}$ porro, tum eundo ad $\mathfrak{e}$ retrorsum movebitur; in puncto perpendiculi eodem manere nusquam potest, ut statim patebit. Itaque si ubi prima vice incipiet retrorsum moveri, abinde usque ad $\mathfrak{e}$ semper retrorsum eat, ibi T maximum habet, ubi punctum retrorsum moveri cœpit; si vero revertatur, priusquam in $\mathfrak{e}$ pervenit, ubi prima vice revertitur, ibi T minimo gaudet. Ut vero hoc fieri possit, aut ut T aliquamdiu idem maneat, deberet

Hosted by Google

esse $\partial T = 0$ (pag. 345.); quod pro z inter puncta dicta terminato fieri nequit. Nam pro quovis ν est $\partial \sin. \nu z = \nu \dot{z} \cos. \nu z$, et $\partial \sin. \nu z$ (quoad νz) est $\cos. \nu z$, at $\partial \sin. \nu z$ (quoad z) est $\nu \cos. \nu z$; itaque ∂T (quoad z) pro quovis R constante, erit, si in expressione ipsius T superiore pro termino primo intra parenthesim ponatur $mR \cos. mz$, pro secundo autem

$$(m-1) \cos. (m-1) z = \frac{m(m-1)}{m} \cos. (m-1) z \text{ \&},$$

itaque m tanquam factor communis extra parenthesim poni poterit, eruntque $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$ & fractiones veræ; adeoque ubique inter $(8i+3)$ et $(8i+5)$ valor negativus erit, nam ibi $\cos. mz$ est negativus et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$; ita inter puncta $(8i+7)$ et $(8i+9)$ valor positivus est, ut supra, quum $\cos. mz$ ibi positivus et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ sit. Itaque ∂T in his intervallis nequit $= 0$ esse, adeoque in quovis intervallorum eorundem unum etquidem solum punctum datur, ubi $T = 0$.

Idem de U eodem modo patet; nempe ∂U pro z inter $(8i+1)$ et $(8i+3)$ terminato ubique negativum et inter $(8i+5)$ et $(8i+7)$ ubique positivum est; quum $\partial \cos. mz$ (quoad z) sit $= -m \sin. mz$, quod in priore intervallo negativum, in posteriore vero positivum, et in utroque est $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. Patet in peripheriis omnium R puncta (1) in recta centrum petente esse, uti puncta quævis eodem numero impari parenthesi clauso signata. Ita rectam $\mathfrak{ab}$ utrinque infinitam ramum unum lineæ primæ pro quovis m esse manifestum est; nam pro $z = 0$ aut $z = \frac{4mq}{m}$ fit

$$\sin. z = 0 = \sin. 2z = \sin. (m-1) z = \sin. mz = \text{\&};$$

adeoque pro quovis valore ipsius r (a 0 in ∞) ad puncta (0) et $(4m)$ fit $T = 0$; estque punctum 0 cum (0) coincidens inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$, punctum $(4m)$ vero cum puncto $2m$ coincidit, caditque inter impares $(8i+3)$ et $(8i+5)$ pro m impari $= 2n-1$ et $i = n-1$, pro m pari $= 2\nu$ autem et $i = \nu - 1$ cadit inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$; nempe $4m-1$ est impar $2m$-tus, et pro $m = 2n-1$, ex

$$4m - 1 = 8i + 3, \quad 8n - 4 - 4 = 8i$$

fit, adeoque $i = n - 1$; ita pro $m = 2\nu$, ex

$$4m - 1 = 8i + 7, \quad 8\nu - 8 = 8i$$

fit, adeoque $i = \nu - 1$. Estque post secundum numerum imparem nempe inter (3) et (5) punctum lineæ primæ numero 2 (absque paranthesi) signatum: ita post $2m$-tum imparem sequitur punctum $2m$ lineæ primæ.

6. Sed etiam quivis circulus A sit radio R maiore tam ipso $S\sqrt{2}$ quam ipso 1, centro $\mathfrak{c}$ descriptus, si complexus omnis puncti numero parenthesi clauso eodem signati, numero eodem romano denotetur, repræsentent (3) et (5) quosvis numeros impares proximos, inter quos $T = 0$ fit; inter rectas III et V ramus unus lineæ primæ ex infinito veniens, circulum A ingredietur, atque ex eo via continua alibi, adeoque in puncto pari, quum T non alibi $= 0$ esse queat, egrediens abit item in infinitum. Nam in quovis arcu centri $\mathfrak{c}$ inter III et V comprehenso datur punctum lineæ primæ; dicatur γ complexus omnis eiusmodi puncti; manifesto etiam intra peripheriam A manebit aliquamdiu $R \ngtr S\sqrt{2}$ et simul $\ngtr 1$, adeoque inter III et V etiam γ intra peripheriam A protendetur.

Sed consideretur in cuiusvis A peripheria T puncti (3), quod dicatur $\mathfrak{i}$, et T puncti (5), quod dicatur $\mathfrak{k}$; erit illud T positivum, hoc vero negativum. Itaque $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{k}$ in plagas diversas superficiei primæ cadunt; consequenter ex $\mathfrak{i}$ nulla via puncti usque ad $\mathfrak{k}$ datur, nisi quæ per superficiem primam transeat. Atque hinc non γ solum interruptum esse nequit; sed etiam $\mathfrak{k}$, plano P et superficiei primæ communi continuo, circulum A post (3) ingrediente, atque post (5) alicubi exeunte, seclusum ab $\mathfrak{i}$ esse necesse est; namque secus punctum in plano P ex $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{k}$, ex una plaga superficiei primæ quaquaversum infinitæ in alteram venire posset, absque eo, ut per eam transeat. Exire autem continuum dictum ex A nonnisi per punctum par peripheriæ A potest, quia T nonnisi ibi 0 fit; atque si punctum illud par 2ν dicatur, de γ dictum et ad complexum omnis puncti

Hosted by Google

2ν applicari poterit; at sufficit ad scopum, quodvis punctum par cum aliquo puncto pari peripheriæ eiusdem iunctum esse; atque etiam demonstratione eadem ad U applicata, quodvis punctum impar cum numero aliquo impari peripheriæ eiusdem iunctum esse.

Nimirum tum lineæ primæ cum secunda intersectionem aliquam dari pluribus modis evincitur. Ex. gr. suppositio nullam intersectionem dari necessario dari aliquam ponit; quod simul constare nequit. Consequenter nullam dari falsum est, id est dari aliquam constat. Si nimirum supponatur nullam dari, punctum 1 cum nullo puncto ultra axem $\mathfrak{ab}$ sito iunctum est; nam 1 est punctum lineæ secundæ, recta $\mathfrak{ab}$ autem est pars lineæ primæ, itaque si 1 in peripheria radii $\mathfrak{ac}$, pro $\mathfrak{ac} \succ S\sqrt{2}$ posito, cum puncto n' iunctum sit, nempe cum aliquo puncto impari iunctum esse debet; erit numerus $n' < 2m$, nempe ad $\mathfrak{b}$ est numerus par $2m$, et n' impar ante $2m$ inter 2 et $2m$ cadere debet; inter 0 et 1 ac 1 et 2 enim numerus nec par, nec impar datur, 2 vero est par, atque si n' ultra $2m$ esset, $\mathfrak{ab}$ per $1_*n'$, id est ramum qui ab 1 usque ad n' est, secaretur. Dicatur porro n'' punctum par, cum quo punctum 2 iunctum est; erit pariter $n'' < n'$, nempe punctum par n'' cadet post 3 et ante n'; quia si retrorsum in 0 caderet, 0_*2 et $1_*n'$ se mutuo secarent, ita si post n' caderet, $1_*n'$ et $2_*n''$ se invicem secarent. Sit porro n''' punctum impar cum quo 3 iunctum est; cadet n''' ultra 4 et ante n''; nam cum impari quod antea fuit (modo cum 1) iungi 3 nequit, quia tum $2_*n''$ et 3_*1 secarent se invicem, ita si n''' ultra n'' caderet, $2_*n''$ et $3_*n'''$ secarent se invicem. Sit porro n^{IV} punctum par cum 4 iunctum; cadet n^{IV} ultra 5 et ante n''' ob eandem rationem. Sit item n^{V} punctum impar cum 5 iunctum; cadet n^{V} ultra 6 et ante n^{IV}; quia si retrorsum iungeretur cum aliquo impari, sive 1 sive 3, 5_*1 vel 5_*3 et 4_*n^{IV} secarent se invicem &c. Continuandoque hoc, usquequo tres numeri h, $h+1$, $h+2$ supersint ante proximum n, versus $\mathfrak{a}$, quod cum accentorum numero certo prodiit, punctum illud p, cum quo h iunctum erit, ultra dictum n cadere non poterit; nam tum h_*p et ramus, qui ab n usque ad punctum anterius est, cum quo iungitur, secarent se invicem; itaque h necessario cum $h+2$ iungetur; atque h_*h+2 et ramus qui a $h+1$

Hosted by Google

usque ad punctum, cum quo iungitur, est, sive antrorsum, sive retrorsum esset hoc, se invicem secare debent. Q. E. D.

In (Fig. 58), quam auctor pro

$$X = x^4 - 2x^3 + 3x + 10$$

construxit, ramis lineæ secundæ per puncta denotatis, res oculis subiecta est.

§. 44.

Pauca adhuc arboris ramos (pag. 205) illustrantia, addenda sunt.

1. Dictum (pag. 209.) erat e quavis functione $F(x)$ seriem deduci, cuius terminus generalis est $F(m\dot{x}) - F\big((m-1)\dot{x}\big)$, terminorum summa vero est $= F(x) - F(0)$. Facile cogitatur, ipsi $\dot{x}$ constantem aliquam ex. gr. 1 aut generalius $\frac{1}{\mu}$ substituere, ut sit $x = n\dot{x} = \frac{n}{\mu}$, et terminus generalis sit

$$F\left(m\,\frac{1}{\mu}\right) - F\left((m-1)\,.\,\frac{1}{\mu}\right)$$

atque summa sit

$$F\left(\frac{n}{\mu}\right) - F(0)\,;$$

nempe in $F(x)$, ponatur prius $n\dot{x}$ pro x, et tum $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$. Ita deinde licebit n sive ut numerum constantem, sive ut in infinitum crescentem considerare.

Ex. gr. Sit

$$F(x) = \frac{x}{1+x}\,;$$

erit

$$F(m\dot{x}) - F\big((m-1)\dot{x}\big)$$

terminus generalis seriei ex $F(x)$ deductæ, qui pro $\dot{x} = 1$ fit

$$\frac{m}{1+m} - \frac{m-1}{1+m-1} = \frac{1}{m(m+1)}\,;$$

summa vero est

$$F(x) - F(0) = F(n) - F(0)$$

Hosted by Google

pro $\dot{x} = 1$ adeoque $n\dot{x} = n$. Substituendo igitur in $\frac{1}{m(m+1)}$ ipsi m numeros ab 1 usque ad n inclusive, fiet series

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \ldots,$$

et summa est

$$\frac{n}{1+n} - \frac{0}{1+n} = \frac{n}{n+1}$$

quod tendit ad 1, si $n \backsim \infty$.

Si

$$F(x) = \frac{ae^x}{e-1};$$

erit seriei deductæ terminus generalis

$$F(m\dot{x}) - F((m-1)\dot{x}) = \frac{ae^{m\dot{x}} - ae^{(m-1)\dot{x}}}{e-1} = \frac{ae^{(m-1)\dot{x}}(e^{\dot{x}}-1)}{e-1},$$

et summa est

$$F(x) - F(0) = \frac{ae^{n\dot{x}} - ae^0}{e-1}.$$

Si $\dot{x}$ ponatur $=1$; est

$$\frac{ae^{m-1}(e^1-1)}{e-1} = ae^{m-1},$$

et summa $= \frac{ae^n - a}{e-1}$, uti (pag. 151) pro serie geometrica erat.

Si vero $\dot{x}$ ponatur $= \frac{1}{\mu}$; erit terminus generalis

$$\frac{ae^{\frac{m-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

et summa erit

$$\frac{ae^{\frac{n}{\mu}} - a}{e-1}.$$

Prodit autem sic series geometrica, cuius (substituendo numeros 1, 2, ... ipsi m) terminus primus est

$$\frac{ae^{\frac{1-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

Hosted by Google

et secundus

$$\frac{ae^{\frac{2-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

et quivis per $e^{\frac{1}{\mu}}$ multiplicatus dat sequentem. Unde etiam pro $n=\mu$, summa priorum μ terminorum erit

$$\frac{ae-a}{e-1}=\frac{a(e-1)}{e-1}=a;$$

et pro $n=2\mu$ erit summa

$$\frac{ae^2-a}{e-1}=\frac{a(e^2-1)}{e-1}=\frac{a(e+1)(e-1)}{e-1}=a+ae;$$

atque in genere si $n=k\mu$, denotante k integrum quemvis positivum, erit summa

$$\frac{ae^k-a}{e-1}=\frac{a(e^k-1)}{e-1}=\frac{a(e-1)(1+e+e^2+\ldots+e^{k-1})}{e-1}=$$
$$=a+ae+ae^2+\ldots+ae^{k-1},$$

quæ est summa k terminorum seriei geometricæ prioris. Quod vero sit

$$e^k-1=(e-1)(1+e+e^2+\ldots+e^{k-1})$$

patet dividendo e^k-1 per $e-1$ (pag. 151). Solet autem m-tus seriei huius terminus, $\frac{m}{\mu}$-tus prioris appellari.

Ita si

$$F(x)=ax+\frac{x^2d-xd}{2};$$

erit terminus generalis $F(m\dot{x})-F((m-1)\dot{x})$

$$am\dot{x}+\frac{(m\dot{x})^2d-m\dot{x}d}{2}-\left(a(m-1)\dot{x}+\frac{(m-1)^2\dot{x}^2d-(m-1)\dot{x}d}{2}\right);$$

quod ponendo $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$, fit

$$=\frac{a}{\mu}-\frac{d}{2\mu}-\frac{d}{2\mu^2}+\frac{md}{\mu^2},$$

Hosted by Google

patetque seriem esse arithmeticam primi ordinis; prodeunte e termino quovis sequentem, addendo $\frac{d}{\mu^2}$. Summa vero erit

$$F(x) - F(0) = \frac{an}{\mu} + \frac{n^2 d}{2\mu^2} - \frac{nd}{2\mu},$$

quum $F(0)=0$ sit; adeoque pro $\mu=1$ fit terminus generalis $a+(m-1)d$, et summa est

$$na + \frac{(n^2-n)d}{2} = \frac{(a+u)n}{2},$$

uti (pag. 152) pro serie arithmetica. Si vero $\mu k = n$ (pro quovis integro positivo k) fiet summa

$$= ak + \frac{k^2 d - kd}{2},$$

quæ est summa priorum k terminorum seriei arithmeticæ prioris; soletque et terminus m-tus seriei huius $\frac{m}{\mu}$-tus prioris dici.

Ita ex innumeris functionibus totidem series deduci possunt, quarum tam termini generales, quam summæ datæ erunt; at quæstio suboritur, num e termino generali seriei alicuius ad functionem e qua deducitur perveniri queat? Quo pacto etiam summa data esset. Expressio summæ talis, in qua, ipsi m quivis numerus substituatur, totidem terminorum summa exhibetur, vocatur *terminus summatorius*; qui si $=f(m)$ sit, pro termino generali prodibit omnino $f(m)-f(m-1)$.

2. Ad 3. (pag. 205) pertinet: quod si

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

pro quovis valore ipsius x sit 0; erit

$$A = 0 = B = C = \mathfrak{S},$$

nempe quilibet coefficientium erit 0. Nam tum etiam per x^a utrinque dividendo, et

$$A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + \ldots$$

Hosted by Google

y dicto, erit $y=0$, pro quovis valore ipsius x, etiam pro $x=0$; namque verum de x utvis parvo est, si non sit 0; si vero $x \backsim 0$, tum $Bx^{c-a}=0$ aut $\backsim 0$, ita $Cx^{c-a}=0$ aut $\backsim 0$ &; adeoque quotvis termini numero certo accipiantur, pro dato quovis ω fieri

$$A+Bx^{b-a}+Cx^{c-a}+\ldots-(A+B0^{b-a}+C0^{c-a}+\ldots)<\omega$$

potest nisi $=0$ sit; sed

$$A+Bx^{b-a}+\ldots=y=0$$

pro x non $=0$. Consequenter quum $y=0$, et $y-A=0$ vel $\backsim 0$, est $A=0$ (pag. 81, 4.). Idem etiam porro continuatur; ut nempe utrinque dividendo per x^{b-a}, prodeat

$$B+Cx^{c-a-(b-a)}+\ldots=B+Cx^{c-b}+\ldots=0,$$

atque inde $B=0$ et ita porro.

Ex. gr. sit

$$\frac{1+x^2}{1-x-x^3}=1+ax+bx^2+cx^3+\ldots$$

Multiplicando utrinque per denominatorem, et subtrahendo numeratorem functio ad 0 reducetur, et collectis ubique coefficientibus eiusdem potentiæ ipsius x, erit

$$0=(a-1)x+(b-a-1)x^2+(c-b-1)x^3+(d-c-a)x^4+\ldots$$

atque hinc

$$a-1=0,\ b-a-1=0,\ (c-b-1)=0,\ d-c-a=0\ \&,$$

adeoque

$$a=1,\ b=a+1=2,\ c=3,\ d=4,\ e=6,\ f=9,\ g=13\ \&,$$

quibus valoribus substitutis, prodibit series functioni fractæ æquivalens, si nimirum convergat, aut terminata sit.

Facile autem perspicitur, in isto casu quemvis terminum a quarto incipiendo, esse summam primi et tertii ad sinistram, ex. gr. $9=6+3$; dicitur series eiusmodi *recurrens*, cuius terminus quilibet certorum nu-

Hosted by Google

mero μ ad lævam præcedentium, utpote μ'-ti μ''-ti . . ., per certos factores multiplicatorum summa est, ita ut pro quovis termino, ν-tus ad lævam per eundem factorem multiplicetur. Dicitur quoque series recurrens eiusmodi ordinis μ-ti, et factorum dictorum series *scala seriei recurrentis* audit.

Ex. gr. pro termino primo $=0$, et secundo $=1$, atque scala 1, 3, fit series

$$0,\ 1,\ 1.1+0.3=1,\ 1.1+3.1=4,\ 4.1+3.1=7,\ 7.1+3.4=19,\ \&c.,$$

nempe

$$0,\ 1,\ 1,\ 4,\ 7,\ 19,\ \ldots,$$

Sed methodus antea dicta applicatur etiam si, quod sæpius requiritur, uti (pag. 259), functio fracta $\frac{f(x)}{F(x)}$ ut summa simpliciorum exhibenda sit; siquidem denominator in requisitos factores simplices resolvi possit, quod efficitur sæpius, quærendo radices æquationis $F(x)=0$; quæ si fuerint a, b, c, erit

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c);$$

sed utcunque deventum ad hos factores fuerit, ponendo

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

determinantur A, B, C modo sequenti.

Ex. gr.

$$\frac{1}{a^2x-x^3}=\frac{1}{x(a+x)(a-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x};$$

et reducendo ad denominatorem eundem, atque per eum utrinque multiplicando, et numeratorem qui ad lævam est, subtrahendo, fiet

$$0=(a^2A-1)+(aB+aC)x+(C-B-A)x^2;$$

unde

$$a^2A-1=0,\ aB+aC=0,\ C-B-A=0$$

adeoque

$$A=\frac{1}{a^2},\ B=-C,$$

Hosted by Google

atque

$$C = B + A = \frac{1}{a^2} - C;$$

unde

$$2C = \frac{1}{a^2}, \text{ et } C = \frac{1}{2a^2},$$

atque

$$B = -\frac{1}{2a^2}.$$

Hosted by Google

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO IV.

ADDITAMENTA IN PRAECEDENTIBUS TRADITA CONCERNENTIA.

A.

DE BEATITUDINE.

In *Introductione*, ubi desideria æterna, nempe *veritatis*, et *amoris* fraterni reciproci in eodem *Patre* uniti exponuntur; id est quæ nulli tempori finito, nec ulli existentiæ formæ propria sunt, et notam Auctoris communis eandem referentes, nonnisi claritate potentiave differunt: vocabulum brachiis per errorem omissum est. Præterea nec *beatitudo* definita est; sit igitur fas aliquot verba ex olim editis addere.

Quis est, qui reflectens, se infinitæ caussæ superiori subiectum esse non sentiat, eoque per se infirmus non refugiat? Certe si *nil admirari* rectum sit, in quantum effectus quilibet e sua caussa promanat: *omne admirari* rectius est; quocunque enim sensus internos externosve porrigamus, sive cogitare nos, bonumque omnium velle simus conscii, sive ad voluntatis nutum moveatur corpus (unum aut millia simul), sive flos nocte apertus gemmam auroræ ferat; admirando omnia, ad summe et denique solam admirandam, supremam omnium caussam inconceptibilem provocant, nobis infinite superiorem, attamen intus extusque ubique proximam.

Indicium beatitudinis esset: gratitudo ex omnium et singulorum gaudio suæ existentiæ resultans, caussam hanc communem dulci desiderio quærens; quanquam et illi, cui inter ruinas templi quondam pul-

Hosted by Google

chrius nitente sole exstructi, nullum terrestre gaudium germinat, aut cuius idealibus æthereis disparentibus, quasi de cœlo deiecti, et ex arida paradiso respicientis labentes lachrimæ nullas amicas inveniunt: in mœstissimas tenebras descendant candidi angelorum chori, desertumque æterna resonet lætitia — nec Deus infinitus ullibi magis appareat, quam ad pectoris vulneribus immeritis gementis solitudinem derelictam explendam — imo infinitus quidem ubique præsens, proximus ad lectum morientis sentiatur. Certe veluti terra, si oculis pro videndo sole destituta, sensu polleret, calorem attractionemque eius persentisceret; simili modo sensus animæ intimus de Deo testificatur, et omnes mundi ex immenso abysso micantes annuunt; ac suprema manu sacrosanctissima pectoribus imis inscripta, dummodo lux alma faveat, nec falsa spuriaque, generi humano inimica, mortales oculos obcœcet, ultro leguntur; lectaque e procellis temporaneis ad æternitatis tranquillitatem elevant.

Absoluta beatitudo vero (quæ omnium et singulorum est), consisteret *obiective* in eo, ut sub quovis tempore, et in quavis existentiæ forma, omnes et singuli simul, ut infantes æternitatis eiusque certi hæredes, incrementum quam maximum capiamus; id est quo clariora fortioraque reddamus, expleamusque in quantum fieri potest, æterna desideria, temporaneis quoque satisfaciendo, in quantum priora requirunt (saltem permittunt). *Subiectiva* autem est, dulcis omnium necessitas *obiectivam* dictam semper volendi, sensusque cœlestis, dum in almo veritatis die, gelidæ individualitatis glacie undique soluta, omnibusque amore reciproco in brachiis infinitis Patris communis unitis, reflexione luminis calorisque divini ex omni in omne, ∞^{∞}, pulchritudo originalis absoluta æternaque patefiet; adeo ut *pulchritudinis* huius absolutæ *desiderium* quoque æternis adnumerari possit, (ut numero sacro trina sint), quamquam sæpe tempore æternitatem mentiente, splendida imago evanescens, telam fœdam post se relinquat.

Hosted by Google

B.

DE PROPORTIONIBUS, LOGARITHMIS, NUMERATIONEQUE ARABICA.

Sequentia in gratiam Tyronum addere libet.

Quum proportio geometrica (pag. 87) per

$$a : ae = b : be$$

exprimi possit: patet *factum extremorum esse facto mediorum aequale*, nempe $abe = aeb$.

Conversim quoque, si A, B, C, D talia fuerint, ut $AD = BC$, est

$$A : B = C : D.$$

Nam dividendo per BD, erit

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD};$$

adeoque

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

seu

$$A : B = C : D.$$

Unde hæc nota proportionis geometricæ fit: ex. gr. 2, 3, 4, 5 non sunt in proportione; nam $2 . 5$ non $= 3 . 4$, et si proportio esset, $2 . 5 = 3 . 4$ esse deberet.

Hinc etiam *e quibusvis duobus factis aequalibus proportio institui potest.* Ex. gr. ex $cx = a$ id est $cx = 1 . a$ fit

$$c : 1 = a : x;$$

nam $cx = a . 1$.

Imo etiam *quaevis tria in proportione data fuerint, quartus reperitur*, dividendo factum dati *paris* per illum cuius socius quæritur; per *par* intelligendo par extremorum, aut par mediorum; nempe e duobus paribus unum datum est, et quantitas tertia est, quæ suo pari caret.

Hosted by Google

Ex. gr. Si $A:B=C:D$, et A, B, D data fuerint, erit $AD=BC$; adeoque

$$\frac{AD}{B}=\frac{BC}{B}=C.$$

Ita reliqui casus patent.

Quum vero si $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, sive $AD=BC$ fuerit, (per quorum quodvis unum, ponitur alterum), tum A, B, C, D in proportione sint: per hoc ex una plures, atque e pluribus novæ promanant.

I. *Ex una*, $a:ae=b:be$; erit *permutando* terminos prius internos,

$$a:b=ae:be,$$

permutando vero externos est

$$be:ae=b:a.$$

Ita *aliquod extremorum et simul aliquod internorum per idem multiplicando*, aut per idem dividendo, proportio erit. Nempe si

$$a:ae=b:be,$$

est

$$ap:ae=bp:be,$$

et

$$a:aeq=b:beq$$

imo

$$ap:aeq=bp:beq.$$

Ita

$$\frac{a}{p}:\frac{ae}{q}=\frac{b}{p}:\frac{be}{q}.$$

Ita *componendo* ex $a:ae=b:be$, sequitur

$$\pm a\pm ae:\pm ae=\pm b\pm be:\pm be,$$

et

$$\pm a\pm ae:\pm a\ =\pm b\pm be:\pm b;$$

notando, quod in his duabus lineis ae et be eodem signo, ita etiam a et b eodem signo, sive diverso a priore sive non, accipiantur.

Hosted by Google

II. 1. *E pluribus* quotquot fuerint, sequitur esse etiam *factum terminorum primorum ad factum* secundorum, *uti factum* tertiorum *ad factum* quartorum. Nempe si

$$a : aq = b : bq$$

et

$$c : cr = d : dr,$$

est

$$ac : aqcr = bd : bqdr.$$

Unde semper ad una plures concludere licet; quæcumque proportio enim e pluribus hoc pacto prodierit, per

$$P : Pm = p : pm$$

exprimi potest, cui accedente alia

$$z : zn = x : xn :$$

erit

$$Pz : Pmzn = px : pmxn.$$

Si vero

$$A : B = C : D = E : F = \ldots;$$

erit

$$A + C + E + \cdots : B + D + F + \cdots = A : B.$$

Nam B per Aq, D per Cq, et F per Eq exprimi potest; adeoque

$$B + D + F = (A + C + E)\,q,$$

et

$$\frac{A + C + E + \cdots}{B + D + F + \cdots} = \frac{1}{q} = \frac{A}{B}.$$

Solet hoc ita enunciari: *summa antecedentium est ad summam consequentium, ut quilibet antecedens ad suum consequentem*; nempe ex. gr. si A, B, C, D in proportione fuerint, dicebatur A *antecedens*, B vero *consequens rationis* A ad B, ita C antecedens, D consequens rationis C ad D.

In omnibus casibus relatis autem, patet proportionem esse; sive *per quotos ex antecedentibus per suos consequentes ubique aequales*, sive *per facta extremorum factis mediorum aequalia*.

Hosted by Google

2. *Si vero duæ proportiones fuerint, et tam a quam b utriusque terminum aliquem constituat*; atque reliquorum duorum terminorum in una ad lævam alterius termini cadens dicatur c, et alter ab hoc ad dextram cadens d dicatur, in altera autem ad lævam cadens f, et alter g dicatur: quæritur, c, d, f, g quando et quo ordine sint in proportione? et quando non?

Aut efficiunt a et b in utraque proportione *par* aliquod (nempe extremorum vel mediorum), aut non; si non, aut in neutra efficient, aut in una tantum.

Si in utraque efficient, erit $c:f=g:d$, quod *perturbatim* dicitur. Si in neutra efficient; tum a aut in utraque ad lævam a b, aut in utraque ad dextram, aut in una ad lævam, in altera ad dextram cadit: in duobus casibus prioribus est $c:d=f:g$, quod *ordinatim* vocatur; in casu posteriore vero est $c:d=g:f$.

At si in una tantum efficiant par, tum nonnisi pro certo valore ipsius a vel b proportio est.

Etenim si a, b in utraque par efficiant: tum et c, d et f, g par efficient; fietque $ab=cd=fg$; adeoque $c:f=g:d$.

Si vero a, b in neutra effecerint par; stet prius a in utraque ante b; tum si a aliquod extremorum fuerit, quum ante b sit, nonnisi primo loco stare potest, et tum b ad finem esse nequit, (quia a et b par extremorum efficerent); adeoque b aliquod mediorum, ac d terminus quartus, et $ad=bc$ erit. Si vero a aliquod mediorum sit, b necessario ad finem erit; quia a ante b stat, et si b loco tertio esset, a et b par efficerent; itaque loco primo c est, et alterum mediorum d est; adeoque $bc=ad$ ut prius. Pariter in proportione altera fit $ag=bf$; atque hinc

$$a=\frac{bc}{d}=\frac{bf}{g},$$

et dividendo per b fit $c:d=f:g$.

Si b stet ante a in utraque, in demonstratione proxima ubique b pro a et a pro b ponendo, fiet $ac=bd$ et $bg=af$; et hinc

Hosted by Google

$$a = \frac{bd}{c} = \frac{bg}{f};$$

atque hinc $df = cg$; consequenter et tum $c : d = f : g$.

At si in una (ex. gr. in qua c est) a ante b, et in altera post b stet; e præcedentibus patet fore, $ad = bc$ in priore, et $af = bg$ in altera; atque hinc

$$a = \frac{bc}{d} = \frac{bg}{f},$$

adeoque

$$\frac{c}{d} = \frac{g}{f},$$

id est $c : d = g : f$, non ordinatim $c : d = f : g$.

Si vero a et b in una (ex. gr. in qua c est), efficiant par, et in altera non, tum fiet $ab = cd$, et in altera factor socius ipsius a nonnisi f aut g esse poterit; erit igitur aut $af = bg$, aut $ag = fb$. Combinetur iam $ab = cd$ cum casu utroque; ex

$$ab = cd \quad \text{et} \quad af = bg,$$

fit

$$a = \frac{cd}{b} = \frac{bg}{f},$$

atque hinc

$$cd = \frac{bbg}{f},$$

e quo bb nonnisi ita deleri potest, ut tantum literæ c, d, f, g maneant, si $b = 1$, aut $c = b$, aut $f = b$, aut $d = b$. Pariter ex

$$ab = cd \quad \text{et} \quad ag = fb,$$

fit

$$a = \frac{cd}{b} = \frac{fb}{g},$$

adeoque

$$cd = \frac{fbb}{g};$$

ubi pariter bb tolli nequit, nisi $b = 1$, vel c aut d vel g fuerit $= b$.

Hosted by Google

3. Ita si fuerint proportiones, quæ ipsæ, et termini earum (per pag. 482) ita ordinari queant, ut cuiusvis terminus secundus sit sequentis primus, excepta proportione ultima: tum primæ terminus primus est ad ultimæ secundum uti factum e terminis tertiis ad factum e terminis quartis. Nam ex. gr. si

$$A : B = h : i$$
$$B : C = k : l$$
$$C : D = m : n;$$

(per pag. 483) est

$$ABC : BCD = hkm : iln;$$

seu (per pag. 482)

$$A : D = hkm : iln,$$

quæ *regula catenaria* vocatur, et applicatur ad varias monetas mensurasque; si ex. gr. A, B, C, D variæ mensuræ fuerint, et quæratur ratio ipsius A ad D, datis $A : B$, $B : C$, $C : D$.

III. Præter hæc aliquid adhuc de *compositione* (et antehac usitato *numero*) *rationum*, cuius vicem hodie *exponens potentiae* subit, addendum est.

1. Plurimæ quantitates ab aliis certo modo dependent: dependentiæ varii modi innumerabiles cogitari possunt: at hic nonnisi eiusmodi dependentia quantitatis z ab alia u considerata, ut dum ex u fit ku, ex z fiat aut kz aut $\frac{z}{k}$; dicitur z ab u in casu primo *directe*, in casu posteriore *inverse dependere*.

Sit x quantitas rei alicuius, pro rerum certarum quantitatibus $a, b, c, \ldots$, et dependeat x ab omnibus iis directe; fiatque $na = A$ ex a (manentibus ceteris), fiet nx ex x; et postea mutetur b in $mb = B$ (item manentibus ceteris) fiet mnx ex nx; tum mutetur c in $pc = C$, fiet $pmnx$ ex mnx; est vero

$$n = \frac{A}{a}, \quad m = \frac{B}{b}, \quad p = \frac{C}{c},$$

adeoque

$$pmnx = \frac{ABCx}{abc};$$

Hosted by Google

atque idem pro quarto prodit, si ad abc, ABC et x, quarta proportionalis quæratur. Quotvis fuerint autem a, b, . . . , idem continuari patet.

Si vero x ab aliquo ipsorum a, b, . . . , ex. gr. a b inverse dependeret; tum ex x fieret

$$\frac{pnx}{m} = \frac{AbCx}{aBc}.$$

Solet autem hoc ita enunciari; quod quantitates generis x, sint *in ratione composita*, e rationibus ipsorum a, b, . . . , *directis* in casu primo, in posteriore vero e rationibus ipsorum a, c *directis*, et *inversa* ratione ipsorum b, (per literas quantitatum literis nominis eiusdem denotatarum genera intelligendo). Unde et aliæ eiusmodi denominationes intelliguntur. Ex. gr. in motu uniformi sunt spatia in ratione composita e rationibus directis temporum et celeritatum, celeritates autem sunt in ratione composita, e directa spatiorum et inversa temporum. Ita quo maior pecunia ad lucrum elocata, et quo maius tempus elocationis, eo maius lucrum est; ut si elocatæ pecuniæ fuerint P et p, et tempora T et t; fiet lucrum prioris ad lucrum posterioris (pro iisdem conditionibus), uti PT ad pt.

Quum eiusmodi problema ut antea proponitur; quærendo quidnam ex x fiat, mutatis a in A, b in B, et c in C; nonnisi *data*, modo sequenti describenda sunt: nomen generale rerum a, A, ad lævam ponatur, et post hoc eadem linea horizontali scribantur a, A; sub hanc lineam in sequenti nomen generale ipsorum b, B scribatur pariter ad lævam; et post hoc scribantur b, B sub a, A; et ita porro in deorsum sequenti linea horizontali, sequentis literæ nomini generali postponantur literæ ipsæ, prius minuscula, tum altera; donec nonnisi x supersit; et tum ponatur x ad dextram loco tertio; atque quæratur, quomodo x a literis singulis dependeat, prius ab a, tum a b &c, et si ab aliqua inverse dependeat, literæ nominis eiusdem loca permutent, reliquis manentibus. Atque demum quivis terminorum columnæ primæ, simul cum aliquo terminorum columnæ secundæ, aut cum termino tertio nempe cum x, per idem dividi potest, si per id numeri minores remaneant; atque hoc continuetur, donec numeri amplius minui nequeant: et tum proportio-

Hosted by Google

nalis quarta quæsita prodibit, si id quod loco tertio remansit, multiplicatum per factum in columna secunda remanentium, per factum e columna prima remanentium dividatur. Ratio facile patet, cum proportionalis quarta sit ex. gr. in casu primo

$$=\frac{ABCx}{abc},$$

in altero sit

$$=\frac{AbCx}{aBc},$$

ubi superius inferiusque per idem dividendo valor idem manet.

Vocatur autem regula ista, si iuxta denominationem præcedentem, literarum, e quibus incognita quæritur, fuerit numerus μ, *regula de* μ; nempe *regula de tri*, si præter x nonnisi duæ ex. gr. a et A fuerint, *de quinque* si et b, B adfuerint &c.

2. Sed etiam quum in proportione, etsi tantum duo termini, et summa reliquorum data fuerit, (per pag. 482) reperiatur quartus: sit artificii huius cum compositione rationum combinati exemplo, *regula societatis*.

Si nempe duorum pecuniæ, simul lucrandi caussa elocatæ, fuerint P et p, et tempora T et t, lucrumque commune (⊢⊣ aut ⊢⊣) fuerit λ; erit L lucrum prioris ad l lucrum posterioris, in ratione composita directa pecuniarum et temporum, adeoque

$$L:l=Pt:pt;$$

atque hinc

$$(PT+pt):PT=(L+l):L=\lambda:L;$$

et quotvis fuerint, summa productorum eiusmodi, erit ad cuiusvis factum, uti lucrum universum ad lucrum illius.

Nam si de quibusvis n eiusmodi factis valeat regula, valebit et de $(n+1)$ factis. Sit enim ex $(n+1)$ productis, quodvis aliquod F; exemto hoc manebunt facta numero n, quorum summa sit S, et quodvis aliquod sit f, sitque k lucrum ipsum f, nempe pecuniam, quæ unus factor ipsius f est, concernens, atque lucrum ipsum F concernens sit x; et lucrum totius S sit R; erit

Hosted by Google

$$S : f = R : k$$

et

$$f : F = k : x$$

atque hinc

$$Sf : fF = Rk : kx$$

seu

$$S : F = R : x,$$

atque hinc

$$(S + F) : F = (R + x) : x.$$

3. Quid autem per *numerum rationum*, unde nomen logarithmi venit, intelligatur, e sequenti patet. Sint μ et ν integri, prius positivi.

Ratio $q^\mu : 1$, dicebatur $(\mu : \nu)$-tuplicata rationis $q^\nu : 1$; nempe $q^\nu : 1$ componitur e numero ν rationum $q : 1$, ex. gr. pro $\nu = 2$, componitur $q^2 : 1$ ex $q : 1$ et $q : 1$; fiet enim multiplicando antecedentes et consequentes, $q^2 : 1$; atque $q^\mu : 1$ componitur e numero μ eiusmodi rationum. Exprimitur autem hoc brevius clariusque hodie per

$$(q^\nu)^{\frac{\mu}{\nu}} = q^\mu,$$

ubi q^ν pro basi accipitur. Ex gr. si basis logarithmorum sit $10 = q^\nu$, et ν denotet 10 milliones, erit $q =$ radici decies millionesimi gradus ex 10, et radix ista nempe $10^{\frac{1}{\nu}}$, elevata ad μ, erit $= 10^{\mu : \nu}$, quod idem est, ac si ex 10 ad μ elevato, radix gradus ν extraheretur; et $\mu : \nu$ est quoad 10 logarithmus ipsius $10^{\mu : \nu}$; quod olim dicebatur, quod ratio ipsius $10^{\mu : \nu}$ ad 1 sit $(\mu : \nu)$-tuplicata rationis 10 ad 1.

Imo posita serie geometrica

$$\ldots qq,\ q,\ \frac{q}{q} = 1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{qq}, \ldots,$$

et inferius supposita serie arithmetica

$$\ldots, 2, 1, 0, -1, -2, \ldots$$

non solum ratio $qq : 1$ dicebatur duplicata rationis $q : 1$, sed etiam ratio $\frac{1}{qq} : 1$ dicta est (-2)-tuplicata rationis $q : 1$; nempe $\frac{1}{qq} : 1$ componitur e duabus rationibus $q : 1$ inversis, nimirum ex $1 : q$ et $1 : q$; est enimvero

$$\frac{1}{qq} : 1 = 1 : qq.$$

Hosted by Google

Interim adhuc aliquid de logarithmis *Neperi* (Scoti Baronis *Merchistonii*, ex antiqua et insigni prosapia oriundi) addere in gratiam Tyronum paulo ulterius provectorum libet.

Calculum trigonometricum sublevare eius propositum fuit; sinum totum (nempe radium) ponit $=10\ 000\ 000$, quod sit $=n$; atque inde descendit in serie geometrica, cui subscribit seriem æquidifferentium, ita ut cuivis termino K seriei superioris respondeat terminus k exprimens numerum rationis K ad n (saltem *cum errore exiguo*), ratione ipsius $n-1$ ad n pro basi posita, *(etsi basis apud Neperum nullibi nominetur)*; ut nimirum moderno loquendi usu sit

$$\frac{K}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

cum errore exiguo; et k fit logarithmus ipsius $\frac{K}{n}$ quoad basim $\frac{n-1}{n}$.

Atque hinc est, quod quamvis nullibi videatur *Neper* de *logarithmis* qui *naturales* vocantur, cogitasse; tamen per $-10\ 000\ 000$ id est $-n$ multiplicatus *logarithmus naturalis*, in prioribus notis *cum logarithmo Neperiano* conveniat. Nimirum e basim logarithmorum naturalium denotante sit

$$\frac{K}{n}=e^x;$$

quum (pag. 183) sit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \backsim e,$$

dum $n \backsim \infty$; erit etiam pro n satis magno, cum errore exiguo

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x=\frac{K}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nx}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\frac{K}{n};$$

adeoque $-nx=k$. Consequenter x, id est log. nat. $\frac{K}{n}$, per $-n$ multiplicatus cum logarithmo Neperiano eiusdem $\frac{K}{n}$ convenit, cum errore exiguo.

Facile etiam patet logarithmum Neperianum fractionis veræ positivum, et quantitatis unitate maioris negativum esse: nempe $\frac{n-1}{n}$ est <1, adeoque ad negativum elevari debet, ut unitate maius, et ad positivum, ut fractio vera prodeat.

Hosted by Google

Adhibuit autem *Neper* motus ideam, uti *Newton* ad calculum fluxionum; nempe in duarum rectarum una A, puncto certa lege moto, seriem geometricam, (quod facile, et clarius quam a Nepero exponitur, fieri potest); in altera B, motu uniformi seriem æquidifferentium produxit, terminosque posterioris terminis prioris pro iisdem temporibus æqualibus respondentes, horum *artificiales* dixit, hoc nomine pro logarithmo usus.

Sinum totum divisit per $n = 10\ 000\ 000$, et tot eiusmodi partium *artificialem* dixit 0, pro quo nullus adhuc motus evenit in linea B; nempe $\log. \frac{n}{n} = \log. 1 = 0$; postea quærendo ingenti labore inter 1 et $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{1}{10}$ & proportionales medias, atque inter quasvis item novas, pervenit ad seriem continue proportionalium geometricam, cuius terminus primus ab $\frac{n}{n}$ decrescendo, cum errore exiguo $\frac{n-1}{n}$ erat, et huius *artificialem* (motu in B) posuit 1; atque ita porro, omnino cum errore aliquo, ipsi $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ respondent *artificialis* 2, et ipsi $\frac{1}{2}$ respondet artificialis 6 931 469; nempe ratio $\frac{1}{2} n : n$ componitur ex tot rationibus ipsi $\frac{n-1}{n} : 1$ æqualibus, cum errore exiguo.

Tantæ molis erat, adminiculis hodiernis adhuc deficientibus, systema logarithmorum præclarum seculi septimi decimi inventum condere; quanquam *Neper* quoque numerorum primorum logarithmis per multo labore quæsitas proportionales medias repertis, compositorum logarithmos omnino per additionem computaverit.

De usu tabularum et certis applicationibus pag. 512—20 et 569—81 dicetur: at de logarithmis *Gaussianis*, etiam aliquid dicendum foret, siquidem ad nos pervenissent; ex omnibus summi viri operibus desideratis, nonnisi (pag. 384 et 461) citata, et *Theoria motus corporum coelestium* adsunt; primæ lineæ *theoriae imaginariorum* quoque sero pervenerunt, quum iam theoria, quæ in hoc tomo habetur, talis qualem concipere poteram, impressa erat.

IV. *Coronidis* instar (quoad pag. 33) addatur *numeratio*, cuius proxima origo quidem *arabica* est, sed a scriptoribus Arabicis quoque *Indis* attribuitur; non de signis 0, 1, . . . , sed de lege ingeniosa quæ-

Hosted by Google

ritur, qua per 10 signa quivis integri I et i, imo et $\frac{1}{10^i}$ describi possunt. Utcunque vocatus Auctor et sine nomine viget, vigebitque in omnibus calculis.

Romanorum et facere et pati fortia fuit: sed mirum est, *Graiorum* quibus Musa ingenium dederat methodum tam complicatam, imperfectamque fuisse; nempe qui 37 signis, ab 1 incipiendo continuative, nonnisi usque ad 99 999 999 (decadice intelligendo) scribere poterant; quamvis eorum modo quoque levi additamento, quivis numerus describi potuisset. Nempe 1, 2 . . . 9, per literas α, β . . . , ita 10, 20 . . . , 90, 100, 200 . . . , 900, 1000, 2000 . . . , 9000, per literas, et quum non sufficerent, accentis suppositis, aliaque signa denotabant; atque demum 10 000 nempe *myrias* per M denotabatur; regula vero hæc erat, quod post M eorum quæ signa particularia denotabant summa, ante M vero (ad lævam) factum in M accipiebatur summæ eorum, quæ signa particularia ante M denotabant; ex gr. $\beta M\alpha$ denotabat 20001; at per MM denotari $10000.10000 = 100\ 000\ 000$, ac post MM adhuc id quod $MM - 1$ $M^2 - 1$ denotabat, scribi potuisset.

Potuissent quoque et hoc modo, posita lege sequenti, numerum quemvis describere, et omnia peragere: nempe ubi plura M se invicem excipiunt, productum eorum intelligatur, et quævis imago sive ab initio usque ad proximum M, sive inter duo proxima M fuerit, ut factor proximi M ad dextram reputetur; alioquin autem summa omnium intelligatur. Multa ob defectum cifrarum breviter exprimuntur; ex gr. $MMM\alpha MM\beta M\alpha$ = billioni + 100 millionibus + 20001, $= M^3 + M^2 + 2M + 1$.

Simplex et elegans *lex Indica* est sequens:

1. Detur numero cuivis a 0 incipiendo signum proprium, usque quo libuerit; atque

2. ponatur aliquorsum comma in lineam horizontalem; et

3. quodvis signorum dictorum ponatur ante comma ad lævam, denotet id illud, cuius signum est; at

4. si numerus signorum datorum simul cum 0 fuerit n, quæcunque eorum æqualia se invicem in linea dicta excipiant, valor illius quod ad

Hosted by Google

lævam est, sit valoris illius quod ad dextram est n-tuplus; valoremque eum quodvis retineat, etsi in quemvis alium locum aliud signum ponatur; denique

5. tota imago denotet summam omnium eorum, quæ per signa particularia, valores a locis (ut sæpe et in mundo fit) sortita, denotantur.

Patet hinc

$$\ldots \text{III}, \text{III} \ldots$$

denotare

$$\ldots + n^2 + n + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots;$$

nempe in 1, 1 denotatur 1 per notam ante comma, et simul n-ies plus, quam in loco sequenti, ita in 11, denotat nota prior n-ies plus, quam 1; ita valor ipsius 2, 2, adeoque ipsius 1, 2 & patet. Est etiam manifesto 1, 111 . . . series infinita, cuius summa (pag. 152) $\backsim \frac{n}{n-1}$.

Quod hoc pacto numerus quivis a 0 *incipiendo, post quemvis ulterius sequens, exprimi possit,* patet sic. Denotetur $n-1$ per m; si in loco ultimo ad dextram ante comma sit signum particulare k, aut zero aut integrum ipso m minorem denotans, poterit in locum ipsius k signum numerum uno maiorem denotans poni; si vero m fuerit in eo loco tum ad lævam eundo, aut aliquamdiu signa m se invicem excipient, aut post prius m quod ante comma est, statim aliud sequetur ad lævam; sit k signum illud quod prima vice non excipit signum m, et si nullum tale sit, reputetur 0 pro k. Accedente 1 ad m, fiet n, quod cum ad lævam præcedenti m, denotante $m.n$, facit n^2, adeoque id quod 1 loco ad lævam sequenti denotat, et hoc si et ibi m fuerit, denotans $m.n^2$ efficit cum eo $(n-1+1)n^2 = n^3$; et ita porro donec ad k deventum fuerit, et tum augebitur k uno, denotabiturque præter valorem ipsius k, etiam potentia nova ipsius n quæ prodiit, relictis cifris in locis omnibus ad dextram.

Quod etiam ad legem numerationis Græcorum, quæ tam facile extendi potuisset, applicari manifestum est; dummodo pro potentiis ipsius 10 potentiæ ipsius M ponantur, subibit nempe ipsius $n-1$ vicem $M-1$, etsi plura loca occupet. Ex. gr. pro $y = M-1$, ex yM^3yM^2yMy, (per quod $yM^3 + yM^2 + yM + y$ intelligendum), accedente 1 fiet αM^4, id est M^4.

Hosted by Google

Patet etiam, ipsum 1 postpositis quotvis cifris esse $>$ eo, quod in locum cuiusvis cifræ m posito, per ista m denotatur; atque quivis numerus non $>m$ ponatur in locum ipsius 1, ad numeros abinde uno crescentes denotandos, imagines præcedentes eodem ordine quo antea prodierunt, sequi.

In nostra numeratione n decem est; sed n quidcunque denotare potest, nempe integrum quemvis *(imo et ad fractos extendi posset)*. Elegans est *Leibnitii* ingeniosa similitudo in Xeniis ad Principem missis, a *Dyadica* numeratione nonnisi per duo signa nempe 1 et 0 petita: quod nimirum sic Deus unus ex nihilo infinitum composuerit; ac veluti imagines dyadicæ imperito confusæ videntur, claræ peritis, ita confusio mundi mortalibus apparens, spiritibus superioribus sapientissimus ordo est.

Certe dyadica ista, nisi ad numeros maiores exprimendos, plures notas requireret, se quoad omnes operationes valde commendaret; nempe nullius tabulæ Pythagoricæ egeremus, et operationes omnes perfaciles essent, si prius duæ tantum, tum summa harum cum tertia linea, et semper nova summa sequenti lineæ adderetur, ut omnis molestia evitetur in additione plurium linearum.

Si vero n ex. gr. viginti esset: tum omnino ingentes numeri breviter describerentur; tanto fortius, si $n = 37$ esset, (nempe 37 signa ut apud Græcos assumerentur); at pro $n = 20$ tabulam Pythagoricam pauci addiscerent, quum pro hodiernis 36 productis 171 addiscenda essent. Notandum, tabulam per diagonalem in duas partes æquales dispesci.

In decadica vero qua utimur, 10 dicitur *decem*, 10^2 autem *centum* et 10^3 dicitur *mille*, et 10^6 nempe $10^3 . 10^3$ id est millies mille dicitur *millio*, patetque 1 cum 6^ν cifris, *millionis* ν-tam potentiam denotare.

Si comma ad dextram plane ad finem sit, omitti (uti $+$ in initio) solet, parsimoniæ gratia; si vero comma non ad finem fuerit, expressio *fractio decimalis* dici solet. Est nempe æqualis fractioni communi, cuius numerator est ipsa imago decadica commate ad finem posito, aut deleto, denominator autem est 1 tot cifris postpositis, quot notæ post comma erant, quæ etiam *notae decimales* audiunt. Nam ex. gr.

Hosted by Google

$$63,51 = \frac{63}{1} + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{1}{100} = \frac{6351}{100} = 63 + \frac{51}{100}.$$

Conversim quoque quævis fractio, cuius numerator integer et denominator est 1 cum cifrarum numero N, est numeratori, factis in eo numero N notis decimalibus, æqualis; nam hoc tali fractioni æqualis est.

Patet etiam, fractionis decimalis valorem non mutari, quotcunque cifræ ad dextram postponantur: nam numero notarum decimalium aucto, tot cifræ accedent numeratori quam denominatori, adeoque per idem multiplicabuntur.

Si vero comma mutet locum, promotum ad dextram, vel lævam, locorum numero μ: in casu priore multiplicabitur valor, in posteriore dividetur, per 10^{μ}. Nam si comma ad dextram migret μ locis, totidem notis decimalibus pauciores manebunt, adeoque in denominatore post 1 tot nempe μ cifris pauciores erunt, manente numeratore; itaque valor 10^{μ}-ies maior evadet. Si autem comma ad lævam μ locis migret, totidem notis decimalibus plures erunt, adeoque denominatori accedent μ cifræ; quapropter valor 10^{μ}-ies minor erit. Ex. gr. ex $2 = 2$, $= 0002$, pro $\mu = 3$ fiet $0,002 = \frac{2}{1000}$, et ex 2,3 fiet duobus locis promoto commate

$$230, = 2,3 \,.\, 100 = \frac{23}{10} \,.\, 100 = 230.$$

Hosted by Google

C.

DE OPERATIONIBUS VULGARIBUS DECADICIS.

De numeratione et fractione decimali generaliter dictum (pag. 491—95) est. Dicatur quævis lege numerationis decadicæ facta expressio *imago decadica;* sive ad finem sit comma sive antea sive nullibi, at in casu postremo semper ad finem cogitetur, adinstar + in initio omissum.

§. 1.

Est quævis imago decadica fractio (pag. 495); et imagines decadicæ D et d, si notæ decimales in D numero D', in d numero d' sint, et $D' > d'$ fuerit, (per pag. 495) ad denominationem eandem reducuntur: adiectis ipsi d ad dextram (manente commate) numero $D' - d'$ cifris; ita ad tertiam et de quavis ad sequentem progredi licet. Tumque patet in *additione* nonnisi numeratores ut integros addendos esse, uti *in subtractione* numeratorem subtrahendi ex altero subtrahi debere, in resultato totidem notis decimalibus factis, quot in una imaginum sunt. *Divisio* autem (quum denominatores æquales facti sint) peragitur numeratore dividendi per numeratorem divisoris diviso. Potest autem divisio et absque reductione ad *denominatorem eundem* perfici: nempe sint imaginum D, d numeratores N, n; erit

$$D = \frac{N}{10^{D'}}, \quad \text{et} \quad d = \frac{n}{10^{d}};$$

atque

$$\frac{D}{d} = \frac{N \,.\, 10^{d'}}{n \,.\, 10^{D'}} = \frac{N}{n} \,.\, 10^{d'-D'}.$$

Multiplicatio autem fit sic:

$$D \,.\, d = \frac{N \,.\, n}{10^{D'+d'}};$$

itaque tot notæ decimales fiunt in facto numeratorum (ita consideratorum,

Hosted by Google

quasi comma ad finem esset) decadice expresso, quot notæ decimales in utroque factore simul sunt. In *quoto* $N:n$ vero, si $d'=D'$, quotus $N:n$ est; nam tum $10^{d'-D'}=10^{0}=1$; at si $d'=D'+m$ (pro m integro), $N:n$ per 10^{m} multiplicari debet; si vero $D'=d'+m$, tum

$$10^{d'-D'}=10^{-m}=\frac{1}{10^{m}};$$

adeoque $N:n$ per 10^{m} dividere oportet; et si $N:n$ imagine decadica expressum fuerit, quomodo multiplicatio, aut divisio mutato commate peragatur, (pag. 495) dictum est.

§. 2.

Summa hinc imaginum decadicarum decadice expressa reperitur modo sequenti: scribantur horizontaliter imagines decadicæ addendæ ita, ut commata omnium in eandem lineam verticalem; atque pariter in omnibus imaginibus quævis m-tæ notæ a commate ad lævam in eandem lineam verticalem cadant; et pariter ad dextram, si fuerint; atque tum linea ducta, quæ addenda superius relicta, a summa quæsita distingvat, incipiendo ab ultima columna a dextra ad lævam fiat operatio sequens. Consideretur in hac operatione in quavis columna numerus quivis, quasi tot unitates denotaret, quot per se denotat; atque incipiendo ab huius columnæ ultimæ termino aliquo extremo, quæratur numeri huius et sequentis summa decadice expressa; et quæratur summa cuiusvis summæ repertæ, cum numero in eadem columna proxime sequenti, donec nullus supersit; et e quacunque columna prodierit summa $=\nu$ decadibus cum n unitatibus (pro n non >9), in columnam eandem infra lineam scribatur n; et ν (tanquam unitatum numerus) addatur numero extremo columnæ ad lævam sequentis, et in eadem columna, quævis summa addatur numero sequenti, donec nullus in eadem columna supersit; atque si prodeat columna ultimæ summa $=\nu'$ decadibus cum n' unitatibus (pro n' non >9) in eadem columna infra lineam scribatur n'; et ν' decadice expressum scribatur ad lævam ante n', si nulla amplius

Hosted by Google

ad lævam columna supersit. Demum vero summa infra lineam prodeunte, ponatur comma in lineam commatis addendorum.

Quod summa hoc modo rite prodeat, sic patet: quum hoc pacto omnia addenda ad eundem denominatorem, qui etiam in summa per comma modo dicto positum fit, reducta fuerint, quæstio eo redit; num summa numeratorum, id est si comma in omnibus addendis et summa quoque, ad finem posita esset, rite prodierit. Hoc autem inde patet, quod a columna ultima A ad dextram, progrediendo ad sequentem B, inde ad C, et ita porro usque ad extremam nihil sub ullam scribatur, quod in columnis eousque additis non adest; demum vero omne, quod ex addendis superest, summæ adiiciatur, prætereaque nihil.

Nimirum sit columna

$$A = \mu \,.\, 10 + m,$$

erit β dicendo id quod 1 in B significat

$$B + \mu \,.\, 10 = B + \mu \,.\, \beta,$$

sitque hoc

$$= \mu' .\, 10 \,.\, \beta + m' .\, \beta;$$

adeoque

$$A + B = B + \mu \,.\, 10 + m = \mu' .\, 10 \,.\, \beta + m' .\, \beta + m = \mu' .\, 10 \,.\, \beta + m' .\, 10 + m;$$

in summam scriptum autem, nempe $m'm$ (decadice intelligendo) denotat $m' .\, 10 + m$; itaque nonnisi $\mu' .\, 10\beta$ desunt. Si vero usque ad certam columnam G (exclusive) in qua 1 denotet g, omnia columnarum usque ad illam F (inclusive) quæ ipsam G præcedit, summa rite inscripta fuerit, nonnisi numero ν decadum illius f quod 1 in columna F denotat, supermanente: tum si

$$G + \nu \,.\, 10 \,.\, f = \nu' .\, 10 \,.\, g + n \,.\, g$$

(pro n non >9), et summæ in columnam G inscribatur n; e summa columnarum A, B, . . ., F, G nonnisi $\nu' .\, 10 \,.\, g$ supererit. Hoc pactoque usque ad columnam extremam pervenitur; et si ex. gr. ista G esset, atque ipsi n . . . $m'm$ (decadice intelligendo) anteponatur ν' decadice expressum, $\nu' n$ . . . $m'm$ denotabit

$$\nu' .\, 10g + n \,.\, g + \ldots + m' .\, 10 + m,$$

adeoque summam totalem; nempe $\nu' n$ (decadice intellectum) denotat $\nu' . 10 . g + n . g$, (denotante 1 unum g in loco n).

Scholion. Summa quorumvis duorum numerorum ipso 10 *minorum*, uti etiam *differentia cuiusvis numeri n ipso* 10 *minoris a numero minori quam* $(10 + n)$, e tabula sequente constat: nec necesse est, inter axiomata referre ex. gr. quod $3+5=8$, et $8-5=3$; $8+7=15$, et $15-7=8$ &c.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Constructio tabulæ ex inspectione patet; nempe in linea superiore sunt numeri a 0 usque ad 9, et in omnibus columnis verticalibus deorsum a quovis numero supremo sequuntur item numeri naturales; adeoque in quavis columna ex. gr. ipsi 7 tot unitates adduntur usque ad lineam horizontalem (inclusive) post ex. gr. 5 (in columna extrema ad laevam posita), quot unitates in 5 sunt; itaque ubi columna ipsius 7 cum horizontali ipsius 5 concurrit, numerus 12 summam ipsorum 7 et 5 decadice exprimens reperitur; et differentiam ipsius 7 a 12 ostendit 5, uti 7 differentiam ipsius 5 a 12.

Hinc etiam casus sequentes patent: si ex. gr. numero $\mu . 10 . \beta + 8 . \beta$ sit addendum $7 . \beta$, fiet summa

$$= \mu . 10 . \beta + 15 . \beta = (\mu + 1) . 10 . \beta + 5 . \beta ;$$

ita si ex hoc subtrahendum sit $7 . \beta$, remanet $\mu . 10 . \beta + 8 . \beta$; adeoque in casu primo fit β numero $(\mu + 1) 5$, in posteriore autem $\mu 8$, decadice utrumque intelligendo.

Hosted by Google

§ 3.

Subtractio autem peragitur hoc modo: scribantur ita (ut in additione), ut comma sub comma, decas sub decadem, . . . decima sub decimam, . . . cadant: erunt pariter ad denominatorem eundem reducta, et quasi comma ad finem esset tractanda; dummodo et in differentiam comma in lineam commatum verticalem ponatur. Sit, literis numeros infra 10 denotantibus, et imagines decadice intelligendo *maior*

$$NM \ldots DCBA,$$

minor sit

$$n\ m \ldots d\ c\ b\ a\ ;$$

erit differentia

$$(N-n)\ (M-m) \ldots (D-d)\ (C-c)\ (B-b)\ (A-a)$$

pro casu, si quælibet litera superior maius inferiore denotet; namque omnia decadice intelligendo linea infima lineæ mediæ addita, lineam supremam præbet; in quavis columna enim ex. gr. in secunda ad lævam est

$$b+(B-b)=B.$$

Itaque in hoc casu in quamvis columnam id scribi debet, quo superior inferiorem excedit.

Si vero in columna quapiam, superior inferiori æqualis (ex. gr. $D=d$) sit, tum etiam $D-d=0$ in columna eadem rite scribetur in differentiam sive 0 denotet D sive alium numerum, nam $(D-d)+d=D$.

At si quis superiorum minor inferiore sit, aut superior 0 et inferior non 0 sit; tum sit ex. gr. $b=B+b'$; in hoc casu quoque minor e maiori demi poterit, si in eadem columna 0 scribatur, et infra 0 scribatur b', tamquam negativum pro differentia, quæ prius modo dicto prodiit; nempe ubi numerus inferior excedit superiorum, ubique 0 ponendo, et excessum inferius scribendo, excessus inferiores subtrahantur. Prodibit enim differentia vera; namque

$$0-(b-B)=B-b.$$

Si $B=0$ sit, tum $b=b'$.

Hosted by Google

Subtractio hæc posterior autem ita peragi potest; ut in columnam ipsius b infra b in differentiam scribatur $b' = 10 - b'$, ita tamen, ut ad lævam in differentia quæ prius prodiit, usque ad numerum illum proximum eatur, qui non 0 est, atque hic unitate minuatur; quotcunque cifræ autem fuerint eousque, in 9 mutentur. Sit nempe plane $B = 0$ aut $B < b$, atque

$$B - b = -b', \quad \text{et} \quad 10 - b' = b'';$$

adeoque

$$b'' = 10 + B - b:$$

unde etiam idem est, pro $b > B$, sive B ex b subtractum ex 10, sive b ex $B + 10$ subtrahatur; dummodo in tali casu proxime ad lævam uno minus scribatur. Denotet nempe 1 unum β in columna ipsius B; erit

$$(C - c - 1).10.\beta + (10 + B - b).\beta = (C - c).10\beta - 10.\beta + 10.\beta + (B - b).\beta =$$
$$= (C - c).10.\beta + (B - b).\beta.$$

Si vero $C = c$, adeoque $C - c = 0$, aut etiam $D - d = 0$, imo porro superior æqualis inferiori fuerit usque ad certum ex. gr. E; erit E aut $> e$, aut $E < e$; si $E > e$, tum

$$(E - e - 1).10^3.\beta + (D - d + 9).10^2.\beta + (C - c + 9).10.\beta + (B - b + 10).\beta =$$
$$= (E - e).10^3.\beta + (D - d).10^2.\beta + (C - c).10\beta + (B - b).\beta;$$

nam

$$990.\beta + 10.\beta - 1000.\beta = 0.$$

Si vero $E < e$, aut etiam sequentes numeri superiores minores inferioribus fuerint usque ad certum aliquem ex. gr. $G > g$; in columnam ipsius E scribatur non

$$e'' = 10 - (e - E)$$

sed

$$e'' - 1 = 9 - (e - E) = 9 + E - e;$$

in columnam ipsius F pariter non

$$f'' = 10 - (f - F)$$

sed

$$9 - (f - F) = 9 + F - f,$$

et in columnam ipsius G scribatur $G - g - 1$: eritque

Hosted by Google

$$(G-g-1).10^5.\beta+(F-f+9).10^4.\beta+E-e+9).10^3.\beta+(D-d+9).10^2.\beta$$
$$+(C-c+9).10.\beta+(B-b+10).\beta=(G-g).10^5.\beta+(F-f).10^4.\beta$$
$$+(E-e).10^3.\beta+(D-d).10^2.\beta+(C-c).10.\beta+(B-b.\beta;$$

nam

$$99990.\beta+10\beta-10^5.\beta=0.$$

Eritque *differentia*

$$(G-g-1)\ (f''-1)\ (e''-1)\,99b''$$

(decadice intelligendo).

Patet etiam modo consueto in columnam ipsius B scribi

$$b''=10+B-b\,;$$

nempe si C non fuerit 0, demitur 1 ex eo, quod $10.\beta$ facit, si vero $C=0$ imo etiam sequentes superius cifræ sint usque ad certum E, tum 1 ex E demtum erit

$$10^3.\beta=99.10\beta+10.\beta\,;$$

itaque cifræ in columnis D et C in 9 mutantur, et ex B fiet $(10+B).\beta$.

§. 4.

Quoad *multiplicationem integrorum:* sit imago decadica $DCBA$ per imaginem decadicam cba multiplicanda: erit

$$DCBA=D000+C00+B0+A,$$

et

$$cba=c00+b0+a\,;$$

atque

$$DCBA\,.\,cba=a(D000+C00+B0+A)+b0\,.\,(D000+C00+B0+A)$$
$$+c00.(D000+C00+B0+A)=c.D00000+(c.C+b.D)0000$$
$$+(c.B+b.C+a.D)000+(c.A+b.B+a.C)00+(b.A+a.B)0+a.A;$$

quod ordine evidenti modo sequenti dispositum additumque, factum præbet; patetque $a.A$ summam unitatum, columnam sequentem decades, et ita porro esse.

Hosted by Google

		$a.D$	$a.C$	$a.B$	$a.A$
	$b.D$	$b.C$	$b.B$	$b.A$	
$c.D$	$c.C$	$c.B$	$c.A$		

Est vero multiplicatio integri M per integrum m additio ipsi M ipsius M, $(m-1)$-ies iterata; at peragitur modo sequenti consueto brevius: accipitur prius a-ies A, et si hoc <10 fuerit infra lineam sub a scribitur; si vero fuerit $=\mu.10+a'$, eo nonnisi a' scribitur, et μ additur ipsi $a.B$: atque notæ multiplicandi semper porro ad lævam singuli a-ies accipiuntur, et si e quacunque nota per a multiplicata transierit ν (uti antea μ) et nota sequens per a multiplicata det $n.10+k$, scribitur in facti locum proximum ad lævam k, et $\nu+n$ additur facto e nota sequente in a; si vero nulla supersit, $\nu+n$ anteponitur facti parti quæ eousque prodiit. Eademque operatio fit cum omnibus multiplicatoris notis, dummodo factum quodvis partiale sub nota multiplicatoris illa terminetur, per quam multiplicatio facta est. Denique facta partialia adduntur.

Patet M per $b.10$ et $c.100$ multiplicandum esse, atque idem prodire, si $b.M$ sub b et $c.M$ sub c terminetur: in additione factorum partialium enim tantum est, ac si post $b.M$ una cifra et post $c.M$ duæ essent.

Quod facta partialia rite prodeant, e conceptu iteratæ additionis patet. Factum e quibusvis duobus novenario minoribus e *tabula Pythagorica* patet, ubi quivis sibi iterato additum (pag. 499) toties continet supremum, quot unitates habet numerus extremus lineæ horizontalis.

§ 5.

Divisio peragitur sic: sit dividendus D et divisor d, et

$$D=D'.10+C$$

(denotante C notam infra 10) et sit q talis integer, ut $q.d$ non $>D'$, sed $(q+1)d>D'$ sit; atque integri r et c tales sint, ut $r<d$, et

$$c.d+r=(D'-q.d)10+C$$

Hosted by Google

sit: erit

$$D'.10+C=q.d.10+c.d+r=d.(q.10+c)+r=D.$$

Consequenter $q.10+c$ cum residuo r est quotus ex D diviso per d. Hinc quævis nota dividendo adiecta novam notam quoto adiicit; et quæstio eo redit, quomodo a læva incipiendo prima quoti nota prodeat, et quænam quoti nota pro sequente dividendi nota sit.

Quæritur prius a læva incipiendo, num d in prima dividendi nota reperiatur, et si non, quæratur porro usque ad notam illam primam talem, ut in numero quam imago decadica D' a nota prima usque ad hanc inclusive denotat, non sit $<d$, et in quotum scribatur q (sensu antea dicto); atque tum quæratur pro nota C dividendi post D' sequente, nota c post q decadice sequens: et tum $D'.10+C$ pro priore D' reputato, si adhuc nota B dividendi sit, quæratur nota b quoti post qc sequens; atque hoc continuetur, donec nulla dividendi nota supersit, et notetur residuum ultimum r'; eritque quoti complementum $r':d$. Patet hinc e tot notis constare quotum, quot notæ dividendi post primum D' sunt, addito 1 primo D' competente. Nimirum nec primum D', nec ullum $D'-dq$ quotum >9 dare potest: nam et maximum $<d$ est $d-1$, atque et

$$(d-1).10+9=10.d-1.$$

Si sit $d=d'.10^{n}$, resecentur ad finem dividendi D totidem notæ, sitque pars resecta k ad dextram, et ad lævam sit D' valore $D'.10^{n}$, sitque

$$D'=q.d'+r,\ (r<d');$$

erit

$$D'.10^{n}=q.d'.10^{n}+r.10^{n};$$

et

$$D=D'.10^{n}+k=q.d'.10^{n}+r.10^{n}+k;$$

itaque q erit quotus cum residuo $r.10^{n}+k$; quod $<d=a'.10^{n}$ est, nam $r<d'$.

Si vero $D=\alpha.\delta$ et $d=\alpha.\delta'$, fiet $\delta:\delta'=D:d$; atque operatio abbreviatur. Unde quæstio fit, per quosnam numeros numerus exacte dividi queat? Si ad finem numerus par sit, summa decadum et numeri paris

Hosted by Google

per 2 dividitur. Si postremæ duæ notæ (decadice) per 4 dividi queant, pars prior multiplum centenarii est, adeoque totum per 4 dividitur. Si tres postremæ per 8 dividantur, pars prior multiplum millenarii est per 8 divisibile. Si summa singularum notarum (sine valore decadico) per 9 dividatur, totam imaginem meritur 9; ita 3 metitur imaginem, si summam dictam metitur. Nam quævis nota quotvis cifris postpositis, per 9 divisum pro residuo se ipsam aut 0 dat; itaque nonnisi de summa residuorum quæritur. Si vero tam 2 quam 3 metiatur numerum, etiam 2.3 metitur (pag. 427) &.

Etiam 11 metitur imaginem decadicam *dcba*, si differentiam summæ notarum in locis paribus a summa notarum in locis imparibus metiatur 11. Nam si post 1 numerus cifrarum par fuerit, per 11 divisum residuum 1 dat; si vero post 1 numerus impar cifrarum fuerit, residuum 10 est; itaque pro

$$d \,.\, 1000 + b \,.\, 10 = N',$$

et

$$c \,.\, 100 + a = N,$$

erit

$$N' + d + b = n' \,.\, 11,$$

et

$$N - (c + a) = n \,.\, 11;$$

adeoque si

$$d + b - (c + a) = \mu \,.\, 11;$$

erit

$$N' + N = (n' + n - \mu)\, 11.$$

Et conversim si $d + b - (c + a)$ non sit multiplum ipsius 11, tum 11 numerum non metitur; nam tum

$$N' = n' \,.\, 11 - (d + b),$$

et

$$N = n \,.\, 11 + c + a,$$

adeoque

$$N' + N = (n' + n)\, 11 + c + a - (d + b),$$

et si

$$c + a - (d + b)$$

non sit multiplum ipsius 11, nec $N' + N$ erit.

Hosted by Google

§. 6.

Si dividendo D cifræ numero μ adiiciantur, et diviso hoc per d prodeat pars quoti integra q; atque fiant in q notæ decimales numero μ: prodibit quotus cum errore $<1 : 10^{\mu}$. Nam

$$D : d = D . 10^{\mu} : d . 10^{\mu} = (D . 10^{\mu} : d) : 10^{\mu};$$

atque

$$qd < D . 10^{\mu} < (q + 1) . d;$$

itaque

$$q . d : 10^{\mu} < D < (q + 1) . d : 10^{\mu}.$$

Unde etiam modus patet, quo fractio quævis in decimalem cum errore saltem quantumvis exiguo convertatur.

Quomodo quævis fractio ad quemvis denominatorem reducatur, et denominator communis minimus, divisorque communis maximus reperiatur, dictum est pag. 68 et 429.

Scholion. 1. Proba novenariorum in singulis quatuor speciebus valet in tantum, quod si locum non habeat, operatio erronea sit; conversim autem patet resultati notis permutatis etiam, probam locum habere. *In subtractione* e subtracto et differentia simul, et tum e minuendo eiiciendi novenarii sunt; *in multiplicatione* e facto, atque e factoribus: nempe si multiplicandus $= n . 9 + a$, et multiplicator $= m . 9 + b$, factum $= m . n . 9 . 9 + a . m . 9 + b . n . 9 + a . b$; itaque $a . b$ supra novenarii multiplum tantum residuum relinquere debet, quam factum eiectis novenariis.

Scholion. 2. Operationes istæ cum numeris dyadice expressis facillime peragerentur: si ubi plures imagines addendæ sunt, prius duæ addantur, et cuivis summæ quæ prodiit sequens addatur, donec summa omnium prodeat. In multiplicatione, nonnisi multiplicandus describitur ubique sub multiplicatoris nota $= 1$ terminandus. In divisione semper patet, num 0 aut 1 in quotum veniat.

Hosted by Google

§. 7.

Radix m gradus autem extrahitur sic. Si quivis integer fuerit imagine decadica P expressus, et integer r sit talis, ut $r^m =$ vel $< I'$, sed $(r+1)^m > I'$; atque ipsi I' adiiciantur notæ numero m, quarum *imago decimalis* dicatur i: erit imago tota $= I'.10^m + i$, (quæ dicatur I); eritque r cum nota aliqua b decadica adiecta radici m gradus ex I æqualis, aut ea proxime minor. Nam etsi $i = 0$ esset,

$$(r.10)^m = r^m.10^m$$

esset $=$ aut $< I'.10^m$; sed

$$((r+1).10)^m = (r+1)^m\, 10^m > I'.10^m + i,$$

etsi in quovis loco post I' novenarii essent quia $(r+1)^m > I'$. Itaque nonnisi nota illa b quæritur, quæ post r sequitur: quod modo sequenti fit. Si $r.10$ dicatur a, erit $a + b = \sqrt{I}$, aut radice proxime minor; adeoque tale b (a 0 usque ad 9) quæri debet, ut $I - a^m$, id est $(I' - r^m).10^m + i$ sit $=$ vel $>$

$$ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)a^{m-2}b^2}{1.2} + \ldots + b^m,$$

(pag. 178), et si $b+1$ ponatur pro b, expressio hæc $> I - a^m$ sit. Patet in posteriore, si pro $a = r.10$ ubique r ponatur, terminos addendos (omissis cifris) semper uno loco porro ad dextram terminari; nempe $m.r^{m-1}b$ haberet $m-1$ cifras ad dextram,

$$\frac{m(m-1)r^{m-2}b^2}{1.2}$$

haberet $m-2$ cifras propter 10^{m-2} &c. Ut vero b paucius tentando reperiatur; tentetur divisio ipsius $I' - r^m$, adiecta prima nota decadice sequenti, per mr^{m-1}; quia $mr^{m-1}b$ etiam $m-1$ loca post se habet.

Hosted by Google

Si vero post I adhuc m notæ fuerint; (ut pag. 506) reputetur I tanquam I' antea atque operatio eadem usque ad finem repetatur.

Patetque si nova m loca adiiciantur, idem redire; in quadrate radice autem terminos addendos esse $2ab+b^2$.

Si vero nm cifræ adiiciantur numero N: et in radice m gradus ex $N.10^{nm}$ fiant n notæ decimales: prodibit radix vera aut proxime minor e fractione, cuius numerator est $N.10^{nm}$ et denominator 10^{nm}, adeoque ex N.

Ex. gr.

$$\sqrt{2}=\sqrt{20000}:100.$$

Sit primum

$$I=200,\quad I'=2,\quad i=00;$$

erit $r=1$, adeoque

$$a=10;\ (I'-r^2).100+i=100;$$

quod si usque ad notam primam ipsius i (inclusive), nempe 10 ita dividatur per $2r=2$, ut ratio etiam termini b^2 habeatur; prodibit $b=4$; nam

$$2ab+b^2=20.4+4.4=24.4=96,$$

et pro $b=5$ prodiret $125>100$. Atque iam nova I, I', i, r, a accipi, et novum b quæri potest; nempe pro

$$I=20000,\ I'=200,\ i=00,\ r=14,\ a=140,$$

pariter prodibit $b=1$; fietque

$$171<\sqrt{20\ 000}<172,$$

atque $\sqrt{2}=1,17$ cum errore $<0,01$. Idem vero continuare pro novis I, I', i, r, a licet, donec libuerit.

Ita

$$\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{15000}:10=\sqrt[3]{15000000}:100\ \&.$$

Sit primum

$$I=15000,\ I'=15,\ i=000.$$

Hosted by Google

Erit $r = 2$, adeoque $a = 20$, et

$$(I' - r^3) . 10^3 + i = 7000;$$

atque si hoc a læva usque ad notam primam ipsius i (inclusive) per $3r^2$, (nempe 70 per 12) ad terminos reliquos etiam respiciendo dividatur, prodibit $b = 4$; nimirum

$$3a^2b = 48 . 100., \; 3ab^2 = 96 . 10, \text{ et } b^3 = 64;$$

quorum summa non > 7000, sed si $b = 5$ acciperetur, > 7000 prodiret. Pariter pro novis I, I', i, r, a, ut prius continuari donec libuerit, patet.

Scholion. Solet e quantitate algebraica quoque radix extrahi: at nisi exacte, aut serie lege certa progrediente, complemento ad limitem 0 tendente prodeat, aut saltem erroris limites æstimentur, exemplum vanum tantum eiusmodi formularum est.

Ex. gr. Sit (Tom. II: 2211. V.)

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 - 2uE} = \alpha + \beta,$$

et $\alpha = \frac{a}{2}$; erit $\alpha^2 = \frac{a^2}{4}$, et

$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 = 2\alpha\beta + \beta^2 = -2uE - \frac{u^2}{a} + u^2;$$

cuius si terminus rite electus per $2\alpha = a$ dividatur, prodibit

$$\beta = -\frac{2uE}{a};$$

quia erit

$$2\alpha\beta + \beta^2 = -2uE + \frac{4u^2E^2}{a^2} = u^2 - \frac{u^2}{a} - 2uE;$$

nam (ibidem)

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4}.$$

Hosted by Google

Eodem modo solet etiam radix (adinstar divisionis pag. 146) extrahi. Ex. gr. pro $\sqrt{1-x}$ sit terminus primus $1=a$, et sequens sit b; erit

$$(1-x)-1^2=-x=2ab+b^2;$$

et si per $2a=2$ dividatur $-x$, prodibit

$$b=-\frac{x}{2},$$

ac subtracto $2ab+b^2$, residuum erit $-\frac{x^2}{4}$. Pro quovis novo a (id est summa terminorum radicis quæ prodierunt) autem duo priores termini erunt $2+x$; atque si terminus aliquis residui fuerit $\frac{-x^m}{2^m}$, termino hoc per terminum primum ipsius $(2-x+\ldots)$ diviso, prodibit terminus radicis sequens $\frac{-x^m}{2^{m+1}}$; et multiplicando per $(2-x+\ldots)$ prodibit

$$\frac{-x^m}{2^{m+1}}+\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}+\ldots;$$

quo subtracto ex $\frac{-x^m}{2^m}+\ldots$, manet $-\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}+\ldots$;

et casu eodem redeunte, prodit series

$$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}-\frac{x^4}{2^5}-\ldots;$$

quæ ubique referri solet; quamvis ex. gr. pro $x=\frac{1}{2}$, fiat

$$1-\frac{x}{2}=\frac{3}{4},$$

et a $-\frac{x^2}{8}$ incipiendo (inclusive) summa seriei geometricæ $\backsim -\frac{1}{24}$, adeoque series tota $\backsim \frac{17}{24}$, quod elevatum ad 2 est

$$=\frac{289}{576}>1-x=\frac{1}{2}.$$

Generaliter pro $\frac{x}{2}<1$, series

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^3}{2^4} - \ldots \backsim \frac{8-8x+x^2}{4(2-x)}$$

(pag. 151); cuius ad 2 elevati differentia ab $1-x$ fit $= \frac{x^4}{4 \cdot 4(2-x)^2}$; adeoque error aliquatenus æstimari potest.

Si vero $x:2 > 1$, tum series $\backsim -\infty$. Ad $\sqrt{m \pm x}$ mutatis mutandis applicari potest.

Hosted by Google

D.

APPLICATIONES (pag. 109) QUÆDAM.

§. 1.

Problemata vulgaria.

I. Quæritur, pecunia a interusurio c pro centum elocata, si interusurium ad finem cuiusvis anni summæ capitali pariter elocandæ accedat: in quantum s excrescat ad finem anni n-ti?

Fiet ex 100 ad finem anni primi $100+c$; itaque ex a fiet

$$\frac{a.(100+c)}{100}=a+\frac{ac}{100},$$

nam

$$100:a=(100+c):\frac{a(100+c)}{100};$$

et hoc ad finem secundi anni fiet

$$a\left(\frac{100+c}{100}\right)^2;$$

ita ut si

$$\frac{100+c}{100}$$

dicatur p, fiet capitalis ad n-ti anni finem

$$ap^n=s.$$

Hinc

$$\log.s=\log.a+\log.(p^n)=\log.a+n\log.p;$$

et patet e quibusvis tribus harum quatuor quantitum reperiri quartam. Ex. gr. quæri potest ad quot annorum finem fieret 1000 ex 1 sub dicta conditione elocato; respondetur

$$n=\frac{\log.s-\log.a}{\log.p};$$

Hosted by Google

Quod si vero et Perceptori rem tractanti solvendum sit quotannis c' pro centum: patet tum ex 100 ad finem anni fieri $100+c-c'$; et fieri

$$p=\frac{100+c-c'}{100}.$$

Si interusurii interusurium solvatur, tum fiet

$$p=\frac{100+c-\frac{c^2}{100}}{100}.$$

quia $\frac{c^2}{100}$ est interusurii interusurium, quia

$$100:c=c:\frac{c^2}{100}.$$

II. Hoc modo inpopulationis incrementum computatur, quantitate c pro centum et numero viventium præsenti datis. Si ex. gr. c (nempe incrementum cuiusvis 100 ad cuiusvis anni finem) esset 2; quæritur quot fient ex millione usque ad seculi finem.

III. Hinc quævis quantitas pecuniæ ad certum tempus reduci potest; id est s ad finem n-ti anni tanti valoris est certo sensu, quanti a est in præsenti.

Itaque valores plurium quantitatum pecuniæ, diversis temporibus percipiendarum, ad idem tempus (ex. gr. ad præsens) reducti, comparari possunt.

Si capitali a quotannis non solum interusuria addantur; sed præterea cum fine anni cuiusvis accedat capitalis b sub eadem conditione elocata: quæritur ad finem n-ti anni quanta fiet tota summa capitalis.

Ex a fiet ap^n, ex b quod cum initio anni secundi accedit, fiet bp^{n-1}, e sequenti bp^{n-2}, et ita porro: atque hinc orietur progressio geometrica, cuius accipi pro termino primo potest id quod ex b cum initio anni n-ti usque ad eiusdem finem fiet, nempe bp (si non accedat adhuc b cum fine anni n-ti quoque, tunc enim b esset primum); exponens seriei est p; itaque ipsi ap^n addi debet summa seriei huius, et prodibit

Hosted by Google

$$s = ap^n + \frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1},$$

cuius termini, ubi n in exponente est, ope logarithmorum seorsim computantur.

Si vero etiam $b = a$ sit, tum fiet

$$s = \frac{ap(p^n-1)}{p-1};$$

Hinc

$$\log. s = \log. a + \log. p + \log. (p^n - 1) - \log. (p-1);$$

et

$$\log. a = \log. s - \log. p - \log. (p^n - 1) + \log. (p-1).$$

Valor ipsius n autem prodit ita:

$$s(p-1) = ap(p^n - 1);$$

hinc

$$\frac{s(p-1)}{ap} + 1 = p^n = \frac{s(p-1)+ap}{ap};$$

atque hinc log p^n, seu

$$n \log. p = \log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. ap,$$

et

$$n = \frac{\log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. a - \log. p}{\log. p},$$

ubi pro $\frac{-\log. p}{\log. p}$ potest -1 post quotum adnecti, ut fiat

$$\frac{\log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. a}{\log. p} - 1.$$

Heic patet valores ipsorum a quotannis percipiendorum ad finem anni n-ti esse $= s$. Si itaque quæratur, quantumnam aliquis in præsenti solvat, ut quotannis usque ad annum n-tum percipiat a: nonnisi valor ipsius s ad tempus præsens reducendus erit; nimirum per p^n dividi valor ipsius s debet. Aut vero quodvis a ad valorem præsentem reductus in summam colligi debet; eritque (pro a ad finem anni dato)

Hosted by Google

$$\frac{a}{p}+\frac{a}{p^2}+\frac{a}{p^3}+\ldots+\frac{a}{p^n}=\frac{a-\frac{a}{p^n}}{p-1}=\frac{ap^n-a}{p^n(p-1)}=\frac{a}{p-1}-\left(\frac{a}{p-1}:p^n\right).$$

IV. Si b non addatur, sed dematur quotannis, quæri residuum r ad finem anni n-ti potest; quo in casu erit

$$r=ap^n-\frac{pb(p^{n-1}-1)}{p-1};$$

atque pro $r=0$ et dato b quæri a potest, ut quovis anno usque ad n-tum (inclusive), ad finem cuiusvis anni b percipiatur.

V. Si pro serie

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^{12},$$

ubi $x^{12}=2$, quæratur x, adeoque ut dici solet, inter 1 et 2 quærantur 11 proportionales mediæ, *ut in musica pro temperamento æquali:* propter $x^{12}=2$ erit

$$12\log.x=\log.2$$

adeoque

$$\log.x=\frac{\log.2}{12}.$$

VI. Satis omnium constat, inventorem ludi Schach grana tritici numero

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{63}$$

postulasse; cuius seriei summa

$$=(2^{64}-1):(2-1)=2^{64}-1;$$

adeoque e numero, qui ipsi 64 log. 2 tanquam logarithmo respondet, 1 subtrahi debet.

VII. Si quid certa aliqua operatione $\frac{1}{n}$-tum sui amittat, et quodvis residuum post operationem $(m-1)$-tam pariter $\frac{1}{n}$-tum sui amittat, quæri aut

Hosted by Google

residuum post operationem m-tam aut numerus operationum pro dato residuo potest.

Sit 1 ad initium operationis primæ; erit ad huius finem

$$1 - \frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^1;$$

et si ad finem operationis $(m-1)$-tæ fiat

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1},$$

erit ad finem operationis m-tæ

$$\left(\frac{n-1}{m}\right)^m.$$

Nam

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} - \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} : n\right) = \frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}} - \frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}.\ n} =$$

$$= \frac{(n-1)^{m-1}(n-1)}{n^m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m.$$

Ita intensitas lucis radiorum parallelorum per strata æqualia euntium, intensitas caloris corporis refringentis ad finem m-ti temporis; pretium vini, si quævis operatione $\frac{1}{n}$-tum eximatur atque vas aqua repleatur, computantur.

§. 2.

Quum nec logarithmi omnium, nec logarithmis omnibus respondentes numeri, in tabulis adsint: artificiis defectus sublevatur; quorum fundamentum sequens est.

Est

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{p+q}{p},$$

si

$$u = \frac{q}{2p+q};$$

Hosted by Google

estque

$$\log.\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log.(p+q)-\log.p.$$

Hinc (pag. 187) log. nat. intelligendo

$$\log.(p+q)=\log.p+\log.\left(\frac{p+q}{p}\right)$$

$$=\log.p+2\left(\frac{q}{2p+q}+\frac{q^3}{3(2p+q)^3}+\frac{q^5}{5(2p+q)^5}+\ldots\right)$$

$$=\log.p+\frac{q}{p+\frac{1}{2}q}+\frac{2q^3}{3(2p+q)^3}+\ldots;$$

ubi iam postremus terminus si p non sit <1000, habet in denominatore ad minimum 10 loca, in quovis sequente antem ultra billionesies fit denominator maior; numerator vero, si non sit >1, aut manet aut decrescit; quivis terminus autem est maior summa omnium sequentium (pag. 187).

Hinc si p non <1000, et q non >1, incrementa ipsius p numerica (1 et f fractio vera) sunt in proportione cum incrementis logarithmicis respondentibus (cum errore exiguo): nam substituendo ipsi q prius 1, tum f, erit

$$\log.(p+1)=\log.p+\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

(præter errorem dictum), et incrementum

$$=\frac{1}{p+\frac{1}{2}};$$

$$\log.(p+f)=\log.p+\frac{f}{p+\frac{1}{2}f},$$

(item præter errorem dictum), et incrementum

$$=\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}.$$

Hosted by Google

Atque hinc proportio fit inter incrementa numeri numerum 1000 superantis, et incrementa logarithmi respondentis; nempe non est quidem

$$1:f=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}:\frac{f}{p+\frac{1}{2}f},$$

sed

$$1:f=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}:\frac{f}{p+\frac{1}{2}};$$

at vero

$$\frac{f}{p+\frac{1}{2}}-\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}=\frac{pf+\frac{1}{2}f^2-pf-\frac{1}{2}f}{p^2+\frac{1}{2}fp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}f}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{2}f}{p^2+\frac{1}{2}fp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}f}.$$

Ubi patet numeratorem esse <1, et denominatorem $>1\ 000\ 000$; si vero per *modulum* multiplicentur logarithmi naturales, ut vulgares prodeant (pag. 187), tum et ista differentia adhuc ultra bis minor fiet.

Si vero p non $<10\ 000$, patet denominatorem esse maiorem 100 millionibus.

Atque hinc reperitur ope tabularum logarithmus etiam numeri ibidem haud exstantis; ita logarithmo, qui in tabulis non adest, respondens numerus reperitur.

Nam numeri supra 10 000, incrementa 1 et f sunt (sensu dicto) uti logarithmica incrementa I et i competentia.

Hinc si quæratur logarithmus 7 689 457, atque adsit in tabulis 76 894, et sequens uno maior: est

$$7\ 689\ 457=(76\ 894,\ 57).\ 100,$$

et (pag. 109)

$$\log.7\ 689\ 457=\log.(76\ 894,\ 57)+2.$$

Itaque adhuc tantum incrementum i logarithmo ipsius 76 894 addendum quæritur: quod prodit instituta proportione

Hosted by Google

$$100 : 57 = I : i,$$

ubi i in centesimis prodit; nempe

$$i = \frac{57\,I}{100};$$

I vero est log. 76 895 — log. 76 894. Demum 2 quoque addi characteristicæ debet.

Ita si logarithmus L non exstat: subtrahitur immediate minor l ex immediate maiore L', inter quos cadit L, et subtrahitur etiam l ex L; differentia prior est I, posterior i; est vero $I : i = 1 : f$ (sensu dicto); ubi si loco 1 ponatur 100, prodit f in centesimis; quia tunc $1 = 100$ centesimis accipitur, adeoque quartus per 100 dividitur. Nempe

$$\log. N = l$$
$$\log. (N + f) = L = l + i$$
$$\log. (N + 1) = L' = l + I.$$

Sunt tabulæ in quibus I, i et f computatæ, absque calculi molestia reperiuntur.

Scholion 1. Logarithmus nonnisi ipsius 1 cum certis quotvis cifris exactus est; nempe ipsius 1 est 0, ipsius 10 est 1, ipsius 100 est 2 &c.; cuiusvis numeri alius vero logarithmus incommensurabilis est cum unitate. Sit enim integer

$$N = 10^{\frac{n}{m}}$$

erit

$$N^m = (2.5)^n.$$

Sit N imagine primorum expressum; in hac adesse oportet tam 2 quam 5, nec ullus alius primus adesse potest, et 2 toties (ex. gr. k-ies) adest quam 5, ut m-ies positum sit

$$(2^k . 5^k)^m = N^m = 2^{km} . 5^{km} = 2^n . 5^n;$$

Hosted by Google

unde sequitur

$$km = n, \text{ et } \frac{m}{n} = k \text{ integro.}$$

Itaque nonnisi potentia integra ipsius 10 idest 1 cum certo cifrarum numero habet logarithmum integrum.

Scholion. 2. Logarithmi exprimuntur fractione decimali, in tabulis vulgaribus pro denominatore 10 000 000; possunt vero quantolibet minori errore computari (pag. 187). Integer ante comma vocatur *characteristica*, notæ decimales post comma vocantur *mantissa*. Illa et negativa esse potest; uti

$$\log. \frac{2}{100} = \log. 2 - 2.$$

Scholion. 3. Quum logarithmus eo segnius crescat, quo maior est numerus, (ex. gr. ab 1000 usque ad 10 000 tantum unitate crescit); si in calculo prodierit l logarithmus characteristica k et mantissa m gaudens: quæratur mantissa m post characteristicas maximas, quæ in tabula adsunt; et si reperiatur ibidem numerus N respondens logarithmo cuius characteristica K et mantissa m est; respondebit ipsi l tanquam logarithmo $\frac{N}{10^{K-k}}$; nam

$$N = 10^{K-m},$$

et

$$\frac{10^{K-m}}{10^{K-k}} = 10^{k-m}$$

per m hic valorem characteristicæ additum intelligendo. Si vero mantissa m exacte haud reperiatur, proxime minor accipi debet; et si opus fuerit (pag. 519), quæsitum accuratius determinatur. Si proxime minor accipiatur, quæsito minus prodibit.

Hosted by Google

E.

DE METHODO HETEROGENEA IN CALCULO TRACTANDI.

Possunt quidem omnia in concreto tractari. Nempe

1. *quaelibet quantitas speciei cuiusvis determinationum* $\vdash\!\!+$, $\vdash\!\!\dashv$ *aliqua*

2. *et simul determinationum quoad realitatem aliqua affecta esse debet*: nempe quoad operationem multiplicationis operationesque inde promanantes cuivis unitas positiva aut negativa attributa sit, prouti simplicius ad scopum visum fuerit. *Duplex nempe unitatis dos est: ut quum mensura haud nominatur, ea subintelligatur positiva*; atque ut *operationibus dictis, prouti positiva vel negativa attribuitur, iuxta regulam dictam inserviat.* Ex. gr. $-\frac{2}{3}$ significat oppositum eius quod unitatis tertiam bis continet; atque si hoc per a denotetur, $-ai$ significat quantitatem eadem unitate sed negativa, quoad operationes dictas, præditam (pag. 121).

3. *Quaevis expressio ita intelligatur, ut omnium terminorum praeter zero (abstrahendo a determinatione) complexus, quantitas sit.* Ex. gr. si a spatium, b tempus, et a mult. per b sit S, atque b mult. per a sit T, et unitas spatii sit s, unitasque temporis sit t; expressio $1+abi=s+Si$ vel $t+Ti$, prouti ai per b, vel b per ai multiplicatur.

Ita si $a=2s$, $b=3t$, et $a+ab=k$; erit $2s+2.3s=8s$; et utrinque per a dividendo, erit $1+3=4$ quoad quamvis unitatem, adeoque et quoad t; eritque $t+b=4t$, et $b=3t$.

Sed simplicius fit rem ad arithmeticam puram reducendo modo sequente.

a) Quantitatum omnium, et heterogenearum, quævis Q, tali recta, eius in calculo vices gerente, expressa consideretur, quæ si unitas ipsius Q sit q, et β rectarum unitas sit, tale mensum ipsius β sit, quam Q ipsius q est.

b) Nec in calculum alia unitas præter $\pm\beta$ ulla admittatur; quasi omnes quantitates præter 0 et rectam excluderentur.

Hosted by Google

Quo pacto factum unicum, quotusque (præter 0 : 0) unicus erit, imo quantitates abstractæ, de quibus (pag. 45, 47, 48, 111, . . .) pro fundamento agere necesse fuit, in rectas mutantur.

Patet etiam: quod si prodierit ex. gr. Q (tanquam recta eius vices gerens) $= 2\beta$, sit Q ipsum $= 2q$.

4. Expressio per rectas utvis heterogeneorum (in idea magis intelligenda) haud innuit operationes mere geometricas: addit quidem Geometria rectam continuando, subtrahit resecando, et rectarum a, b (etsi utraque incommensurabilis fuerit) tam factum quam quotum imo et a^c pro

$$c = \frac{n}{2^m}$$

et n, m integris, exacte exhibet. Imo et quod mensuratum datur, recta exprimere valet, unitatem dividendo partesque accipiendo; conversimque rectam quoad unitatem mensurare potest, atque ubi exactum haud præbet (ex. gr. dum mensurationem finire nequit aut pro alio c) errore quantumvis exiguo approximat. Arithmetica vero, si rectarum utraque incommensurabilis fuerit, factum earum quoque nonnisi approximare valet, uti radicem quadraticam binarii geometrice prodeuntem; imo nisi mensurata dentur, prorsus hæret, uti Geometria sine unitate in omnibus operationibus a mensuratione quoad unitatem promanantibus.

Sit exemplum pro resultato operationum cum heterogeneis ad rectas reductis susceptarum. Si x et y heterogenea fuerint, et

$$y = k \quad \text{pro} \quad x = 1$$

ac

$$y = qk \quad \text{pro} \quad x = q,$$

tum y, ut quantitas respectiva quoad valorem k eius pro $x = 1$, dicatur z, atque unitas huius z vel uti quantitatis respectivæ quoad k, unitas huius k sit, sed in tali ab x dependentia, ut pro $x = 1$ et $y = 1$ fiat: tum semper

$$y = zx, \quad x = \frac{y}{z}, \quad z = \frac{y}{x}.$$

Talia sunt *celeritas* quoad spatium sub temporis unitate æquabiliter

Hosted by Google

percursum, *densitas* quoad massam sub voluminis unitate, *pretiositas* quoad pretium unitatis mercium certarum, &c.

Et sit spatium S, tempus T, celeritas C, spatiique unitas sit U, temporis τ et T ex. gr. sit $\frac{2\tau}{3}$; exprimetur hoc per rectam $\frac{2U}{3}$; et si

$$C = \frac{7U}{5},$$

fiet $S = C$ per T (non T per C) multiplicato, atque $\frac{S}{C}$ = ipsum T repræsentanti $\frac{2U}{3}$, quod reversum fit $\frac{2\tau}{3}$. Notandum in utroque casu T esse multiplicatorem, cuius resultatum nonnisi ab eo pendet quale suæ unitatis mensum sit; si vero factores rectæ fuerint, permutari possunt.

Area per rectanguli altitudinis $U = 1$, soliditas per parallelopipedi quadrato ipsius U insistentis longitudinem, ut recta exprimitur: adeoque unitas areæ erit quadratum et soliditatis unitas cubus ipsius U erit. Et hinc quum parallelogrammum altitudinis a baseos b in rectangulum altitudinis U mutari possit, patet rectam ab aream exhibere, — pariterque rectam e tribus rectis prodeuntem soliditatem exprimere.

Hosted by Google

F.

DILUCIDATIO QUORUNDAM CONCEPTUUM IN SECTIONE PRIMA TRADITORUM.

§. 1.

Generalissima proportionis, si ita extendere libeat, definitio, quam et quantitates quævis sub formam $A+B\sqrt{-1}$ cadentes ingredi queant, nonnisi *divisionis absolutae* conceptu stabilito dari potest.

§. 2.

Quantitatum prius duæ determinationes nempe $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!\dashv$ considerabantur, quibus postmodum item duæ, nempe realitas quoad $+1$ et realitas quoad -1 accesserunt (pag. 121).

Potest vero idem realitatum conceptus aliter quoque exponi. Multiplicatio divisioque tam quoad $+1$ quam quoad -1 peragi potest, omniaque et operatione quoad -1 facta (mutatis mutandis) æque prodeunt. Ex. gr. si quæratur spatium S tempore T celeritate C percursum, prodibit $S=C$ per T quoad $+1$ multiplicato (pag. 48); idemque est $=C$ per $-T$ quoad -1 multiplicato, essetque

$$S=-C.T$$

multiplicatione quoad -1 facta. Ne tamen semper commemorandum sit, quoad quodnam ipsorum $+1$ et -1 fiat operatio, nec formulæ nunc quoad unitatem positivam, mox quoad unitatem negativam tractatæ implicentur: eadem unitas quoad signum etiam servatur pro omnibus, atque tacite quantitati cuilibet $+1$ data est, nisi expresse monitum fuerit cuipiam -1 tribui. Nimirum quantitas quævis concipiatur unitate certa gaudens, quæ illi quoad casum operationum multiplicationis divisionisque attribuatur. Manifesto prouti quantitati unitas positiva vel negativa tribuitur, duæ determinationes diversæ, resultataque diversa parientes oriun-

Hosted by Google

tur; adeoque possent ea quæ antea realia quoad $+1$ dicta sunt, quantitates *unitate positiva*, et realia quoad -1, *unitate negativa praedita* vocari; at propter nomenclationem breviorem denotatio prior manere potest, aut prius *reale* posterius *pure imaginarium* dici (pag. 121).

Hinc si tale x quæratur, ut

$$x.x = -4 \quad \text{vel} \quad 3x.x = -4$$

sit, x impossibile esse nihil aliud significat nisi inter quantitates unitate positiva præditas tale x non dari, et nonnisi inter unitate negativa præditas esse. Ita si fiat

$$y = \sqrt{x-a}$$

in Geometria, et quantitates unitate positiva præditæ sint, adeoque operationes quoad $+1$ fiant: ordinata y (positiva vel negativa) nonnisi tunc accipitur, dum expressio dicta valorem habebit. Poterunt autem (pag. 202) ordinatæ aliæ quoque colore vel alio quopiam modo a prioribus distinctæ intuitui exhiberi, si $\sqrt{x-a}$ pro quantitatibus unitate negativa præditis accipiatur.

§. 3.

Atque iam multiplicatione et divisione, in *respectivam* quoad ± 1, et *absolutam* (absque mentione respectus quoad ± 1) distincta: prius respectiva, tum absoluta, et demum proportio stabilitur. Si definitiones pag. 75 traditæ ad multiplicationem divisionemque restringantur, denotetque A terminus primus unitatem positivam vel negativam; et quodvis sequentium trium terminorum B, C, D purum reale sit (aut quoad $+1$ aut quoad -1), sintque A et B homogenea, aut alterutrum 0 sit, pariter C et D; atque abstrahendo ab omni determinatione:

1. *Pro quovis nomine numerico* n, pro quo est

$$A = nu, \quad \text{et} \quad C = nv;$$

sit, m nomen numericum denotante,

$$B = mu + \omega,$$

Hosted by Google

et

$$D = mv + \lambda,$$

ubi $\omega = 0$ vel $\lessdot u$ et $\lambda = 0$ vel $\lessdot v$; quod alteri definitioni ibidem datæ æquivalet; nempe quod si pro quovis dicto n, nec u a B pluries, quam v a D, neque v a D pluries quam u a B contineatur.

2. Si (pag. 122) tam respectu determinationum ⊢⊣ et ⊢⊣, quam respectu determinationum realitatis quoad $+1$ et -1; dum A et B eiusdem determinationis fuerint, et C ac D sint determinationis eiusdem; si vero A et B determinationis diversæ fuerint, et C ac D determinationis diversæ sint: tum dicitur C per B *respective quoad* A *multiplicatum*, et D per B vel C *respective quoad* A *divisum* esse; atque D *factum quoad* A, *et in casu priore* C *quotus quoad* A, *in posteriore vero* B *quotus quoad* A dicitur.

Pro casu incommensurabilitatis patet iuxta (pag. 35): quod si n semper porro uno crescat, cuivis n suum m respondeat; adeoque ipso n in serie numerorum naturalium crescente, certa m pro certis B et D eadem se invicem excipiant.

Scholion. *Pluries contineri* autem dicitur ex. gr. v a D quam u a B, si

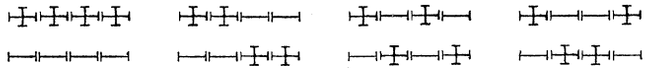
$$B = mu, \quad \text{vel} \quad B \gtrdot mu \quad \text{sed} \quad mu + u \gtrdot B,$$

atque D (vel eius portio) sit terminus seriei numerorum ipso mv ulterior, nec sit simul $D = mv$, uti si

$$v = 0 = D.$$

§. 4.

Determinationes ⊢⊣ et ⊢⊣ dant octo casus et totidem darent determinationes realitatis, si et unitas pure imaginaria admitteretur; nempe si r reale, et i pure imaginarium denotet, fient schemata sequentia:



$r\ r\ r\ r$	$r\ r\ i\ i$	$r\ i\ r\ i$	$r\ i\ i\ r$
$i\ i\ i\ i$	$i\ i\ r\ r$	$i\ r\ i\ r$	$i\ r\ r\ i$

Hosted by Google

Sed si pure imaginariam unitatem admittere haud libeat, nonnisi tres superiores lineæ manebunt.

Patet vero ex ipsis schematibus (etsi admitteretur unitas pure imaginaria):

1. terminos extremos in quovis casu esse determinationis eiusdem, si medii eiusdem fuerint; et extremos diversæ esse, si medii diversæ fuerint. Pariter si duo priores determinationis eiusdem fuerint, esse et duos posteriores eiusdem; si vero diversæ fuerint priores, et posteriores diversæ esse.

2. Terminum tertium per secundum in linea suprema quoad $+1$, in sequente quoad -1 multiplicari; unde etiam ex iisdem schematibus divisio quoad $+1$ et -1 patet, si quartus dividendus, et alteruter mediorum divisor fuerit.

Patetque in omni casu, in linea suprema in multiplicatione divisioneque determinationes easdem dare $\vdash\!\dashv$, diversas dare $\vdash\!\!-\!\!\dashv$; in linea secunda autem determinationes easdem dare $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, diversas dare $\vdash\!\dashv$: atque hinc pronam ad signa $+$, $-$ esse conclusionem (pag. 121 et 42); facta quotosque quoad $+1$ gaudere signo $+$ pro signis æqualibus, et signo $-$ pro signis diversis; quoad -1 autem signa æqualia dare $-$, et signa diversa dare $+$.

3. Pariter vero quoad determinationes realitatis, e linea tertia, in qua terminus primus reale quoad $+1$ est (sive $+1$ sive -1 fuerit), patet: quod si *factores quoad realitatem determinationis eiusdem fuerint, factum reale quoad* $+1$, *si diversae determinationis fuerint, factum reale quoad* -1 *sit. Eadem*, ex eadem linea, *regula divisionis* patet; nempe quod dividendo in locum quartum posito, si dividendus et divisor determinationis quoad realitatem eiusdem fuerint, quotus realis quoad $+1$, si vero determinationis diversæ fuerint, quotus realis quoad -1 sit.

Hosted by Google

§. 5.

Sed quum certis quantitatibus unitatem positivam, item certis quibuslibet negativam attribuere fas sit: quæstio exoritur, quomodo et connexæ (adinstar determinationum ⊢⊣, ⊢⊣), tractari possint? ut operationes quoque, absque eo ut respectivæ operationis quoad $+1$ vel -1 mentio fieri debeat, *absolute* peragerentur lege tali stabilita, ut omnia rite conveniant. Quem in finem *ponitur lex sequens* (pag. 122).

1. Quandocunque saltem alteruter duorum factorum unitate positiva gaudet, factor unitate positiva gaudens ponatur pro multiplicatore; et tunc (atque nonnisi tunc) sit multiplicator unitate negativa gaudens, dum duorum factorum uterque negativa unitate gaudet: nempe in lineæ tertiæ nonnisi schemate quarto debet necessario -1 loco primo stare, quum neuter factorum positiva unitate gaudeat; nec aliter -1 ex $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$ multiplicato prodeat.

2. Si A et a quantitates unitate positiva, et B ac b unitate negativa præditæ fuerint: dicitur $A+B$ per $a+b$ *absolute multiplicari* (absque mentione operationis respectivæ quoad $+1$ vel -1); si tam A quam B, tam per a quam per b multiplicetur (iuxta legem dictam); atque si in omnibus his factis partialibus, quæ hoc pacto prodierunt, summa quantitatum unitate positiva præditarum sit S, et summa unitate negativa præditarum sit s; dicitur $S+s$ (idest S cum s connexum sed non commixtum) *factum, sensu absoluto.*

Et si $x=x'$ *vel* $x \backsim x'$, *et* $y=y'$ *vel* $y \backsim y'$, *et* $x'y'=k$ *vel* $x'y' \backsim k$, *dicitur etiam* k *factum ex* x *et* y (pag. 46 et 85).

Unde conceptus divisionis patet, nempe quilibet e duobus factoribus dicitur quotus e facto per factorem alterum diviso.

§. 6.

Atque iam conceptu hoc *divisionis absolutae* stabilito, fas est et proportionis conceptum eatenus extendere: nimirum α, β, γ, δ dicuntur

Hosted by Google

in proportione esse, si quotus ex α per β diviso sit quoto ex γ per δ diviso æqualis (divisionem absolutam intelligendo); excepto casu, si α per β iuxta regulam quoad ± 1, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi deberet, quo in casu divisio expresse contra regulam quoad idem sive $+1$ sive -1 suscepta intelligatur.

Patet in lineæ tertiæ (pag. 526) schematibus tribus prioribus, multiplicationem divisionemque quoad $+1$ fieri (per legem 1), quum detur factor realis, et nonnisi in schemate quarto quoad -1 peragi; patetque determinationes realitatis æquales dare reale, et diversas dare pure imaginarium.

§. 7.

Si vero quantitates sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes pro casu, dum nec $a=0$ neque $b=0$ est, considerentur, et *quantitas* talis *mixta* dicatur: *mixtum et reale purum* (sive quoad $+1$ sive quoad -1) *tam in multiplicatione quam in divisione dabit mixtum*, *mixtum per mixtum* autem *dat mixtum*, *in certis casibus et reale purum quoad* $+1$ *vel quoad* -1 *dare potest.* Uti e schematibus sequentibus patet pro A, B, a, b realibus quoad $+1$:

$$(a+b\sqrt{-1})A=aA+Ab\sqrt{-1},$$
$$(a+b\sqrt{-1})B\sqrt{-1}=aB\sqrt{-1}-bB,$$
$$(a+b\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})=aA+Ab\sqrt{-1}+aB\sqrt{-1}-bB.$$

In casu postremo fiet factum $-C$ pro quovis reali C, si accipiatur

$$A=\frac{aC}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{-bC}{a^2+b^2};$$

ita factum $=C\sqrt{-1}$ erit, si accipiatur

$$A=\frac{bC}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{aC}{a^2+b^2};$$

nempe in casu priore debet esse

$$aB+bA=0 \quad \text{et} \quad aA-bB=C;$$

Hosted by Google

in posteriore vero

$$aA - bB = 0, \quad \text{et} \quad aB + Ab = C;$$

atque valores dicti ipsorum A et B e duabus æquationibus in casu utroque reperiuntur. Et plane ita pro quibusvis realibus R et r reperiuntur talia A et B, ut factum dictum fiat

$$= R + r\sqrt{-1},$$

nempe tum debet esse

$$aA - bB = R, \quad \text{et} \quad aB + Ab = r;$$

unde pariter prodeunt A et B.

Prona hinc ad divisionem conclusio est. Nempe si reale (sive quoad $+1$ sive quoad -1) per mixtum non mixtum daret, prodiret reale vel quoad $+1$ vel quoad -1; hoc vero per divisorem daret mixtum, adeoque dividendus haud prodiret. Pariter nisi mixtum per reale (quoad ± 1) divisum mixtum daret, quotus per divisorem multiplicatus haud produceret dividendum mixtum. Et pariter de mixto per mixtum patet, pro quibusvis quoad $+1$ realibus C, R, r, posse A et B ita eligi, sive ut

$$\frac{R + r\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1},$$

sive ut

$$\frac{R + r\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}} = C,$$

sive ut sit

$$= C\sqrt{-1}.$$

Ex. gr. pro

$$R + r\sqrt{-1} = AC + BC\sqrt{-1}$$

fiet

$$R = AC \quad \text{et} \quad r = BC,$$

eritque

$$A = \frac{R}{C} \quad \text{et} \quad B = \frac{r}{C}.$$

Ut vero $C\sqrt{-1}$ prodeat, esse debet

$$R + r\sqrt{-1} = AC\sqrt{-1} - BC,$$

Hosted by Google

adeoque

$$R = -BC \quad \text{et} \quad r = AC$$

et hinc

$$A = \frac{r}{C}, \quad \text{et} \quad B = -\frac{R}{C}.$$

§. 8.

E clausula definitionis multiplicationis absolutæ (pag. 528), unde etiam conceptus *divisionis absolutae* deducitur ibidem, sequitur pro a et b neutro $= 0$:

I. $\frac{1}{m} . ma$ semper $= a$; et hinc si $m \backsim \infty$, adeoque $ma \backsim \infty$ et $\frac{1}{m} \backsim 0$, fiet

$$0 . \infty = a,$$

atque

$$\frac{a}{0} = \infty, \quad \text{et} \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

II. Semper est $ma = ma$; sed si $m \backsim \infty$, $ma \backsim \infty$ (pag. 35) adeoque

$$\infty . a = \infty \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{a} = \infty, \quad \text{atque} \quad \frac{\infty}{\infty} = a$$

quantitati cuilibet, uti $\frac{0}{0}$.

III. Etsi a incommensurabile fuerit, ex. gr.

$$a = mu + \omega, \quad (\omega \lessdot u),$$

erit semper $mu . 0 = 0$, adeoque quum si $m \backsim \infty$,

$$mu \backsim a,$$

fiet

$$a . 0 = 0.$$

Hinc autem (per definitionem proportionis pag. 528 § 6.) oriuntur proportiones sequentes, paulo inferius applicandæ

Hosted by Google

$$1 : a = 0 : 0$$
$$a : \infty = b : \infty$$
$$\infty : a = \infty : b$$
$$\infty : \infty = 0 : 0$$

§. 9.

Superius (pag. 526) in proportione, ubi nonnisi quantitates pure reales quoad ± 1 sunt, quas hic brevitatis caussa *puras* nominare fas sit, patebat, quod si *termini extremi determinationis eiusdem* fuerint (sive quoad $\vdash\!\!\dashv$ et $\vdash\!\!\dashv$ sive quoad realitatem), et *medii* determinationis *eiusdem* sint; at si *extremi diversae* determinationis fuerint, et *medii diversae* sint. *Idemque valet de duobus prioribus, et duobus postremis.*

Et nunc adhibitis mixtis quoque lex analoga valet: nempe *si extremorum utrumque mixtum vel utrumque purum fuerit, erit et mediorum aut utrumque purum aut utrumque mixtum; si vero extremorum alterutrum purum, alterum mixtum fuerit, et mediorum alterum mixtum alterum purum erit. Idemque valet de duobus prioribus et duobus posterioribus.*

Proportionis casus, quos mixtum ingreditur, sequentes sunt, in quibus quoti æquales esse possunt, si P purum, M mixtum denotet; neque aliud heic in censum venit, adeoque per easdem literas haud intelliguntur quantitates æquales.

PPMM	*PMPM*	*PMMP*	
MPMP	*MPPM*	*MMPP*	*MMMM*

Nempe ex §. 7. patet, nonnisi in quovis horum casuum quotos e primo per secundum, atque e tertio per quartum æquales esse posse, *excepto, si duorum priorum aut duorum posteriorum alterutrum purum alterum mixtum et reliqua mixta fuerint:* ex. gr. pura per puram divisa puram dat, atque et mixta per mixtam dare puram priori æqualem potest; mixta per puram, pura per mixtam dat mixtam &c.

Quoad casum $RIMM$ (ubi R reale, I pure imaginarium denotat), sit ex. gr.

Hosted by Google

$$1 : \sqrt{-1} = (a+b\sqrt{-1}) : (-b+a\sqrt{-1}) :$$

nempe quotus uterque est $-\sqrt{-1}$; prior prodit divisione (per pag. 527) quoad -1, et in posteriore divisor per $-\sqrt{-1}$ multiplicatus producit dividendum; estque etiam factum extremorum facto mediorum æquale, nempe $= -b + a\sqrt{-1}$.

Unum adhuc casum notare licet; nempe

$$R : I = I : R,$$

ubi R per I quoad -1, et I per R (iuxta regulam) quoad $+1$ divideretur; ex. gr. pro

$$-1 : \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} : -2,$$

quotus uterque, si divisio utraque quoad -1, aut utraque quoad $+1$ peragatur, idem erit; nempe

$$\frac{-1}{\sqrt{-1}} \text{ (quoad } -1) = \sqrt{-1},$$

et

$$\frac{2\sqrt{-1}}{-2} \text{ (quoad } -1) = \sqrt{-1},$$

quia -2 per $\sqrt{-1}$ (quoad -1) multiplicando fit $2\sqrt{-1}$. Ita

$$\frac{-1}{\sqrt{-1}} \text{ (quoad } +1) = -\sqrt{-1} = \frac{2\sqrt{-1}}{-2} \text{ (quoad } +1).$$

Ita factum extremorum facto mediorum nonnisi ita erit æquale, si quoad idem ± 1 fiat multiplicatio; secus

$$-1 \,.\, -2 \text{ (quoad } +1) = +2,$$

et

$$\sqrt{-1} \,.\, 2\sqrt{-1} \text{ (quoad } -1) = -2$$

erit.

Nempe (si $\sqrt{-1}$ per $\pm i$ denotetur), schemata divisionum multiplicationumque dictarum erunt sequentia.

Pro

$$-1 : \pm i, \quad \text{et} \quad \pm 2i : -2$$

Hosted by Google

(utroque quoad -1)

$$-1,\ \pm i;\ \pm i,\ -1 \quad \text{et} \quad -1,\ -2;\ \pm i,\ \pm 2i.$$

Pro divisione eorundem quoad $+1$

$$+1,\ \pm i;\ \mp i,\ -1, \quad \text{et} \quad +1,\ -2;\ \mp i,\ \pm 2i.$$

Pro multiplicatione eorundem quoad $+1$

$$+1,\ -1;\ -2,\ +2, \quad \text{et} \quad +1,\ \pm i;\ \pm 2i,\ +2.$$

§. 10.

Pariter operationibus tam divisionis quam multiplicationis quoad idem ± 1 peractis, e quibusvis reperitur quartus *in concreto* iuxta regulam sequentem: si *quilibet duorum priorum socius alterius*, et pariter vocetur *quilibet postremorum;* atque *quilibet extremorum dicatur par alterius*, et pariter *quilibet mediorum; prodibit terminus quaesitus* x, *si socio carens multiplicetur per quotum, qui prodit, si terminus par socio carentis, per pari carentem dividatur.*

Quæsitum x aut quartum aut tertium aut secundum aut primum locum tenet: estque

$$x = D = \frac{B}{A} \cdot C = \frac{D}{C} \cdot C;$$

pro $x = C$ vero est

$$\frac{A}{B} D = \frac{C}{D} D \&.$$

Quum reliqua facile pateant, unum tantum casum (pag. 533) adferre sufficiat. Sit nempe

$$-1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1,$$

et quæratur quartus: erit

$$x = \frac{\sqrt{-1}}{-1} \cdot \sqrt{-1},$$

tam divisione quam multiplicatione quoad idem ± 1 facta; iuxta schemata sequentia

Hosted by Google

$$-1,\ -1;\ +\sqrt{-1},\ +\sqrt{-1},$$

ubi

$$+\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}\ (\text{quoad } -1);$$

et

$$-1,\ +\sqrt{-1};\ +\sqrt{-1},\ -1;$$

ubi per quotum priorem, $\sqrt{-1}$ multiplicatum quoad -1 dat factum -1. Idem quoad $+1$ prodit per

$$+1,\ -1;\ -\sqrt{-1},\ \sqrt{-1},$$

et

$$+1,\ -\sqrt{-1};\ +\sqrt{-1},\ -1.$$

Omnia vero quoad determinationes, sive quoad $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!-$, sive quoad realitatem, rite prodire e præmissis liquet.

§. 11.

Operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque resultata unica esse, præter $\frac{0}{0}$, demonstratum in sectione prima est: aliquod tamen, quoad *quotum e concreta per concretam homogeneam*, quem *utcunque mutata unitate eundem manere* dictum (pag. 112) est, lumen affundere libet.

Sit linea b per lineam a dividenda, sitque

$$b=2v,\quad a=3v;$$

dictum est, quod si divisor in locum tertium ponatur, quotus sit quantitas quælibet, quæ quoad unitatem suam expressa $\frac{2}{3}$ est (pag. 45).

Si vero divisor in locum secundum ponatur, *quotus* loco tertio prodibit, ac *nonnisi linea erit*; et prouti unitas linearum accipietur, dato quovis maior minorve prodire poterit. Omnes tamen hi quoti innumerabiles cum prioribus innumerabilibus in eo convenient, quod et quotorum posteriorum quilibet quoad suam unitatem (quæcunque fuerit) $\frac{2}{3}$ erit, adeoque *aequalitate ista respectiva omnes aequales erunt*; atque quum in hoc casu nonnisi expressio quoad unitatem (ut quantitas abstracta)

Hosted by Google

pro quoto accipiatur, (haud respiciendo ad speciem unitatis) *resultatum divisionis in hoc casu quoque unicum est.*

Nempe sit U linearum unitas, atque a et b quoad eam expressa reducantur ad denominatorem communem n; sitque

$$a = \frac{3U}{n}, \quad b = \frac{2U}{n}$$

fiatque schema utrumque (quoto x dicto); erit

$$U = n \cdot \frac{U}{n}, \; a = 3 \cdot \frac{U}{n}; \quad x = n \cdot \frac{2U}{3n}, \; b = 3 \cdot \frac{2U}{3n};$$

et

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3}, \; x = 2 \cdot \frac{1}{3}; \; a = 3 \cdot \frac{U}{n}, \; b = 2 \cdot \frac{U}{n}.$$

Patetque in utroque esse $x = \frac{2}{3}$ quoad unitatem.

§. 12.

Conceptum *potentiae elementaris* ad exponentem imaginarium extendere frustra tentans, meris imaginibus obiecto haud gaudentibus minime contentus, sensum eiusmodi expressionum nonnisi modo in (pag. 193) exposito reperire potui; quod tamen multo brevius exprimi sic potest.

Functionis ipsius β sequentis,

$$1 + \frac{\beta}{1} + \frac{\beta\beta}{1.2} + \frac{\beta\beta\beta}{1.2.3} + \cdots$$

valor, nempe cui series dicta æqualis est, aut ad quem tanquam limitem tendit, dicatur $f(\beta)$; ita ut sit

$$f(k) = 1 + k + \frac{kk}{2} + \frac{kkk}{2.3} + \cdots$$

et

$$f(kh) = 1 + kh + \frac{kh.kh}{2} + \frac{kh.kh.kh}{2.3} + \cdots$$

Quo pacto *definitio potentiae*, *radicis*, *logarithmique*, *sensu sublimiori*, breviter ita exprimi potest: Pro quovis tali c, ut $f(c)$ eidem C

Hosted by Google

æquale sit, dicitur quodvis $f(bc)$, et nonnisi id, *potentia exponentis* b ipsius C, per C^b denotata, et b dicitur cuiusvis C^b *logarithmus* quoad C, quidvis formæ $A+B\sqrt{-1}$ sit sive c sive b, A et B realia quævis, inter quæ et 0 cadit, denotantibus.

Dicitur præterea C *radix* exponentis b cuiusvis C^b, imo et quodvis tale a, ut pro certo k sit $a^k = K$, dicitur *radix exponentis* k ipsius K. Ex. gr. Sint X, Y, Z tres radices cubicæ ipsius 8; reperiuntur per (pag. 198) talia x, y, z, ut sit

$$f(x) = X, \quad f(y) = Y, \quad f(z) = Z.$$

Eritque

$$f(3x) = X^3 = 8 = f(3y) = f(3z).$$

Sit c nomen generale ipsorum $3x$, $3y$, $3z$, sitque

$$b = \frac{1}{3}.$$

Pro quovis c erit

$$f(c) = 8, \quad \text{et} \quad f\left(\frac{c}{3}\right) = f(bc)$$

$= 8$ elevato ad $\frac{1}{3}$; nempe

$$f(x), \quad f(y), \quad f(z)$$

erunt potentiæ exponentis $\frac{1}{3}$ ipsius 8; eritque 8 radix exponentis $\frac{1}{3}$ cuiusvis earum, et $\frac{1}{3}$ logarithmus quoad 8 eorundem cuiusvis. Sit iam

$$c = x, \quad \text{et} \quad b = 3;$$

erit

$$f(bc) = 8 = (f(x))^3;$$

atque

$$f(x) = \sqrt[3]{8};$$

sed etiam

$$(f(y))^3 = 8 = (f(z))^3;$$

adeoque

$$f(x), \quad f(y), \quad f(z)$$

radices exponentis 3 ipsius 8 dicuntur. Estque 3 logarithmus ipsius 8 quoad quodvis ipsorum

$$f(x), \quad f(y), \quad f(z).$$

Hosted by Google

Scholion. Potuissent quidem, iam in ortu conceptus multiplicationis, non solum imaginariorum, sed et potentiæ & conceptus (plane expositi) construi: nisi alienum simplicitati naturali esset, ad conceptus constructionem talia adhibere, quæ nonnisi ulterius patefiunt. Nempe nonnisi id quod per $f(k)$ antea intelligebatur, construi debet: nimirum ponatur prius 1, et cuilibet termino adiungatur unus factor k, atque termino cuivis detur pro denominatore factum e numeris naturalibus ab 1 incipiendo usque ad numerum summum ipsorum k in termino illo.

At prius, factum e factoribus æqualibus numero n, per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari cœpit; tum ad quotum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n, inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere positive, inferiorum vero negative, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m}, et $\frac{A^N}{A^M}$ intelligere per A^{N-M}. Sit

$$n-m=\nu, \quad \text{et} \quad N-M=\mu.$$

Passus ulterior erat, duos eiusmodi quotos nempe a^ν et A^μ æquales cogitare, et per $a^{\frac{\nu}{\mu}}$ designare tale A, ut sit

$$a^\nu = A^\mu.$$

Nec post (pag. 532) dicta, $\mu=0$ excluditur: nam

$$a^1 = A^0 = 1, \quad \text{et} \quad 1^{1:0} = A,$$

Ita

$$a^0 = A^0,$$

et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore A.

Postea (pag. 182) innotuere pro realibus b et c sequentia. Sit $(1)=$ reali positivo e, tunc

$$\begin{aligned} f(c) &= e^c \\ f(b+c) &= e^b \,.\, e^c\,, \\ f(c-b) &= e^c : e^b\,, \\ f(b\,.\,c) &= (e^c)^b\,, \\ f(c:b) &= \sqrt[b]{e^c}\,; \end{aligned}$$

Hosted by Google

darique tale x, ut

$$f(x) = b + c\sqrt{-1}$$

sit, etsi $c = 0$ et b negativum fuerit; nempe si (pag. 198) a tale sit, ut $\cos. a = -1$ et $\sin. a = 0$ sit. Atque tunc iam in mentem venire poterat ipsis b, c imaginaria quoque substituere.

Definitio hic data eadem cum pag. 193 data est: nisi quod hæc et simplicior sit et ibidem dictum 1^r supervacuum reddat; monendumque fuisset $r+i$ ad denominationem eandem reducta intelligenda esse: nempe si ex. gr. (pro integris n, m, v) sit

$$A = \frac{n}{m}, \qquad B = \frac{v}{m},$$

erit

$$A + B\sqrt{-1} = \frac{n+v\sqrt{-1}}{m}$$

adeoque

$$f\left(\frac{n+v\sqrt{-1}}{m}\right) = \sqrt[m]{f(n+v\sqrt{-1})}$$

cuius valores numero m sunt, quos valor quivis per valores ipsius $\sqrt[m]{}$ multiplicatus omnes exhibet.

Hosted by Google

G.

RELATIO BREVIS ADDITAMENTI ANTECEDENTIS.

I. Cuilibet quantitati tribuatur unitas positiva vel negativa (quoad operationes statim dicendas); et illi, de qua expresse non dicitur ei negativam tribui, positiva unitas attributa sit. Unitate positiva præditæ illæ erunt, quæ *realia* vocantur, et negativa præditæ erunt eæ, quæ *pure imaginariae* dicuntur; quæ nomina consveta et hic retinentur, atque duæ hæ determinationes *determinationes realitatis* dicantur. Realia et pure imaginaria, determinatione sive ⊢⊣ sive ⊢⊣ affecta, dicantur *quantitates purae.*

II. *Definitio proportionis* (inter plures *Sect.* I. datas) ibidem (pag. 75) est sequens: A, B, C, D *in proportione* esse dicuntur *(abstrahendo ab omni determinatione) si pro quovis tali* n (nomine numerico), *ut* $A = nu$, $C = nv$ *sit*; *nec* B *ipsum* u *pluries, quam* D *ipsum* v, *neque* D *ipsum* v *pluries, quam* B *ipsum* u *contineat.*

Si iam conceptus hic ad casum $A = \pm 1$ *restringatur; atque accedat: quod tam respectu determinationum* ⊢⊣, ⊢⊣, *quam respectu determinationum realitatis; dum* A *et* B *determinationis eiusdem sunt, et* C *ac* D *sint eiusdem; si vero* A *et* B *determinationis diversae fuerint et* C *ac* D *diversae sint: tum dicitur* D *factum ex* C *per* B (quoad ± 1) *multiplicato;* operatio autem dicitur *multiplicatio* (uti etiam *divisio* inde oriunda) *respectiva* quoad ± 1.

Quo pacto 8 schemata oriuntur ex ⊢⊣, ⊢⊣, et totidem e duabus realitatis determinationibus: e quibus schematibus patet, *quod etiam termini extremi determinationis eiusdem siut, si medii determinationis eiusdem fuerint;* imo ex iisdem patet, *tam in multiplicatione quam in divisione, si quoad* $+1$ *peragatur,* ⊢⊣ *et* ⊢⊣, necnon ⊢⊣ et ⊢⊣, dare ⊢⊣, at ⊢⊣ et ⊢⊣ dare ⊢⊣; et rem inverse quoad -1 esse, *(unde prona ad*

Hosted by Google

signa $+$, $-$ *conclusio est); determinationes item quoad realitatem aequales dare reale, diversas autem dare pure imaginarium.*

III. Prouti quantitates determinationibus $\vdash\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\dashv$ affectæ connectuntur, atque ita tractantur: ultro venit, et determinationibus quoad realitatem affectas connectere, atque talem legem statuere; ut *omnes operationes* (absque mentione facta quoad $+1$ vel -1) *absolute peragantur:* eaque fit sequens

1. Ut *si alteruter duorum factorum unitate positiva gaudeat, factor unitate positiva gaudens ponatur pro multiplicatore; et si uterque unitate negativa gaudeat, tunc sit multiplicator unitate negativa gaudens.*

2. Si A et a quantitates unitate positiva, et B ac b unitate negativa gaudeant: dicatur $A+B$ *per* $a+b$ *absolute multiplicari;* si tam A quam B, tam per a quam per b respective iuxta legem priorem multiplicentur; atque si in his factis summa realium sit S, summa pure imaginariorum sit s, dicatur $S+s$ (id est S cum s, connexum sed non commixtum) *factum (sensu absoluto).*

Atque hinc *divisionis absolutae* conceptus patet: nempe si $P.Q=F$, dicitur Q *quotus* ex F diviso per P.

Extenditur etiam *multiplicatio* absoluta (iuxta pag. 46); atque hinc etiam *divisio absoluta.*

Hinc si quotus ex α per β diviso sit æqualis quoto ex γ per δ (divisionem absolutam intelligendo): dicuntur α, β, γ, δ (sensu generalissimo) in *proportione esse:* notando quod in casu ubi α per β quoad ± 1, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi iuxta regulam deberet; expresse contra regulam quoad idem ± 1 dividenda sint.

IV. Quantitates sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes dicantur *mixtae, dum nec* a *nec* $b=0$ est: *dabitque* tam in multiplicatione quam divisione, *purum per purum, purum; purum per mixtum, sive mixtum per purum, dabit mixtum; mixtum per mixtum autem dat in certo casu purum, in alio mixtum.*

Hosted by Google

V. Patet autem (uti in schematibus multiplicationibus divisionisque) *in proportione quoque: quod si duo priores determinationis eiusdem fuerint sive quoad* ⊢⊣, ⊢⊣, *sive quoad realitatem; et duo posteriores eiusdem sint; si non, non; et pariter si extremi eiusdem fuerint, et medii eiusdem sint, si non, non; et pariter si extremorum utrumque mixtum, vel utrumque purum fuerit, et mediorum aut utrumque purum, aut utrumque mixtum sit; si vero extremorum alterutrum mixtum alterum purum fuerit, et mediorum alterutrum purum, alterum mixtum sit; atque idem de duobus prioribus, et duobus posterioribus valeat.*

VI. Præterea *de resultato divisionis unico, dum concreta per concretam dividitur*, additur aliquid: nempe divisor tam secundum quam tertium locum occupare potest: eodemque sensu si *divisor fractio vera sit, quotus in casu utroque maior dividendo est.*

VII. De *reperiundo e quibusvis tribus proportionis terminis, quarto (in concreto);* et *de facto extremorum = facto mediorum, quoad idem* ± 1 *accipiendo.*

VIII. Conceptus *potentiae, radicis, logarithmique* (pag. 193) traditus simplicius exponitur. Nempe statim post conceptum multiplicationis, series talis construi potest, cuius terminus primus sit $\frac{1}{1}$, et e quovis termino ea lege oriatur sequens; ut numeratori postponatur k ut factor, et denominatori numerus is, quo k ut factor in novo numeratore est, postponatur: quo pacto series

$$1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.34} + \cdots$$

orta, si fuerit = aut ∽ K, exprimatur valor huius seriei per $f(k)$.

Atque pro quovis tali c, ut $f(c)$ eidem C æquale sit, dicatur quodvis q) (ℴ𝑓 (et nonnisi id) *potentia exponentis b ipsius C*, per C^b denotata; et b dicatur cuiusvis C^b *logarithmus quoad C*, quidvis sub formam $A + B\sqrt{-1}$ cadens sit sive c sive b (A et B realia quævis, inter quæ et 0 cadit,

Hosted by Google

denotantibus). Dicitur præterea C *radix exponentis* b cuiusvis C^b; imo et quodvis tale a, ut pro certo r, sit $ar = R$, dicitur *radix exponentis* r *ipsius* R. Exemplis hæc ibidem illustrantur; atque per definitionem divisionis (pag. 528) extensam, præterquam quod 1^r ommittitur (pag. 193).

Notandum tamen est, conceptum hunc, quamvis statim post multiplicationem construi queat, nonnisi subveniente (pag. 182) oriri.

Nempe prius, factum e factoribus æqualibus numero n, per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari cœpit; tum ad quotum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n, inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere positive, inferiorum vero negative, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m}, et $\frac{A^N}{A^M}$ intelligere per A^{N-M}. Sit $n-m=\nu$, et $N-M=\mu$.

Passus ulterior erat, duos eiusmodi quotos nempe a^ν et A^μ æquales cogitare, et per $a^{\frac{\nu}{\mu}}$ designare tale A, ut sit $a^\nu = A^\mu$. Nec post (pag. 532) dicta $\mu = 0$ excluditur: nam $a^1 = A^0 = 1$, et $1^{1:0} = A$.

Ita $a^0 = A^0$, et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore $= A$.

Hosted by Google

H.

DILUCIDATIO NOVA EORUNDEM CONCEPTUUM IN SECTIONE PRIMA TRADITORUM.

Sit fas conceptus primarios breviter referre. Conceptus construere (abstrahendo et coniungendo haud contraria ac comparando) fas est: donec aliud clarius elegantiusque, quo systema æque concinnum firmumque stabiliatur, prodeat.

Hoc pacto quantitates cum certis qualitatibus connexæ et cum iis suscipiendæ operationes oriuntur: quærique potest, quodnam sit certarum quantitatum certis qualitatibus præditarum per certas operationes resultatum? item pro certo resultato, quænam quantitates cum quibus qualitatibus connectantur et quæ operationes cum iis suscipiantur?

Ita (pag. 32) seriei terminus quivis *numerus* quoad u (*unum* ab *unitate* distinguendum) dicitur, at si cui o et u quoque numerum dici absonum videatur, aliud nomen commune dari potest, idque cum certis fieri potest.

Ita qualitates *oppositorum*, earumque cum quantitatibus coniunctio, atque hinc *additionis* et ex hac *subtractionis* operationes construuntur.

Conceptus positivorum et negativorum *e demtione* oriundus construi modo sequente etiam potest: si A tali qualitate Q et B tali qualitate q prædita ponantur, ut pro certa conditione c accipiendum resultatum sit o si $A=B$, secus autem id cum qualitate Q aut q, quod si non esset, resultatum o esset, — tum A cum Q et B cum q dicuntur (posito c) *opposita*.

Ita fit mater conceptuum cardinalium operatio, qua aliquid quoad certam *mensuram mensurari* dicitur, cum *imagine* resultatum operationis exhibente; atque ex omnibus *mensurae primariae mensurationis primariae* et *imaginis mensurationis primariae* quoque constructio; quamvis verba ista hic altiori sensu quam in vita communi veniant. Nempe statuere fas est:

Hosted by Google

1. Ut certa quantitas U sit *mensura primaria* ab omnibus illi æqualibus quoque distincta, nec cum ulla earum alia permutetur, atque $\vdash\!\!+[U]$ significet id ipsum cum qualitate $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!\dashv[U]$ item illud ipsum cum qualitate $\vdash\!\!\dashv$.

2. Ut pro quavis quantitate tractanda figatur ad casus operationum constructarum, non solum cum quanam qualitatum $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!\dashv$ coniuncta spectetur, sed etiam quoad quam unitatem (nempe positivam vel negativam) mensuretur, dum primaria eius mensuratio præcipitur; atque eatenus aliæ unitate positiva aliæ unitate negativa præditæ distinguantur; ex. gr. posteriores, quæ *imaginariae* dici solent, a prioribus, quæ *realia* dici solent, alio ex. gr. rubro colore distingui possent aut signo $*$ ad lævam supraposito. Atque tam priores quam posteriores *purae*, connexae vero *mixtae* dici possunt.

3. Quum vero sive expresse ipsius $\vdash\!\!+[U]$ aut ipsius $\vdash\!\!\dashv[U]$ mensuratio primaria præciperetur; id quoad $\vdash\!\!+[U]$ fiat: adeoque tam $\vdash\!\!+[U]$ quam $\vdash\!\!\dashv[U]$ ita dicta realia sint.

4. Ut mensum quoad mensuram magis innotescat, statuatur pro resultato *mensurationis* imago responsiones ad tres quæstiones sequentes exhibens: post I scribatur quamtumnam sit mensum quoad mensuram? post II vero, num simul sint positiva vel negativa aut non? post III autem, num simul gaudeant unitate positiva vel negativa aut non? scribaturque eatenus post II et III «ita» vel «non». Abhinc et mensurationis mixtæ quoad qualemvis et puræ quoad mixtam imagines item lege certa construuntur.

5. Si imago mensurati b quoad a fuerit æqualis imagini mensurati B quoad A, dicatur b quoad a *aequimensum* ipsi B quoad A.

6. Si vero A unitatem ipsius B denotet, dicatur b quoad a ipsi B *aequimensum*; nempe dum mensura haud nominatur, *primaria* mensuratio intelligatur, prior respectiva quoad a est: operatio qua b ex a et B quæritur, *multiplicatio*, et b *factum* ex a per B audit; est quidem a *mensura posita*, B vero *primario mensum*.

7. At quum si factores ex. gr. rectæ fuerint, rectam dent pro facto, imo etsi permutentur in omni casu factum idem sit (præter casum uni-

Hosted by Google

cum si nempe a unitate positiva et B negativa gaudeat): ut ordo factorum dictorum in nullo casu factum mutet, statuitur ut imagines mensurationis (in 4) unica exceptione æquales sint, nempe in casu plane dicto post II in primaria et in respectiva mensuratione contraria stent.

8. Porro ad quantitates e qualibusvis puris complexas conceptus multiplicationis facile construitur.

9. Si vero γ factum ex β per α fuerit, pronum est, e γ tanquam posito facto et alterutro ipsorum α et β quærere huius socium; dici solet hæc operatio *divisio* et quæsitum *quotus*. *Duae* vero sunt *species* in genere, prouti *mensura respectiva* aut *primario mensum* quæritur. Dicatur posterius *quotiens*.

10. Atque si duo quotientes æquales sint, fit *quotientium aequalitas*, et fas est sive hoc sive (5) *proportionem* dicere at generaliter utrumque haud idem est, ut infra patebit.

Unde passus ad seriem, quæ *geometrica* vocatur, cuius terminus quivis per sequentem divisus quotientem eundem dat. Atque hac serie combinata cum serie, quæ arithmetica dicitur, cuius termini cuiusvis differentia a sequente eadem est, nascitur conceptus *potentiae*, *radicis* et *logarithmi*. Nimirum origo ad indicam (qua numeri designantur) legem referri potest: nempe

$$\ldots \text{III}, \text{III} \ldots$$

denotat seriem geometricam, in qua si 10 generaliter a sit, loco primo ad lævam ab 1 (exclusive numerando) valor ipsius 1 est a, loco secundo aa &c. Quæ loca si terminis respondentia infra eos scribantur, serie locorum arithmetica pariter continuata utrinque in infinitum, ut terminis seriei superioris geometricæ subscripti, quasi indices locales eorum sint: sequens imago orietur

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots aaa & aa & a & 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} & \ldots \\ \ldots 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & \ldots \end{array}$$

Ubi perspicere pronum est, quod index localis facti e quibusvis terminis superioribus summa indicum localium iis respondentium sit, et quo-

Hosted by Google

tientis index localis prodeat, subtracto indice locali divisoris ex indice locali dividendi.

Et quum index localis ex. gr. ipsius 1 sit 0-ies tantus quam index localis ipsius a, et index localis ipsius $\frac{1}{aa}$ sit $\left(-\frac{2}{3}\right)$-ies tantus quam index localis ipsius aaa &: designare hoc per

$$1 = a^0, \quad \frac{1}{aa} = (aaa)^{-\frac{2}{3}}, \text{ \&}$$

(nihil aliud intelligendo) fas erat. Patebat etiam idem esse, si pro

$$\ldots 2, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \ldots$$

ponatur

$$\ldots 2d, \quad d, \quad 0, \quad -d, \quad -2d, \ldots$$

Hinc passus erat pro a et d quasvis quantitates libere sumere, *capita* suarum serierum nuncupando, unde brachia utrinque extendant. Passus ulterior est in utraque serie a quovis ad proximum terminos numero eodem μ, quem postea in infinitum augere liceat, ita interserere, ut series superior geometrica, inferior autem arithmetica maneat, atque ut termini inferioris terminis superioris tanquam indices locales respondeant.

Et tum subvenit duo eiusmodi serierum paria condere: alterum pro parte realium et alterum pro parte imaginariorum, et quidem ita, ut capita serierum sint a, d positiva et unitate positiva prædita pro parte realium, et pi, qi (quantitates p, q unitate negativa præditas denotantia) pariter positiva pro parte imaginariorum purorum.

Atque quum si N, R termini seriei ipsius a, et M, S termini seriei ipsius pi, indicesque locales ipsorum N, R, M, S fuerint n, r, m, s, et index localis ipsius NR sit $n+r$, et ipsius MS sit $m+s$: pronum est pro indice locali ipsius NM quoque $n+m$ ponere, quasi eiusmodi facti, cuius alter factor pro parte realium indice locali n, pro imaginorium parte vero indice locali m gaudet.

Et hinc adinstar unitatis pronum est capita serierum constantia statuere.

Hosted by Google

Atque si hoc pacto pro valoribus ipsorum b, c, C unicis, indiceque locali per log. designato fuerit

$$c \log. b \eqcirc \log. C$$

per $x \eqcirc y$ intelligendo aliquem valorem ipsius x alicui ipsius y æqualem esse, fas erat dicere, C quoad indicem localem quasi c-ies *potentius* ipso b, et b quasi c-ies *impotentius* ipso C, designando per

$$C \eqcirc b^c, \quad \text{et} \quad b \eqcirc \sqrt[c]{C}$$

atque

$$c \eqcirc \log. C \text{ (quoad } b);$$

signo $\eqcirc$ ob plurium valorum possibilitatem adhibiti, (pag. 124).

Et tum priusquam capita figerentur, oritur *theoria potentiae generalis* specialiter applicata, dum tale q et talis functio

$$\begin{aligned} f(v) &= 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^4}{1.2.3.4} + \cdots \\ &= f_1(v) + f_2(v), \end{aligned}$$

per $f_1(v)$ summam terminorum imparis numeri intelligendo, innotuerunt, ut

$$f_1^2(v) - f_2^2(v) = 1$$

et

$$f(qi) = \cos. q + i \sin. q = i,$$

et

$$\cos. u + i \sin. u = f(ui)$$

sit. Unde quum si pro pi et qi ista i et qi accipiantur, quivis index localis ji fuerit in serie infima, $f(ji)$ terminum, cuius ji index est, exhibeat, pariterque sit, si $f(d)$ sumatur pro a; capita hæc stabilire, et ob simplicitatem $d = 1$ ponere (quo *systema naturale* baseos $f(1) = e$ dictæ) in promtu erat.

Et tum demonstrato, quamvis quantitatem per

$$y \cos. u + yi \sin. u$$

exprimi posse, denotante y reale et u viam puncti in peripheria radii 1, — non solum quantitas ipsa, sed et potentia exponentis (sive realis, sive imaginarii, sive mixti), imo quantitatis cuiusvis omnes logarithmi intuitui

Hosted by Google

subiiciuntur. Nempe abscissæ in recta ab $\mathfrak{a}$ acceptæ, ad dextram positivæ ad lævam negativæ, exprimant seriem arithmeticam seriei geometricæ ipsius e respondentem, atque ordinatæ y ad finem cuiusvis abscissæ $\mathfrak{ap}$ perpendiculares superius erectæ sint termini seriei dictæ ipsius e abscissis respondentes; item sit altera quoque talis abscissarum linea cum ordinatis prioribus; et e cuiusvis abscissæ fine $\mathfrak{p}$ fiat circulus radii 1 ad eam perpendicularis, atque e diametri in tabula erectæ fine superiore punctum pone tabulam directum moveatur semper porro in infinitum, via eius u dicta; et ubicumque in $\mathfrak{p}'$ sit finis viæ u, accipiatur ex $\mathfrak{p}$ in recta versus $\mathfrak{p}'$ indefinita $y \cos. u$ (per y ordinatam illius $\mathfrak{ap}$ et cosinum pro radio 1 intelligendo). Idemque fiat cum altera abscissarum linea eo solum discrimine, quod $y \sin. u$ pro $y \cos. u$ accipiatur, et quidem $y \cos. u$ unitate positiva, $y \sin. u$ vero unitate negativa prædita sint. Facile patet prius formam stantem 8, posterius vero iacentem dare, hocque ob intuitum clariorem colore ex. gr. rubro ab illo nigro distingvi posse; exhiberique posse quodvis Q per

$$y(\cos. u + i \sin. u),$$

quum pro quovis detur tale u et tale y.

Omnes logarithmi naturales ipsius Q vero comprehenduntur in

$$\mathfrak{ap} + ui + \alpha\hat{\nu}i,$$

si $\mathfrak{p}$ denotet finem abscissæ ipsi y respondentem et $\alpha = 4q$ sit atque $\hat{\nu}$ sit nomen generale omnis numeri integri sive positivi sive negativi ita ut quivis haud excluso 0 illi substitui possit.

Patet etiam formas dictas ad dextram crescere in infinitum, decrescere ad lævam semper similes, uti tabula e compendio hungarico postea edito sumta ostendit, ubi et dari supradictum q etiam mere analytice cum rigore demonstratur.

Notandum vero est:

1) quod quamvis $f_1(v)$, pro $v = u\sqrt{-1}$, sit

$$= \cos. u = \cos. \frac{v}{\sqrt{-1}},$$

substituto iu idest $u\sqrt{-1}$ ipsi u in

$$v = u\sqrt{-1},$$

absonum sit $f_1(-u)$ cosinum ipsius ui dicere: quum in circulo radii 1 cosinus eius fieret omni dabili maior, si $u \backsim \infty$. Interim et tunc

$$f_1^2(v) - f_2^2(v) = 1$$

et $f_1(v)$ ac $f_2(v)$ functiones nomine proprio quidem dignæ, sed a simplici conceptu geometrico distinctæ, *cosformis* et *sinformis* dici possent.

2) Pag. 542 et pag. 536 data definitio per signum $\vDash$ fit præcisa: nimirum si

$$f(v) = V,$$

tum dicitur

$$v \vDash \log. V$$

(idest log. nat. V), et si pro valoribus unicis ipsorum c, C, a fuerit

$$c \log. a \vDash \log. C,$$

dicitur

$$C \vDash a^c,$$

et

$$a \vDash \sqrt[c]{C}$$

atque

$$c \vDash \log._a C,$$

idest log. C quoad basim a.

Ubi si

$$a = f(h),$$

atque

$$C = f(hc),$$

dicitur $\frac{1}{h}$ *modulus* systematis logarithmici pro basi a, per quem nimirum log. C multiplicatum dat logarithmum quoad a. Unde si modulus is σ dicatur, $f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ est basis a.

Ratio signi $\vDash$ est, quod generaliter nec $c \log. a \vDash \log. C$, nec

$$\log. a \vDash \frac{\log. C}{c}$$

Hosted by Google

sit. Nam si aliquis log. a fuerit k, et aliquis log. C fuerit kc, erit

$$\log. a \equiv k + \alpha \hat{\nu} i$$

et

$$\log. C \equiv kc + \alpha \hat{\nu} i;$$

adeoque ut

$$c(k + \alpha \hat{\nu} i) \equiv kc + \alpha \hat{r} i$$

sit, dari pro quovis ν talem integrum $\hat{r}$ opporteret ut

$$c\nu = r$$

sit, quod, si ex. gr.

$$C = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \nu = 5,$$

fieri nequit, quia

$$2 \cdot 5 = 3\nu,$$

adeoque $\frac{2 \cdot 5}{3}$ integer esset. Pariter casus alter patet.

3. Si in serie geometrica

$$\ldots, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a}, 1, a, aa, \ldots$$

et respondente arithmetica

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

termini inter quosvis proximos numero $\mu - 1$ interserantur: exponens superioris erit $a^{\frac{1}{\mu}}$, inferioris autem $\frac{1}{\mu}$; atque si prior sit x, ac integer r et $\omega < 1$ positiva et

$$N = x^{r+\omega}, \qquad x^r < N < x^{r+1}$$

fuerint, fiet

$$\log. N = \frac{r+\omega}{\mu}, \quad \frac{r}{\mu} < \log. N < \frac{r+1}{\mu}.$$

4. Ex $A^m = B^n$ generaliter nec

$$A \equiv B^{\frac{n}{m}}$$

sequitur; ex. gr.

$$(-1)^2 = 1^2,$$

Hosted by Google

sed ipsius -1 nullus valor est ulli ipsius $1^{\frac{2}{2}}$ æqualis (si $\frac{2}{2}=1$ accipiatur). Addendum itaque pag. 543 fuisset: si n, m inter se primi fuerint, aut potius dicendum, si termini seriei geometricæ eiusdem, cuius caput a sit, fuerint

$$A=a^n \quad \text{et} \quad B=a^m:$$

tunc (prouti si $A=na$ et $B=ma$, dicitur A ipsius B tanquam mensuræ $n(m)$-tum, pariter) dicatur si m non $=0$,

$$A \equiv B^{\frac{n}{m}},$$

et

$$B \equiv \sqrt[\frac{n}{m}]{A},$$

atque

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{\log._a A}{\log._a B}.$$

Est quippe si $n=zm$ ponatur, index localis ipsius A $\frac{n}{m}$-ies tantus, quam index localis ipsius B.

Ita pro c finito et non $=0$ fit

$$\sqrt[c]{C} \equiv C^{\frac{1}{c}}.$$

Namque

$$b \equiv \sqrt[c]{C}$$

sequitur (pag. 550) ex

$$c \log. b \equiv \log. C.$$

Nam sit k valor aliquis ipsius log. b et kc valor aliquis ipsius log. C; erit et

$$\frac{kc}{c}=k,$$

adeoque

$$\frac{1}{c} \log. C \equiv \log. b;$$

itaque

$$b \equiv C^{\frac{1}{c}}.$$

Ita si

$$h \equiv C^{\frac{1}{c}},$$

tum

$$\frac{1}{c} \log. C \equiv \log. h,$$

Hosted by Google

itaque

$$\log. C \eqcirc c \log. h$$

et

$$h \eqcirc \sqrt[c]{C}.$$

At si $c = 0$, sitque

$$2^0 = 1$$

erit

$$2 \eqcirc \sqrt[0]{1},$$

sed non est $= 1^{\frac{1}{0}}$ nisi sensu (pag. 46), quo pro operationem ingredientium limitibus resultati limes nomine eodem insignitur, quatenus ex

$$\omega \log. b \eqcirc \log. C,$$

pro $\omega \backsim 0$ fieret

$$C \backsim 1, \text{ et } b \eqcirc 1^{\frac{1}{0}};$$

et si

$$-\omega \log. b \eqcirc \log. C,$$

fieret pro $\omega \backsim \infty$

$$b \eqcirc 0^{\frac{-1}{\infty}}.$$

Expressionum tamen huiusmodi sæpe sensus vagus est.

5. In opere dicto potentiæ theoria generalis traditur, priusquam capita serierum figerentur; et quicunque index localis fuerit j, id cuius j index localis est, per ♀ i designatur, quod postea $f(j)$ fiet. Adhibitisque signis $\eqcirc$, $\eqcirc$, $\eqcirc$ (notando quod nonnisi ubi signum $=$ est, expressionum æqualium quotvis valoribus gaudeant æquales accipi debeant) plura præcisius determinantur; ex. gr. generaliter $(\sqrt[d]{a})^c$ nonnisi $\eqcirc \sqrt[d]{a^c}$ dici potest; $a^b . a^c$ tantum $\eqcirc a^{b+c}$ &c.

Præter potentiæ theoriam autem ibidem *triplex vestitus*, quo quantitates utvis heterogeneas pro quæstionis statu ornatas tabulam adire præceptum est, in eo consistit, ut (pag. 522 et 545) rectarum unitas U (quasi dux operationum cardinalium) eadem teneatur, donec aliud monitum fuerit: atque

a) quævis quantitas utvis heterogenea, si ex. gr. suæ unitatis $\frac{2}{3}$-tum fuerit, repræsentetur per rectam $\frac{2U}{3}$; item

b) cuivis eiusmodi repræsentanti, prouti ad scopum visum fuerit,

Hosted by Google

detur qualitas positiva vel negativa quoad casum operationis, quæ *additio* dicitur, indeque oriundæ subtractionis;

c) quoad casum præcipiendæ mensurationis primariæ et inde oriundorum tribuatur illi $\vdash\!\dashv U$ vel $\vdash\!\dashv U$, ut idem U huic operationi iam cum qualitate $\vdash\!\dashv$ iam cum qualitate $\vdash\!\dashv$ inserviat.

Operationes per numericas quoad unitatem expressiones pariter peragere fas est.

Imaginis mensurationis constructæ (pag. 545) lex sequens ponitur. Si mixta quoad puram datam mensuranda sit: prius illa pura pars mixtæ mensuretur, quæ cum mensura eadem positiva vel eadem negativa unitate gaudet, et postmodum mensuretur altera pars, atque post I, II, III scribantur responsiones mensurationis ad lævam et posterioris ad dextram.

Mixtæ mensuratio primaria autem fiat ordine sequente: quævis quoad suam unitatem mensuretur, sed ad lævam scribatur post I, II, III partis unitate positiva præditæ imago, et ad dextram imago mensuratæ partis alterius.

Quoad mixtam autem mensuratæ (sive mixtæ sive puræ) imago sit sequens. Sit mensura $a+bi$, sitque mensurandum K pro $K=P+Q$, tam P quam Q mixtum denotantibus.

Si prius P quoad a, tum Q quoad bi mensurata imaginem eandem dant: imago ista accipiatur pro resultato mensurationis ipsius K quoad $a+bi$.

Ex. gr. Si

$$K=c+di=P+Q,$$

facile prodit pro imagine æquali esse

$$P=ax-ayi \quad \text{et} \quad Q=bix-by,$$

atque

$$x=\frac{d}{b}+\frac{abc-a^2d}{a^2b-b^3}=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}$$

Hosted by Google

et

$$y = \frac{bc - ad}{a^2 - b^2}.$$

Ut vero sit

$$P : a = Q : bi,$$

accipiendum

$$P = ax + aiy$$

et

$$x = \frac{ac - bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

et, ut antea,

$$Q = bix - by;$$

eritque

$$\frac{P}{a} = x + yi = \frac{Q}{bi} = \frac{P + Q}{a + bi}$$

et

$$a(x + yi) + bi(x + yi) = P + Q = K,$$

atque imago mensurationis ipsius K quoad $a + bi$ eadem erit cum imagine mensurationis primariæ ipsius $x + yi$ cum restrictione pag. 545 determinata.

Hosted by Google

I.

PRIMÆ LINEÆ THEORIÆ COMBINATIONUM.

De combinationum ex n rebus iuxta certum numerum m, adeoque amborum, ternorum &, nec non numero permutationum, diotum pag. 159 est.

§. 1.

Numerus *omnium combinationum* ex n rebus, id est summa *unorum*, *amborum*, *ternorum* & . . . usque ad n-tum inclusive, est $2^n - 1$.

Nam summa ista est

$$n + \frac{n.(n-1)}{2} + \ldots + \frac{n.(n-1)\ \ldots\ 2.1}{1.2\ \ldots\ (n-1).n} = 2^n - 1;$$

quia

$$(1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + \frac{n.(n-1)\ \ldots\ 2.1}{1.2\ \ldots\ (n-1).n}.$$

§. 2.

Variatio vocatur, si una litera pluries occurrat, *permutatio* vero, si res eædem alio ordine se excipiant.

Variationis leges variæ dari possunt. Ex. gr. ut inter m literas, e certis n literis acceptas, plane certa poni possit certo numero, determinatum quendam haud superante, et alia alio . . . Ita lex esse potest, ut quævis poni possit etiam m-ies; ita lex esse potest, ut inter m literas semper occurrat aliqua n-ies, aliqua q-ies, aliqua r-ies, et ita porro. Vocatur imago m, 1, 2, 3, . . . literarum m-io, *Unio*, *Binio*, *Ternio* &; quæri semper potest pro lege data quænam m-iones dentur; et in summa quotnam uniones, biniones, terniones & sint. Præterea postulatur etiam, ut tam combinationes sine variatione et permutatione construantur claro

Hosted by Google

ordine, quam permutationes; nec non combinationes, admissa et variatione iuxta certam legem, tam exclusa permutatione, quam admissa hac quoque.

§. 3.

Permutationes construi possunt: prius rem primam *a* ponendo, dein rem nova *b*, prius loco primo, dein secundo; atque idem cum re nova *c*, et tum cum *d*, et quavis nova re suscipiendo; ut ponatur hæc prius loco primo, dein secundo, et ita porro usque ad finem, in quavis permutatione, quæ antea prodiit. Ita in *primo ordine*, qui e duorum rerum permutationibus constat, si accipiatur ex. gr. secunda; et in *secundo ordine* in quo iam tres sunt, quæ e dicta secunda fiunt, accipiatur earum prima; et in *tertio ordine* ubi iam quatuor sunt, quarta accipiatur istarum, quæ e proxime dicta prima fiunt, et ita porro: habetur per numeros 2, 1, 4 permutatio determinata ex. gr. *cbad* esset talis pro literis *a*, *b*, *c*, *d*.

Possent etiam permutationes ita construi: ut res numeris denotentur, ex. gr. 1, 2, 3, 4: et iidem numeri decadice ita scribantur, ut nullus valor emaneat, qui iisdem numeris exprimi potest, totidem nimirum locis, atque nullo numero bis occurrente; præterea autem valores semper crescant, ut nullus iam descriptus sit ullo sequentium maior.

Ex. gr.

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
.	.	.	.

Patet prodire omnes quibus 1 præest; ita prodire quibus 2 præest, et ita porro; omnes enim valores quibus 1 præest cum iisdem numeris, et alio ordine, sunt diversi, et quorumvis eorum datur minimus.

Hosted by Google

§. 4.

Si quæratur quænam m-iones ex n accipi possint, admissis permutationibus et variationibus ita ut eadem litera, numero quovis, certum m haud superante occurrere queat: responsio facillima est; numerus m-ionum est 1 cum m cifris, valore quem hoc in n-dica numerandi ratione habet. Sit ex. gr. $n = 10$, et sit $m = 3$, erit 1000 (valore decadico) numerus m-ionum quæsitus. Descriptis nempe supra lineam horizontalem superiorem (in schemate sequenti) numeris 0, 1, 2, . . . ; præponatur quævis, nempe quodvis ipsorum 0, 1, . . ., 9 a 0 incipiendo inclusive, cuivis unioni a 0 incipiendo; donec prodeant sequentes lineæ horizontales usque ad lineam * inclusive; dein iterum quævis unio a 0 incipiendo item inclusive præponatur cuivis binioni, eo ordine, uti prodierunt; et ita porro semper iis, quæ postremo prodierunt, præpositis omnibus unionibus; iterum ordine præponantur omnes uniones a 0 (inclusive) incipiendo, donec omnes m-iones prodierint.

Ex. gr.

0	1	2	. . .	9
00	01	02	. . .	09
10	11	12	. . .	19
20	21	22	. . .	29
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
* 90	91	92	. . .	99
000	001	002	. . .	009
010	011	012	. . .	019
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Patet quamvis m-ionem talem, quæ non cum cifra incipit, prodire. Sit enim quævis eiusmodi m-io, illa numerum aliquem denotabit; demonstratum vero est, in numeratione, modo relato numerum quemvis denotari posse; itaque nisi adesset inter illas m-iones quæ prodierunt, esse deberet aut supra aut infra; neutrum fieri potest. Nam 1 quoque cum $m-1$ locis plus denotat numero pauciorum locorum, etsi ubique 9 sit; ita 1 quoque etiam cum m cifris plus denotabit data m-ione, etsi in hac ubique 9 sit. Sunt præterea quævis m-iones non cum cifra inci-

Hosted by Google

pientes inæquales. Itaque de iis tantum m-ionibus quæritur adhuc, quæ cum cifra incipiunt; si una tantum cifra sit in initio, hæc alicui $(m-1)$-ioni præposita est per legem dictam; si duæ, tum eadem lege anteposita erit cifra alicui $(m-2)$-ioni, et nunc huic $(m-1)$-ioni item alia præponitur; patetque si plures fuerint. Itaque cum idem, quod de m verum est, valeat de $m-1$, $m-2$, . . . , prodibunt omnes uniones, biniones, . . . , m-iones. Sunt vero uniones numero n, biniones sunt $n \cdot n$, quia singula n signa præponuntur singulis omnibus n signis; terniones sunt n^3, quia singulis binionibus præponuntur singula n signa. Itaque prodeunt m-iones numero n^m, nempe plane numero illo, qui per 1 cum m cifris in n-dica numerandi ratione denotatur. Prodeunt autem omnes simul uniones biniones, terniones, . . . et m-iones inclusive, in summa (pag. 151)

$$n^m + n^{m-1} \ldots + n^1 = \frac{n^{m+1} - n}{n-1}.$$

Exemplo sint *voces*, et *syllogismi* modi, quoad propositiones.

Hoc pacto 24 literis voces 8 literarum prodeunt 24^8; 3 literarum 24, omnia vero summando a 8 usque ad 1, prodit

$$24^8 + 24^7 + \ldots + 24^1 = (24^9 - 24) : 23.$$

Ita *syllogismi*, quoad *propositionis*, *modi* sunt 1000, *valore* quem in quaternaria numeratione habet; quia terniones accipiuntur ex quatuor rebus.

Sic et in propositionibus termini permutantur, permutatione in propositione maiori facta manentibus ceteris, per 2 multiplicatur numerus, minor etiam multiplicat per 2, conclusio quoque. Itaque prodit $4^3 . 2 . 2 . 2$, quia quævis permutatio terminorum maioris per 2 permutationes minoris duas gignit, et quævis harum item duas, permutatione terminorum conclusionis. Plurimæ tamen e rationibus logicis reiiciuntur. (Vide pag. 18).

Describuntur vero 4^3 modi ordine facillime: si *propositio universaliter affirmans* dicatur 0, *universaliter negans* dicatur 1, *particulariter affirmans* dicatur 2, et *particulariter negans* dicatur 3; atque lege quaternariæ numerationis describantur omnes numeri, donec omnes termini ordine prodeant iuxta (pag. 558).

Hosted by Google

§. 5.

Si quæratur *numerus m*-borum *sine permutatione, sed admissa variatione* ita, ut in quovis *m*-bo aliqua litera occurrat ex. gr. 3-ies (sed quævis), alia ex. gr. 2-ies &, aliæ semel; possunt quilibet sumi pro numeris istis, qui *exponentes variationis* dicuntur. Ex. gr. forma *aaabbcd* erit sensu hoc eadem cum $c^3a^1d^2b^1$; patetque heic quæri:

1. numerum combinationum literarum, quæ *elementa* dicuntur;

2. in quavis combinatione, exponentes quoties migrare, seu permutari queant: atque numerum combinationum elementorum per numerum permutationum exponentium multiplicari. Si ex. gr. 7 res sint: erunt pro magine dicta, combinationes numero

$$\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4},$$

et hoc multiplicari per

$$\frac{1.2.3.4.}{1.2}$$

debet; quia exponentes variationis numero 4 sunt, adeoque numerus permutationum eorum esset 1.2.3.4, si diversi essent; sed quum duo sint æquales, imaginum pars dimidia alteri æqualis erit; quapropter per 2 dividendum est.

§. 6.

Si quæratur ex *aaaa bbb cc def quot diversae imagines accipi queant, ita ut nulla litera pluries occurrat, quam in proposita*; possit vero una quoque litera sola esse; ex. gr. *a* non pluries quam ter, sed etiam semel occurrere queat. Id est quot factores diversos habet factum e literis factores primos denotantibus?

Prima	litera dat 4, nempe	*aaaa*	*aaa*	*aa*	*a*
Secunda	litera dat 3, nempe	*bbb*	*bb*	*b*	
Tertia	litera dat 2, nempe		*cc*	*c*	

Hosted by Google

litera quævis enim tot imagines dat, quoties in primitiva adest; eritque imaginum e literis pluries occurrentibus hoc modo factarum omnium summa $=4+3+2$. Si porro combinetur quævis imago lineæ cuiusvis cum quavis imagine cuiusvis lineæ inferioris: orientur imagines novæ numero $4.3+4.2+3.2$; porro si combinentur singulæ imagines lineæ cuiusvis ita cum singulis linearum inferiorum, ut in quavis nova, cuius pars e linearum aliqua est, imago aliqua linearum inferiorum *plurium* adsit: fient novæ imagines pro hoc casu numero $4.3.2$. Itaque prodierunt hucusque imagines numero

$$4+3+2+(4.3+4.2+3.2)+4.3.2=4(1+2+3+2.3+3)(1+2)+2$$

$=59$ pro hoc casu.

Præterea literarum, quæ nonnisi semel occurrunt in imagine primitiva, computetur numerus combinationum omnium ab uno incipiendo; et hic multiplicetur per summam omnium imaginum quæ prodierunt; quia quævis combinationum dictarum cum quavis imaginum dictarum combinari potest; atque demum numero huic addatur numerus combinationum dictarum, necnon summa omnium imaginum superius creatarum. Itaque quum (pag. 556) numerus combinationum omnium sit 2^3-1, est totalis summa $=(2^3-1).59+59+2^3-1$; et tot sunt factores diversi, inter quos adest et ipsum factum, sed unitas non annumerata est, exprimiturque idem etiam per $(2^3-1)(59+1)+59$.

§. 7.

Combinationes construuntur ex elementis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sic.

Nunquam itur retro, sed semper antrorsum proceditur; e quavis linea horizontali ad inferius sequentem, in linea ipsa autam semper ad dextram itur; cuivis imagini autem illa litera postponitur, quæ imaginis postremam in linea suprema excipit.

Prius construuntur *ambo*; cuivis *elemento* id est literæ in linea suprema, postponendo quamvis eo ordine, quo sequuntur; donec ad ultimam deveniatur, quæ nullam post se habet et iam combinata cum omnibus anterioribus est.

Hosted by Google

Dein construuntur *terno*; cuivis *ambo* postponendo singulas supremæ lineæ literas, quæ postremam imaginis excipiunt, donec ad tale *ambo* deventum fuerit, cuius literam postremam nulla excipit.

Tum *quaterno* construuntur, &, uti schema ostendit.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
ambo	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	
		bc	*bd*	*be*	
			cd	*ce*	
				de	
terno		*abc*	*abd*	*abe*	
			acd	*ace*	
				ade	
			bcd	*bce*	
				bde	
				cde	
quaterno			*abcd*	*abce*	
				.	
				.	
				.	

In genere si omnia $(m-1)$-bo prodierint, hæc combinantur omnia cum literis sequentibus, nempe litera semper illa postposita, quæ post postremam sequitur. Patet operatione semper antrorsum procedente, cum quavis litera quæ nondum adest, fieri combinationem, nec eam cum tali litera fieri quæ iam adest.

§. 8.

Combinationes admissa variatione sine permutatione fieri possunt ex n rebus in summa, connumeratis *unionibus*, *binionibus*, & usque ad m-iones inclusive, numero

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots m}-1.$$

Fiat enim schema sequens:

Hosted by Google

Uniones sive elementa	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	Numerus imaginum
Biniones	*aa*	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	5 præest *a*
		bb	*bc*	*bd*	*be*	4 præest *b*
			cc	*cd*	*ce*	3 præest *c*
				dd	*de*	2 præest *d*
					ee	1 præest *e*
Terniones	*aaa*	*aab*	*aac*	*aad*	*aae*	
		abb	*abc*	*abd*	*abe*	
			acc	*acd*	*ace*	præest *a*
				add	*ade*	V=1+2+3+4+5
					aee	
		bbb	*bbc*	*bbd*	*bbe*	
			bcc	*bcd*	*bce*	præest *b*
				bdd	*bde*	IV=1+2+3+4
					bee	
			ccc	*ccd*	*cce*	
				cdd	*cde*	præest *c*
					cee	III=1+2+3
				ddd	*dde*	præest *d*
					dee	II=1+2
					eee	I=1 præest *e*

Præponitur prius *a* cuivis ipsorum *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et hoc dat lineam primam cui præest *a*; tum præponitur *b* cuivis ipsorum *b*, *c*, *d*, *e*, et prodit linea sequens, cui præest *b*; et tum præponitur *c* cuivis ipsorum *c*, *d*, *e*, proditque linea sequens, cui præest *c*; et ita porro usquequo prodeat *ee* ultima litera ultimæ præposita.

Tum *a*, *b*, *c*, *d*, *e* literæ seriei supremæ, a prima incipiendo inclusive, anteponuntur ordine singulis binionibus, quæ prodierunt; a prima binione incipiendo, usque ad ultimam *ee* inclusive; nempe generaliter quodvis elementum a primo incipiendo inclusive anteponitur singulis omnibus $(m-1)$-ionibus, quæ prodeunt; eodem ordine quo prodierunt,

Hosted by Google

sed ab illa $(m-1)$-ione incipiendo, quæ cum litera præponendæ æquali incipit, usque ad ultimam $(m-1)$-ionem inclusive, et hoc pacto prodibunt m-iones.

In *binionibus* patet, quamvis literam cum quavis combinari, præterea quamvis etiam cum se ipsa; in *ternionibus* autem quamvis literam poni ter, sed una tantum vice, et quamvis bis positam cum quavis combinari, et adesse præterea omnes combinationes.

Atque in genere de $(m-1)$-ione facile patet ad m-ionem: nam in prima linea ubi elementum, ex. gr. a prius anteponitur, est

$$a^{m-1},\ a^{m-2}b,\ a^{m-2}c,\ \ldots$$

postea sequitur

$$a^{m-3},\ a^{m-4},\ \ldots$$

exponente usque ad 0 decrescente; nempe in eorum quibus a præest, lineis sequentibus præpositum est a^{m-3} omnibus binionibus, quas literæ post a sequentes habent; deinde sequitur a^{m-4} cum omnibus ternionibus literarum post a sequentium, et ita porro; nempe ut post $a^{m-\mu}$ cum omnibus $(\mu-1)$-ionibus, sequatur $a^{m-\mu-1}$ cum omnibus $(\mu-2)$-ionibus (literarum post a sequentium) usquequo exponens ipsius a fiat $=1$; tum vero sequuntur omnes $(m-1)$-iones, prius illæ quibus b præest tum illæ quibus c præest, . . .

Idem de litera b pro iis quibus b præest, et idem de iis quibus c præest &, valere inductio docet: hinc autem ut ex $(m-1)$-ionibus prodeant m-iones, modo dicto anteponitur a a prima incipiendo inclusive omnibus, et quævis sequens litera a primo eorum quibus illa præest, anteponitur tam ipsi primo, quam omnibus $(m-1)$-ionibus illum excipientibus; fietque in linea prima a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-1}c$, . . .; id est primo imago illa, in qua a occurrit m-ies, tum illæ in quibus $(m-1)$-ies occurrit a cum quavis literarum sequentium, adeoque cum omnibus earum; dein a^{m-3} cum omnibus binionibus sequentium, demum a^1 cum omnibus $(m-1)$-ionibus ceterarum. Itaque quævis m-io, in qua adest a, prodibit. Idem de quavis alia litera valet: ex. gr. si idem cum litera b suscipiatur, prodit quævis m-io, in qua a non adest; quæ antea iam prodierant

Hosted by Google

quoque omnes, itaque haud amplius regrediendum sed antrorsum eundum est.

Numerus autem imaginum prodit ita. Uniones sunt, quot elementa; biniones sunt

$$1+2+3+4+5;$$

terniones sunt (pag. 563):

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V},$$

id est

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5);$$

quaterniones

$$\mathrm{I}+(\mathrm{I}+\mathrm{II})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}),$$

et ita porro: nam a porro præpositum omnibus, gignit imagines numero

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V},$$

b vero

$$\mathrm{IV}+\mathrm{III}+\mathrm{II}+\mathrm{I};$$

c autem

$$\mathrm{III}+\mathrm{II}+\mathrm{I};$$

d tantum

$$\mathrm{II}+\mathrm{I},$$

ultima e autem unicam dat; patetque esse series arithmeticas a serie 1, 2, 3, 4, 5 semper ad uno altiorem ordinem progredientes; nempe numerus binionum quibus a præest est 5, quibus b præest 4, quibus c, 3 &c; numerus ternionum quibus a præest est V, quibus b est IV, et ita porro: ita numerus quaternionum quibus a præest, est

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V};$$

quibus b est

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}$$

et ita porro. Itaque si in $(m-1)$-ione dicatur numerus eorem, quibus a præest, A, quibus b præest, B, et ita porro; patet in m-ione esse numerum quibus a præest,

$$A+B+C+\cdots+1,$$

numerum quibus b præest, esse

Hosted by Google

$$B+C+\cdots+1,$$

et ita porro; adeoque numerum m-ionum ex 5 elementis esse terminum quintum seriei arithmeticæ m-ti ordinis; ita demum patet, cum ipsi 5 quivis numerus n substitui possit, numerum quæsitum esse n-tum terminum seriei arithmeticæ ordinis m-ti, id est, ut statim patebit,

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}.$$

Summa vero omnium simul, unionum, binionum, ... usque ad m-iones inclusive, prodit ita.

Unionum numerus est n, binionum

$$\frac{n\,.\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

adeoque unionum et binionum summa

$$=n+1-1+\frac{n\,.\,(n+1)}{2}=\frac{2(n+1)}{2}-1+\frac{n\,.\,(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\,.\,(n+2)}{2}-1.$$

Et si vera sit expressio

$$\frac{(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}-1$$

ab unionibus usque ad $(m-1)$-iones inclusive omnes complectens; addaturque numerus m-ionum nempe

$$\frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}.$$

priori: patet prioris tam numeratorem quam denominatorem per m multiplicari debere, ut addi queant; et tum denominator communis erit $1.2\ldots m$; in numeratoris duobus terminis vero erit factor communis

$$(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1),$$

et summa factorum sociorum erit $n+m$; unde patet summam quæsitam esse

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+m-1).(n+m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-1).m}-1;$$

Si $n=2$; tum fit

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}-1=\frac{(m+1)\,(m+2)}{1\,.\,2}-1;$$

nam

$$\frac{(2+1)\,(2+2)\ldots(2+m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}=\frac{(m+2)\,(m+1).m\ldots(2+2)\,(2+1)}{1\,.\,2\,.\,(2+1)\,(2+2)\,.\,.\,.\,m}=$$
$$=\frac{(m+2)\,(m+1)}{1\,.\,2}.$$

Quod vero terminus n-tus seriei arithmeticæ (seriei 1, 2, 3, . . . superstructæ) ordinis m-ti sit

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}$$

patet sic.

		1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Scribantur 1, 2, 3, . . . ab 1 incipiendo verticaliter deorsum, et post quemvis n scribantur in lineam horizontalem coefficientes binomii ad n elevati, a primo nempe 1 incipiendo: erit (pag. 156) quivis, summa numeri in eadem columna verticali proxime superioris et hunc horizontaliter proxime præcedentis. Atque si secundæ columnæ verticali superscribatur 1, et cuivis columnæ verticali sequenti superscribatur uno maior in linea horizontali suprema: fiet quævis columna verticalis, cui numerus m superscriptus erit, series arithmetica ordinis m-ti, in linea horizontali post m, cum 1 incipiens. Nam in columna, cui 2 superscribitur, est

Hosted by Google

$1=0+1$, nempe supra 1 stat 0, et antea 1 est, porro $3=1+2$, nempe supra 1 stat 1, et præcedens est 2; sed idem 3 est = seriei verticalis præcedentis terminis 1,2; porro 6= illi 3 quod supra 6 est (quod summæ terminorum 1, 2 columnæ præcedentis erat), addito præcedenti 3; itaque terminus tertius columnæ 2, nempe 6= terminis 1, 2, 3 columnæ præcedentis tribus prioribus. Si vero hoc usque ad μ-tum terminum deorsum eundo valeat, valebit de $(\mu+1)$-to quoque; nam $(\mu+1)$-tus erit μ-to cum præcedenti æqualis; sed μ-tus$=1+2+3+\cdots+\mu$, præcedens autem est $\mu+1$.

Et pariter e quavis columna verticali ν-ta formatur sequens. Nam quævis cum 1 incipit, nempe quævis linea horizontalis semper uno termino ulterius terminatur in ultimo coefficiente binomiali (nempe 1); atque sub 1 columnæ dictæ ν cadit coefficiens penultimus binomii ad $\nu+1$ elevati, adeoque numerus $\nu+1$, quia is secundo coefficienti æqualis est (pag. 157); ita sub 1 columnæ sequentis cui $\nu+1$ suprascribitur, cadit $\nu+2$; est igitur secundus terminus huius columnæ = suprastanti cum præcedenti $\nu+1$, atque simul æqualis summæ duorum terminorum columnæ præcedentis ν est. Unde item si usque ad μ-tum columnæ $\nu+1$ terminum, quivis summa terminorum numero μ columnæ præcedentis fuerit, idem de $(\mu+1)$-to quoque valere ut prius patet.

Est vero cuiusvis columnæ, cui m superscribitur, terminus n-tus, in linea horizontali post numerum $(n+m-1)$ terminus a primo 1 inclusive $(m+1)$-tus. Est igitur binomii ad $n+m-1$ elevati coefficiens m-tus, si primus 1 haud numeretur. Eritque

$$\frac{(n+m-1)\,(n+m-2)\,\ldots\,(n+m-m)}{1\,.\,2\,\ldots\,m}=\frac{n(n+1)\,\ldots\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,\ldots\,m}$$

Hosted by Google

K.

RATIO REGULARUM IN TABULIS TRIGONOMETRICIS LOGARITHMICISQUE DATARUM.

I. Denotetur sinus arcus non quoad longitudinem sed quoad gradus expressi, si radius 1 sit, per sin., si radius tabularis $r=1$ cum 10 cifris sit, per Sin., pariterque cos. a, Cos. a distinguantur. Sitque a arcus sive 0 sive alius positivus quadrante minor, et s denotet 10″. Levi computo patet, pro $s=\frac{1}{k}$ et radio 1, esse $k>20\ 000$.

II. Cuiusvis arcus sinum cosinumque, adeoque quamvis functionem trigonometricam pro radio 1, per series (pag. 196) terminis sufficientibus sufficienter evolutis, quantumvis exiguo errore computari posse patet; atque

$$r \sin. a = \mathrm{Sin.}\, a.$$

III. *Crescente a decrescit sin. $(a+s)$ — sin. a.*

Est enim

$$\sin. (a+s) = \sin. a \cos. s + \cos. a \sin. s\ ;$$

unde subtrahendo sin. a fit

$$\sin. a (\cos. s - 1) + \cos. a \sin. s.$$

Est autem cos. $s<1$, adeoque sin. a (cos. $s-1$) negativum est, decrescitque crescente a; nam sin. a crescit manente factore altero. Alter terminus, nempe cos. a sin. s, positivus est et decrescit crescente a; unde patet. Atque per r multiplicando idem pro radio tabulari liquet.

IV. *Incrementa ipsius Sin. a* (quantumvis sit a) *incrementis ipsius a ipsum s haud excedentibus proportionalia sunt cum errore minore quam 13.*

Hosted by Google

Sit enim $n > 1$; erit (per præcedentia)

$$\text{Sin.}(a+s) - \text{Sin.}\, a = \text{Sin.}\, a\,(\cos.\, s - 1) + \text{Cos.}\, a \sin.\, s,$$

quod dicatur q; et

$$\text{Sin.}\left(a + \frac{s}{n}\right) - \text{Sin.}\, a = \text{Sin.}\, a\left(\cos.\, \frac{s}{n} - 1\right) + \text{Cos.}\, a \sin.\, \frac{s}{n},$$

quod sit f.

Est autem

$$s : \frac{s}{n} = n : 1 = q : \frac{q}{n}.$$

Itaque nonnisi in

$$\frac{q}{n} - f = \frac{q - nf}{n}$$

inquirendum est.

Est

$$q - nf = \text{Sin.}\, a\left(\cos.\, s - 1 - n \cos.\, \frac{s}{n} + n\right) + \text{Cos.}\, a\left(\sin.\, s - n \sin.\, \frac{s}{n}\right).$$

Est (pag. 196)

$$\cos.\, s - 1 = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2.3.4} - \frac{s^6}{2.3\ldots 6} + \cdots$$

$$n - n \cos.\, \frac{s}{n} = \frac{s^2}{2n} - \frac{s^4}{2.3.4n^3} + \frac{s^6}{2.3\ldots 6n^5} - \cdots$$

quorum summa

$$\frac{s^2(1-n)}{2n} + \frac{s^4(n^3-1)}{2.3.4n^3} + \frac{s^6(1-n^5)}{2.3\ldots 6n^5} + \cdots$$

Pariter

$$\sin.\, s - n \sin.\, \frac{s}{n} = \frac{s^3(1-n^2)}{2.3n^2} + \frac{s^5(n^4-1)}{2.3\ldots 5n^4} + \frac{s^7(1-n^6)}{2.3\ldots 7n^6} + \cdots$$

Statim patebit, in utroque terminum primum excedere summam totam; atque hinc etsi pro Sin. a, Cos. a radius r poneretur (quod nonnisi pro solo Cos. a, dum $a = 0$, fieri potest) fieret series prior $< \frac{r}{2k^2}$, et posterior $< \frac{r}{6k^3}$. Unde calculo inito patet.

Nempe terminus quivis maior sequente est. Nam quilibet duo proximi exprimuntur per

$$\frac{s^t(n^{t-1}-1)}{2.3\ldots tn^{t-1}} \quad \text{et} \quad \frac{s^{t+2}(n^{t+1}-1)}{2.3\ldots(t+2)n^{t+1}},$$

Hosted by Google

si et negativi positive accipiantur. Fietque utrinque multiplicando

$$(t+1)(t+2)k^2(n^{t+1}-n^2) \quad \text{et} \quad n^{t+1}-1.$$

Designetur factor ipsius $n^{t+1}-n^2$ per α; erit

$$\alpha(n^{t+1}-n^2) > n^{t+1}-1.$$

Est enim pro $t=3$

$$\alpha > \frac{n^{t+1}-1}{n^{t+1}-n^2}.$$

Nam sit

$$n^2 = 1+\omega;$$

erit

$$\frac{n^4-1}{n^4-n^2} = \frac{2+\omega}{1+\omega} < 2,$$

α vero > 2. Pro $t=2$ autem erit

$$\alpha = 3.4k^2,$$

et pro

$$n = 1+\lambda,$$

nisi $\lambda > \frac{1}{\alpha-1}$ fuerit, erit

$$\alpha > \frac{n^3-1}{n^3-n^2} = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n^3-n^2}.$$

Nam ut sit

$$\alpha = \frac{n}{n-1} = \frac{1+\lambda}{\lambda},$$

esse debet

$$\lambda = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Si vero λ maius fiat, $\frac{1+\lambda}{\lambda}$ minus fiet; nam si $d > c$, est (pro d, c, e positivis)

$$\frac{d+e}{c+e} < \frac{d}{c}.$$

Si autem de quopiam t valet, valet et de sequente: nam si

$$\alpha(n^{t+1}-n^2)$$

per

$$\beta = \frac{t+3}{t+1}$$

Hosted by Google

multiplicetur, prodibit α pro t unitate aucto, eritque per $\beta > 1$ etiam prius α intelligendo

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) > n^{t+1} - 1.$$

Si iam n^{t+1} utrinque per n multiplicetur, fiet

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) + \alpha\beta n^{t+1}(n - 1), \quad \text{et} \quad n^{t+1} - 1 + n^{t+1}(n - 1);$$

patetque prius posteriore maius esse, quum ex hypothesi sit

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) > n^{t+1} - 1, \quad \text{et} \quad \alpha\beta > 1.$$

Si vero signa terminorum alternent, et quilibet maius sequente sit: terminus primus totam summam superat, quod per lineam intuitui exhiberi potest.

$$\mathfrak{A} \overset{a \quad b \quad c \quad d \quad e}{\underset{\mathfrak{C} \quad \mathfrak{E} \quad \mathfrak{f} \quad \mathfrak{d}}{\text{———}}} \mathfrak{b}$$

Sint termini tales, lineæ $\mathfrak{A}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{f}$, . . . , moveatur nempe punctum ex $\mathfrak{A}$ ad dextram usque $\mathfrak{b}$, et inde ad lævam usque in $\mathfrak{C}$, inde ad dextram usque in $\mathfrak{d}$, &c.; nimirum litera magna a sequente minuscula excepta, denotet viam ad dextram, minuscula a magna excepta viam ad lævam. Erit summa

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{d} - \mathfrak{d}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\mathfrak{f} - \cdots =$$
$$= (a + b + c + d + e) - (e + d + c + b) + (b + c + d) - (d + c) + b + \cdots$$
$$= a + b + c + \cdots$$

patetque quamvis ulteriorem magnam literam ulterius ad dextram, et quamvis ulteriorem parvam ulterius ad lævam, limitemque inter literarum magnarum ab $\mathfrak{A}$ ad dextram progredientium seriem, et seriem parvarum a $\mathfrak{b}$ ad lævam progredientem cadere.

Hinc et seriem utramque negativam esse, et $\frac{q}{n} - f$ pro valore dicto ipsius n minus negativum ipso -13 esse patet.

Hosted by Google

V. *Cur in tabulis pro arcubus maioribus incrementa logarithmorum sint, uti arcus incrementa (intra certos fines), patet sic:*

Incrementa logarithmi (pag. 517—8) *pro eodem incremento numerico* q *decrescunt crescente* p.

Nam incrementum logarithmicum semper est $< \frac{4q}{2p+q}$; quia quilibet terminus ibidem est maius summa sequentium; nempe (pag. 187) post $\frac{u^\mu}{u}$ summa sequentium est $< \frac{u^{\mu+2}}{(\mu+2)(1-u^2)}$, et reductis ad denominatorem eundem, ac per u^μ divisis fit

$$\mu + 2 - (\mu + 2) u^2 > \mu u^2,$$

si u^2 non $> \frac{1}{2}$; nam $u < 1$, adeoque et membrum ad lævam positivum est, additoque positivo æquali et utrinque dividendo fit $\frac{(\mu+1)+1}{2(\mu+1)}$ ad lævam, et u^2 ad dextram; atque manifesto pro u^2 non $> \frac{1}{2}$, membrum lævum maius dextro est.

Denotetur 100 000 per b, atque pro a non $< 1^\circ 9'$, Sin. a dicatur pb; erit

$$pb > 200\ 000\ 000;$$

et incrementum ipsius Sin. a pro incremento s ipsius a sit q; est hoc pro $a = 0$ quoque < 5, postea decrescens crescente a (pag. 569). Excedit $pb + f$ ipsum $pb + \frac{q}{n}$ quantitate < 13; si igitur

$$\log. \left(pb + \frac{q}{n}\right)$$

dicatur L, erit (pag. 517)

$$\log. \left(pb + \frac{q}{n} + 13\right) = L + \frac{2 . 13}{2\left(pb + \frac{q}{n}\right) + 13},$$

ubi differentiam perexiguam esse levi computo liquet.

Itaque si pro $pb + f$ accipiatur $pb + \frac{q}{n}$, et incrementis logarithmicis ipsius pb illis, quæ respondent incrementis numericis q et $\frac{q}{n}$ nonnisi termini primi considerentur (iuxta pag. 517) incrementum logarithmicum ipsius pb pro incremento numerico q ipsius pb erit

Hosted by Google

$$\frac{2q}{2pb+q},$$

quod per n divisum

$$= \frac{2q}{n(2pb+q)};$$

pro incremento numerico $\frac{q}{n}$ autem erit

$$\frac{2q}{n(2pb+q:n)};$$

cuius differentia a $\frac{2q}{n(2pb+q)}$ est $< \frac{q^2(n-1)}{2n^2p^2b^2}$;

quod per modulum systematis multiplicatum ultra bis minor fiet, adeoque fiet

$$< \frac{q^2(n-1)}{4n^2p^2b^2}.$$

Erat $n > 1$; sit $n = \frac{M}{m}$ (pro integris M, m); facile patet esse

$$\frac{n-1}{n^2} = \frac{Mm-m^2}{M^2},$$

atque (pag. 345) maximum eius valorem fieri pro $m = \frac{M}{2}$, nempe pro $n = 2$ esse $\frac{1}{4}$. Est vero pro isto valore quoque differentia dicta

$$< \frac{25}{16p^2b^2},$$

quod ipsa p e tabulis eximendo computari potest. Iam pro $a = 1°9'$ est $p > 2000$, adeoque differentia < 1 diviso per 1 cum 16 cifris; pro aliis valoribus ipsius n, quam valoribus ipsius a autem maioribus adhuc minor fit.

Eodem modo patet, etiamsi s unum minutum enotet, atque a excedat $6°19'$, errorem exiguum esse.

Hosted by Google

VI. *In pluribus tabulis usque* $1^\circ\, 19'$ *arcus per* $10''$ *crescunt, et in prima columna ad laevam arcus in secundis expressus est.*

Nam si N sit multiplum decadis secundorum, et v sit <10, (ex. gr. pro $N+v=206$ est $N=200$ et $v=6$), erit cum errore exiguo

$$N : N+v = \sin. N'' : \sin. (N+v)'' ;$$

adeoque

$$\log. \sin. (N+v)'' = \log. \sin. N'' + \log. (N+v) - \log. N.$$

Namque

$$\mathrm{Sin.}\, N'' : \mathrm{Sin.}\, (N+v)'' = \sin. N'' : \sin. (N+v)'',$$

essetque

$$N : N+v = \sin. N'' : \sin. N''. \frac{N+v}{N} \cdot$$

Itaque nonnisi in

$$\sin. N''. \frac{N+v}{N} - \sin. (N+v)''$$

inquirendum est.

Erat pro radio 1,

$$1'' = \frac{1}{10k}$$

adeoque

$$N'' = \frac{N}{10k} ;$$

atque (ut supra)

$$\frac{N+v}{N} \sin. \frac{N}{10k} = \frac{N+v}{10k} - \frac{N^2 (N+v)}{2 \cdot 3 (10k)^3} + \frac{N^4 (N+v)}{2 \cdot 3 \ldots 5 (10k)^5} - \cdots$$

Ita

$$\sin. \frac{N+v}{10k} = \frac{N+v}{10k} - \frac{(N+v)^3}{2 \cdot 3 (10k)^3} + \frac{(N+v)^5}{2 \cdot 3 \ldots 5 (10k)^5} - \cdots$$

Et differentia est

$$= \frac{(N+v)\big((N+v)^2 - N^2\big)}{2 \cdot 3 (10k)^3} + \frac{(N+v)\big(N^4 - (N+v)^4\big)}{2 \cdot 3 \ldots 5 (10k)^5} + \cdots$$

Formetur hinc series nova; nimirum reddantur positivi etiam termini negativi, et tum pro termino secundo ponatur

$$\frac{(N+v)^5}{2 \cdot 3 \ldots 5 (10k)^5},$$

et ab hoc ipso incipiendo multiplicetur quivis per

Hosted by Google

$$\frac{(N+v)^2}{6.7(10k)^2},$$

ut fiat series sequens:

$$\frac{(N+v)^3-(N+v)N^2}{2.3(10k)^3}+\frac{(N+v)^5}{2.3\ldots5(10k)^5}+\frac{(N+v)^7}{2.3\ldots7(10k)^7}+\cdots$$

ubi terminus primus primo æqualis, sed quilibet t-tus maior t-to prioris est. Fietque summa huius seriei (propter exponentem <1)

$$=\frac{(N+v)^3-N^2(N+v)}{2.3(10k)^3}+\frac{7(N+v)^5}{4.5(10k)^3(6.7(10k)^2-(N+v)^2)}$$

quod et pro maximo valore ipsius N calculo inito perexiguum esse patebit, etsi per r multiplicetur, ut differentia pro radio tabulari prodeat.

VII. Si arcus $\backsim 0$, tum sinus quoque $\backsim 0$, et logarithmus sinus $\backsim -\infty$ (pag. 188); sed tum alioquin etiam numeri sinus arcuum adeo exiguorum exprimentes minores sunt, adeoque logarithmi magis differunt, quam proportio supra dicta valeat.

VIII. Potest logarithmus cuiusvis quantitatis immediate per seriem (pag. 178) in quotvis notis decimalibus computari, sufficientibus terminis sufficienter evolutis. Si vero logarithmus unus reperiatur, per formulam (pag. 517) semper ulterius progredi licet; et si $p>100000$ et log. p e tabulis datus sit, nonnisi 6 termini satis evolvendi erunt, ut logarithmus in notis 59 prodeat; nam $(2p)^{11}$ in denominatore ad minimum erit $2^{11}.10^{11.5}$, et 2^{11} constat ex 4 notis.

E logarithmo numerus pariter absque tabulis quoque per seriem (pag. 187) prodit. Si b ut logarithmus naturalis respondeat numero N, erit

$$N=e^b=1+b+\frac{b^2}{2}+\cdots$$

Si vero β sit log. N' quoad basim 10, sitque $e^c=10$, erit

$$10^\beta=e^{c\beta}=N',$$

et

$$N'=1+c\beta+\frac{c^2\beta^2}{2}+\cdots$$

Hosted by Google

sive si modulus μ dicatur, erit (pag. 163)

$$\mu = \frac{1}{c} = \frac{1}{\text{log. nat. } 10},$$

et

$$N' = 1 + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} + \cdots$$

Sed ope tabularum, in quibus logarithmi in pluribus notis computati exstant, præstatur idem facilius per differentias primas secundasque.

Sit series quæcunque		$(U)_0$,	$(U)_1$,	$(U)_2$,	... (primitiva dicta),
series differentiarum	primarum	$(D)_0$,	$(D)_1$,	$(D)_2$,	...
« «	secundarum	$(D^2)_0$,	$(D^2)_1$,	$(D^2)_2$,	...
« «	tertiarum	$(D^3)_0$,	$(D^3)_1$,	$(D^3)_2$,	...
. . . . .					

Nempe cuiusvis lineæ (excepta suprema) terminus quivis t denotet differentiam termini T in linea proxima superiore supra stantis, a termino T' ad dextram horizontaliter sequente; sit ex. gr.

$$(D^m)_\mu = (D^{m-1})_{\mu+1} - (D^{m-1})_\mu .$$

Unde etiam $T' = T + t$; nempe quivis terminus est summa præcedentis et hunc verticaliter deorsum excipientis.

Erit terminus n-tus seriei primitivæ

$$(U)_0 + n(D)_0 + \frac{n(n-1)}{2}(D^2)_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}(D^3)_0 + \cdots$$

ubi coefficientes binomiales esse patet. Pro valoribus 2, 3 ipsius n enim ab inductione patet; nam

$$(U)_2 = (U)_1 + (D)_1 = (U)_0 + (D)_0 + (D)_0 + (D^2)_0 = (U)_0 + 2(D)_0 + (D^2)_0$$

ita

$$\begin{aligned}(U)_3 = (U)_2 + (D)_2 &= (U)_0 + 2(D)_0 + (D^2)_0 + (D)_0 + 2(D^2)_0 + (D^3)_0 \\ &= (U)_0 + 3(D)_0 + 3(D^2)_0 + (D^3)_0 .\end{aligned}$$

Si vero de $n-1$ valet, valet de n quoque. Erit enim

Hosted by Google

$$(U)_n = (U)_{n-1} + (D)_{n-1} =$$
$$= (U)_0 + (n-1)\ (D)_0 + \frac{(n-1)\,(n+2)}{2}(D^2)_0 + \cdots + \frac{(n-1)\ldots(n-m)}{1\,.\,2\,\ldots\,m}(D^m)_0 + \cdots$$
$$+ (D)_0 + (n-1)\ (D^2)_0 + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}(D^3)_0 + \cdots +$$
$$+ \frac{(n-1)\ \ldots\ (n-(m-1))}{1\,.\,2\,\ldots\,(m-1)}(D^m)_0 + \cdots$$

quia si suprema deleta sequens pro primitiva reputetur, idem valebit.

Patet autem coefficientium ipsius $(D^m)_0$ summam esse

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1\,.\,2\,\ldots\,m},$$

nempe idem, quod formula pro $(U)_n$ dat. Fient autem termini omnes o ab $(n+1)$-to incipiendo, primo haud annumerato; quia tum factor $n-n$ ubique manebit.

Sit iam series

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ \ldots,$$

cuius terminus n-tus sit

$$(U)_0 + \frac{n}{m}(D)_0 + \frac{n\,(n-m)}{2m^2}(D^2)_0 + \frac{n\,(n-m)\,(n-2m)}{2\,.\,3m^3}(D^3)_0 + \cdots$$

ubi m integrum constantem, n autem numerum termini, primo haud annumerato, denotent. Erunt termini sequentes

$$(u)_1 = (U)_0 + \frac{1}{m}(D)_0 + \frac{1}{2\,.\,m}\cdot\frac{1-m}{m}(D^2)_0 + \frac{1}{2\,.\,3m}\cdot\frac{1-m}{m}\cdot\frac{1-2m}{m}(D^3)_0 + \cdots$$
$$(u)_2 = (U)_0 + \frac{2}{m}(D)_0 + \frac{2}{2\,.\,m}\cdot\frac{2-m}{m}(D^2)_0 + \frac{2}{2\,.\,3m}\cdot\frac{2-m}{m}\cdot\frac{2-2m}{m}(D^3)_0 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(u)_{tm} = (U)_0 + \frac{tm}{m}(D)_0 + \frac{tm}{2m}\cdot\frac{tm-m}{m}(D^2)_0 +$$
$$+ \frac{tm}{2\,.\,3m}\cdot\frac{tm-m}{m}\cdot\frac{tm-2m}{m}(D^3)_0 + \cdots$$
$$= (U)_0 + t(D)_0 + \frac{t\,(t-1)}{2}(D^2)_0 + \frac{t\,(t-1)\,(t-2)}{2\,.\,3}(D^2)_0 + \cdots$$
$$= (U)_t\ ;$$

Hosted by Google

nempe seriei

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ \ldots$$

terminus tm-tus est seriei

$$(U)_0,\ (U)_1,\ (U)_2,\ \ldots$$

terminus t-tus; dicitur terminus v-tus seriei prioris posterioris $\frac{v}{m}$-tus; patetque v-tum prioris prodire, si in termino generali posterioris pro n ponatur $\frac{v}{m}$; et quum a quovis termino posterioris usque ad sequentem numero $m-1$ novi termini sint, dicuntur hi *interpolati*, et terminus generalis dictus est formula n-ti interpolati; cuius frequens applicatio fit.

Facile autem ex hoc regularum, quæ tam pro logarithmo in pluribus notis, aut conversim numero accuratius, quam functionum trigonometricarum logarithmis, aut conversim ipsis functionibus reperiundis, in tabulis maioribus, ubi omnia pluribus notis expressa exstant, datarum ratio intelligitur. Nempe ubi logarithmus nonnisi 7 notis decimalibus exprimitur, differentiæ secundæ simulac numerus (pag. 518.) N per comma resectus prope 10 000 est, fierent zero.

Scholion 1. *Si*

$$(U)_0+(U)_1+\cdots+(U)_{n-1}$$

denotetur per $(S)_n$ *erit*

$$(S)_n=n(U)_0+\frac{n(n-1)}{2}(D)_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}(D^2)_0+\cdots$$

Est enim

$$(S)_n=(S)_{n-1}+(U)_{n-1};$$

itaque si de $(S)_{n-1}$ valeat, substituendo valorem ipsius $(U)_{n-1}$ patet u ante. Valet autem ab inductione pro valoribus 2, 3 ipsius n.

Si iam pro serie

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ \ldots$$

eædem denotationes fiant, nonnisi d pro D et s pro S ponendo: manifesto erit

$$(u)_n=(U)_0+n(d)_0+\frac{n(n-1)}{2}(d^2)_0+\cdots$$

$$=(U)_0+\frac{n}{m}(D)_0+\frac{n}{2m}\cdot\frac{n-m}{m}(D^2)_0+\cdots;$$

Hosted by Google

atque

$$(s)_n = n(U)_0 + \frac{n(n-1)}{2}(d)_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}(d^2)_0 + \cdots.$$

SCHOLION 2. Est quoque series dicta quævis *series arithmetica ordinis* μ-ti, si series differentiarum μ-ta sit, terminis æqualibus gaudens; ubi vero hoc cum errore exiguo fuerit, pro tali in tantum reputari poterit. Atque hinc

SCHOLION 3. *Exempla quaedam.*

I. *Sit quaerendus ex. gr. log.* 143 957 432; et 143 957 dicatur N (pag. 519), et 0,432 sit f subeatque vicem ipsius $(n:m)$ pag. 578; sitque

$$(U)_0 = \log. 143\ 957, \quad \text{et} \quad (U)_1 = \log. 143\ 958;$$

atque adsint logarithmi ipsorum N, $N+1$, $N+2$, $N+3$ in pluribus notis decimalibus, et adsint $(D)_0$, $(D^2)_0$, $(D^3)_0$. Prodibit, terminis inter log. N et log. $(N+1)$ quasi numero $m-1=999$ interpolatis $(U)_0$, 432 per formulam; nempe $n = 432$, et $m = 1000$. Siquidem libuerit, ad $(D)_0$ vel $(D^2)_0$ subsistere licebit, nisi maior accuratio desideretur. Notandumque est, differentiam, ubi negativa est, ita uti est, accipiendam esse. Si autem pro $N+f$ prodierit, facile (ut pag. 519) pro numero dato, mutata characteristica liquet.

II. Converti etiam potest. *Sit numerus* ex. gr. ipsi 1 023 578, omissa characteristica, soli mantissæ *respondens quaerendus.* Sit

$$10235 = 10235v = Qv.$$

Numeri ipsis

$$Qv,\ (Q+1)v,\ Q+2)v,\ (Q+3)v$$

respondentes sint

$$N,\ N',\ N'';$$

adsintque hi in pluribus notis, simul cum horum differentiis numericis

$$(D)_0,\ (D^2)_0,\ (D^3)_0.$$

Hosted by Google

Erit mantissa data

$$= 10235v + 0{\cdot}78v.$$

Itaque si ponatur

$$(U)_0 = N, \quad \text{et} \quad (U)_1 = N',$$

terminis inter $(U)_0$ et $(U)_1$ quasi interpolatis, 78-tus per formulam prodibit.

III. Sit p multiplum decadis secundorum, et v numerus secundorum ipso 10″ minor et

$$\log.\sin.p = (U)_0, \ \log.\sin.(p+v) = (U)_1.$$

Interpolatis quasi 9 terminis, prodit v-tus per formulam, si adfuerint in tabulis $(D)_0$, $(D^2)_0$, . . .

Hosted by Google

L.

CRITERIA CONVERGENTIÆ SERIERUM.

I. Criterium convergentiæ nec

$$n U_n \backsim 0,$$

neque ab *Auctore celebri* allatum (pag. 177)

$$\frac{U_n \,.\, U_{n+1}}{U_n - U_{n+1}} \backsim 0$$

generale est; nam series, cuius terminus generalis $1 : n \log. n$ est, contra utrumque divergit, ut infra patebit.

II. Generale est a Maclaurino datum; nempe si pro $n = 1 + x$, et termino n-to æquali y, area curvæ pro x tendenti ad infinitum limite finito gaudet, convergit series, si vero area tendit ad infinitum, divergit; nimirum si termini rectangulis exprimantur, quorum bases sint unitates ab $x = 0$ se invicem excipientes, altitudines autem ordinatæ ad initia unitatum fuerint, summa seriei est maior quam area, sed excessus termino primo minor est, adeoque quæstio ad $\int y\dot{x}$ reducitur.

III. Errat autem ex hoc fonte derivando pronuntiens Montucla, quod si a, b, c generaliter tres terminos se invicem excipientes denotent et

$$\frac{a(b-c)}{a-b} \succ c$$

fuerit, converget series, si non, diverget.

Nam tum pro a, b, c scribendo

$$\frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{\omega'}, \quad \frac{1}{\omega''}$$

si

$$\omega'' - \omega' \succ \omega' - \omega$$

Hosted by Google

fiet

$$\frac{\omega''-\omega'}{\omega'-\omega}=\frac{(\omega''-\omega')\,\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\,\omega\omega'}\succ 1,$$

itaque

$$\frac{1}{\omega}\,\frac{(\omega''-\omega')\,\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\,\omega'\omega''}\succ\frac{1}{\omega''}$$

idest

$$\frac{a\,(b-c)}{a-b}\succ c.$$

Atque si terminus generalis fuerit

$$\frac{1}{\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\cdots+\frac{n-(n-1)}{2^{n-1}}},$$

et tres termini se invicem excipientes habeant denominatores

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},$$

$$\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

erit

$$\omega'-\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},$$

et

$$\omega''-\omega'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

atque posterius excedit termino ultimo ipsum $\omega'-\omega$, quamvis series divergat. Namque incrementum denominatoris est <1 et decrescit, quamvis si constans 1 esset quoque, uti pro termino generali $\frac{1}{n}$, divergat.

IV. Si terminus generalis ad $\frac{1}{nn^h}$ reducatur: pro $h=0$ fit terminus generalis $\frac{1}{n}$ et si h negativum fuerit adhuc magis diverget series; si vero $h\backsim 0$, tum n^h aut tendit ad infinitum aut non; in casu posteriore divergit series, nam si convergit tum $nU_n\backsim 0$; quæstio igitur de altero casu erit. At sit prius $h>b$, constantem positivum denotante b: tum convergit series.

Hosted by Google

Nam sit

$$n = 1 + x$$

et

$$y = (1 + x)^{-(1+b)}$$

et area sit $A(x)$; *differentiale* est

$$y\dot{x} = (1 + x)^{-(1+b)}\dot{x}$$

cuius *integrale*

$$B(x) = -\frac{1}{b}(1 + x)^{-b},$$

itaque

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0)$$

et quia $A(0) = 0$, fit

$$A(x) = \frac{1}{b} - \frac{1}{b(1 + x)^b},$$

quod $\backsim \frac{1}{b}$, si $x \backsim \infty$.

Abscissa in ordinata ad initium ipsius x accipi potest, si a fine deorsum moti puncti via u dicatur, quo pacto

$$y = 1 - u,$$

et ordinata e fine ipsius u usque ad curvam est

$$x = (1 - u)^{-\frac{1}{1+b}} - 1;$$

nam ad finem huius x erat

$$y = (1 + x)^{-(1+b)} = 1 - u;$$

itaque

$$1 + x = (1 - u)^{-\frac{1}{1+b}}, \text{ et } x = (1 - u)^{-\frac{1}{1+b}} - 1.$$

Sit $A(u)$ area; *differentiale* est

$$x\dot{u} = (1 - u)^{-\frac{1}{1+b}}\dot{u} - \dot{u},$$

cuius *integrale*

$$B(u) = -\frac{1+b}{b}(1 - u)^{\frac{b}{1+b}} - u.$$

Itaque

$$A(u) - A(0) = B(u) - B(0),$$

Hosted by Google

et cum $A(0)=0$, fit

$$A(u)=-u+\frac{1+b}{b}-\frac{1+b}{b}(1-u)^{\frac{b}{1+b}},$$

quod pro $u=1$ fit $\frac{1}{b}$, ut antea.

V. Prouti vero convergit vel divergit series, cuius terminus generalis est $\frac{1}{n^a}$, pro eodem a simul convergit vel divergit series, cuius terminus generalis est $\frac{1}{nl^a}$ vel $\frac{1}{nl\,l_1^a}$ aut generaliter $\frac{1}{nl\,l_1\ldots l_t^a}$ pro

$$l=\log.n,\ \text{ac}\ l_1=\log.l\quad\text{et}\quad l_t=\log.l_{t-1}$$

atque pro l_t non <1.

Nam sit, logarithmos perinde quoad basim 10 intelligendo, et l logarithmum numeri præcedentis denotante,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10\,l^a}+\frac{1}{11\,l^a}+\cdots\\ +&\frac{1}{100\,l^a}+\frac{1}{101\,l^a}+\cdots\\ +&\frac{1}{1000\,l^a}+\frac{1}{1001\,l^a}+\cdots\end{aligned}$$

Numerus terminorum a primo usque ad illum, ubi 100, est 90, et inde usque 1000 est 900, et ita porro; sitque priorum summa α, sequentium β, et ita porro; atque ubivis multiplicetur primus, utpote quovis sequentium maior, per numerum terminorum; fiet

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10}\quad 90>\alpha,\\ &\frac{1}{100\,.\,2^a}\quad 900>\beta,\\ &\frac{1}{1000\,.\,3^a}\quad 9000>\gamma,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\end{aligned}$$

adeoque

$$9\left(1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots\right)>\alpha+\beta+\gamma+\cdots$$

Hosted by Google

Si igitur series inclusa convergit, convergit et proposita. Si vero pro iprmo ubique ultimus, utpote quovis priorum minor, multiplicetur: fiet

$$\frac{90}{100 \,.\, 2^a} + \frac{900}{1000 \,.\, 3^a} + \cdots$$

id est

$$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots\right) < \alpha + \beta + \cdots$$

Si igitur series inclusa divergit, et proposita divergit.

Atque si

$$\frac{1}{C_p l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \frac{1}{(C_p+1)\, l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \frac{1}{(C_p+2)\, l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \cdots$$

dicatur A, et

$$\frac{1}{C_{p+1} l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} + \frac{1}{(C_{p+1}+1)\, l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} + \frac{1}{(C_{p+1}+2)\, l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} +$$

dicatur B; prouti A convergit aut divergit, B quoque converget vel diverget. Nempe C_0 denotet tantum quam 0, et C_m tantum quam 1 postscriptis C_{m-1} cifris: quo pacto C_1 est æquale 1, C_2 æquale 1 cum C_1 [idest 1] cifra, C_3 æquale 1 cum C_2 [idest 10] cifris et ita porro. Patet esse

$$C_{p+1} = 10^{C_p} \quad \text{adeoque} \quad C_p = \log. C_{p+1}.$$

Assertum patet sic. In serie B ipsi C_{p+1} semper 1 addendo, aliquando prodit

$$C_{p+1} \,.\, 10, \quad \text{tum} \quad C_{p+1} \,.\, 100, \quad \text{dein} \quad C_{p+1} \,.\, 1000, \quad \&.$$

Est vero numerus terminorum a primo usque $C_{p+1} \,.\, 10$

$$C_{p+1} \,.\, 10 - C_{p+1},$$

inde usque $C_{p+1} \,.\, 100$

$$C_{p+1} \,.\, 100 - C_{p+1} \,.\, 10,$$

et ita porro. Multiplicetur et hic prius ubique primus per numerum terminorum, sitque terminorum priorum summa k, sequentium k' &.; fiet

Hosted by Google

$$\frac{C_{p+1}.10 - C_{p+1}}{C_{p+1} l\, l_1 \ldots l^a_{p-1}} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{C_p l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} > k,$$

nempe post C_{p+1} sequitur C_p in denominatore; porro

$$\frac{C_{p+1}.100 - C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.10)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-1}} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{(C_p+1)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} > k',$$

nempe $\log.(C_{p+1}.10) = 1 + C_p$, &c; quo continuato fiet

$$9\left(\frac{1}{C_p l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} + \frac{1}{(C_p+1)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} + \cdots\right) > k + k' + \cdots$$

Si igitur inclusa series A converget, converget et B.

Si vero in B ubique ultimus multiplicetur per numerum terminorum, fiet

$$\frac{C_{p+1}.10 - C_{p+1}}{(C_{p+1}.10)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-1}} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{10(C_p+1)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} < k,$$

nempe $C_p + 1$ est $\log.(C_{p+1}.10)$; pariter

$$\frac{C_{p+1}.100 - C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.100)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{10(C_p+2)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} < k',$$

nempe $C_p + 2 = \log.(C_{p+1}.100)$; quo continuato fit

$$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{(C_p+1)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} + \frac{1}{(C_p+2)\, l\; l_1 \ldots l^a_{p-2}} + \cdots\right) < k + k' + \cdots$$

Itaque si A divergit et B divergit.

Consequenter quum de $p = 2$ demonstratum sit, semper uno altius assurgere fas est.

VI. Hinc autem criterium sæpe expediens est sequens: quod *si detur tale r, quod tendit ad infinitum, convergit series, et si post certum terminum non fuerit $r > 1$, divergit.*

Nempe termino generali ad $\frac{1}{n.n^h}$ reducto sit

Hosted by Google

$$n^h = l^r$$

$\left(\text{nimirum } r = \frac{hl}{l_1}\right)$; et si $r > 1$, sit

$$l^r = l\, l_1^{r'}$$

et si $r' > 1$, sit

$$l_1^{r'} = l_1 l_2^{r''}$$

et ita porro; fiet

$$n^h = l^r = l\, l_1^{r'} = l\, l_1 l_2^{r''} = \cdots$$

et hinc

$$l_t^{r_t} = \frac{n^h}{l\, l_1 l_2 \ldots l_{t-1}}$$

itaque

$$r_t = \frac{hl - (l_1 + l_2 + \cdots + l_t)}{l_{t+1}} = \frac{(r_{t-1} - 1)\, l_t}{l_{t+1}},$$

si et r_{t-1}, ut antea r_t, exprimatur.

Si igitur $r_{t-1} - 1$ non $\backsim 0$, $r_t \backsim \infty$; atque tum $r_{t-1} > 1 +$ constans; adeoque series convergit.

Datur autem pro quovis t et a finito tale h, ut $r_t = a$ sit, et quodvis r antea sit $>$ et $\backsim 1$, nempe pro

$$h = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_t + a l_{t+1}}{l}$$

fit hoc; ex. gr.

$$r_3 = \frac{l_4}{l_4} + \frac{l_5 + l_6 + \cdots + a l_{t+1}}{l_4}$$

est $= 1 +$ tali, quod $\backsim 0$. Si vero l_p in expressione hac ipsius h desit, $r_{p-1} \backsim 0$, et divergit series; ex. gr. si in exemplo allato defuerit l_4 in numeratore, $r_3 \backsim 0$.

VII. Exponente, per quam U_{n-1} multiplicatur, ut U_n prodeat, $\frac{n-m}{n}$ posito, fit

$$m = n - n\frac{U_n}{U_{n-1}},$$

Hosted by Google

quod si

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$$

fuerit, fit $=1$, datque terminum generalem $\frac{1}{n}$. Si vero

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} < \frac{n-1}{n}$$

tum minus subtrahitur et $m > 1$ fit.

Si m non > 1, divergit series; at pro m unitate maiore sed limite 1 gaudenti, potest convergens, potest divergens esse, quamvis $n^h \backsim \infty$. Nempe si

$$h = \frac{l_1}{l}$$

tum $r = 1$; si

$$h = \frac{1}{\sqrt{l}},$$

tum

$$r = \sqrt{l} : l_1 \backsim \infty$$

adeoque prius divergit, posterius convergit.

Patet quod $h \backsim 0$, et $n^h \backsim \infty$; sed quod m unitate maius limite 1 gaudet, sic patet. $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ in priore est

$$= \frac{n-1}{n}\left((n-1)^{\frac{L_1}{L}} : n^{\frac{l_1}{l}}\right),$$

cuius partis parenthesi maiori inclusæ logarithmus, si per L intelligatur log. $(n-1)$ et log. L per L_1 est $L_1 - l_1$, quod negativum est, adeoque per quod $\frac{n-1}{n}$ multiplicatur, <1 est, itaque $m > 1$. Quod autem $m \backsim 1$, inde constat, quod si

$$m = \frac{1}{2}(2 + v)$$

ponatur, pro v positivo et unitate non maiore, patebit in sequentibus, quod si v non $\backsim 0$, tum constante maius maneat h et non $\backsim 0$.

VIII. Si $m > 1$ et non $\backsim 1$, tum h constante maius est seriesque convergit. Nimirum exponens seriei fiet

Hosted by Google

$$\frac{n-m}{n}=\frac{2(n-1)-v}{2n}$$

et pro termino primo $=1$, erit n-tus

$$\frac{2-v}{4}\,\frac{4-v}{6}\cdots\frac{2(n-1)-v}{2n}=\frac{1}{nn^h};$$

atque

$$n^h=\frac{2}{2-v}\,\frac{4}{4-v}\cdots\frac{2(n-1)}{2(n-1)-v}$$
$$=\left(1+\frac{v}{2-v}\right)\left(1+\frac{v}{4-v}\right)\cdots\left(1+\frac{v}{2(n-1)-v}\right).$$

Et hinc

$$n^h>\left(1+\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{v}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{v}{2(n-1)}\right),$$

adeoque

$$h\log.n>\log.\left(1+\frac{v}{2}\right)+\log.\left(1+\frac{v}{4}\right)+\cdots+\log.\left(1+\frac{v}{2(n-1)}\right);$$

itaque h maius est membro dextro per log. n diviso: dicatur σ dividendus, divisor fit, pro $n=1+x$, area curvæ notæ pro

$$y=(1+x)^{-1};$$

estque [II et IV] area ista

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\varrho,\quad\text{ubi}\quad\varrho<1,$$

atque hinc

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}(\log.n+\varrho).$$

Est autem per (pag. 160)

$$\sigma=v\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}\right)$$
$$-\frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2(n-1))^2}\right)$$
$$+\frac{v^3}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{(2(n-1))^2}\right)$$
$$-\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Ubi si series suprema s dicatur, $\sigma>\frac{3}{4}s$ erit. Nam cuiusvis seriei verticalis termini fuerint

Hosted by Google

$$a,\ -b,\ c,\ -d,\ \ldots$$

summa est $> a-b$ et $< a$; nam ipsi $a-b$ accedit $c-d$, . . . et

$$a-b+c-d+\cdots = a-(b-c)-(d-e)-\cdots$$

ubi $b > c$ &c. Estque generaliter

$$a = \frac{v}{2(n-1)} \quad \text{et} \quad b = \frac{v^2}{2 \cdot 4(n-1)^2}$$

adeoque

$$a-b = \frac{4(n-1)v-v^2}{2 \cdot 4(n-1)^2} = \frac{v}{2(n-1)} \frac{4(n-1)-v}{4(n-1)} = a - \frac{av}{4(n-1)},$$

cuius valor minimus est pro maximo v et $n=2$, quo pacto summa erit $> \frac{3}{4}a$; itaque

$$\sigma > \frac{3}{4}s,$$

et consequenter

$$\sigma > \frac{3}{4} \frac{v}{2} (\log. n + \varrho),$$

atque h, quod $> \frac{\sigma}{\log. n}$ erat, est $> \frac{3v}{8}$.

Si igitur v non $\backsim 0$, nec $h \backsim 0$, itaqua series per IV convergit.

Potuisset quidem brevius quoque demonstrari.

Hosted by Google

M.

PRIMÆ LINEÆ CALCULI DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS BREVIUS ET CLARIUS TRACTATÆ.

Quum nulla repetitio inutilis sit, quæ saltem quorundam Tyronum captui accomodatior fieri queat, ideam calculi differentialis et integralis brevius evidentiusque referre licebit.

I. Variabilis x, a qua sive necessario sive certa suppositione dependent quotvis variabiles y, z, . . . dicatur *absoluta*, sintque eius valores γ et β (a 0 accepti, et sive ambo positive sive ambo negative imo et alter positive alter negative), denoteturque pro n integro positivo $\frac{\gamma}{n}$ per $\dot{x}$, sitque pro μ integro positivo vel negativo

$$\beta = \mu\dot{x} + \omega, \qquad [\omega = 0 \quad \text{vel} \quad \omega < \dot{x}],$$

ita ut $\mu\dot{x}$ et ω aut utrumque positivum aut utrumque negativum sit, aut et $\beta = 0$ sit.

II. Sit functio $K(x)$, dicaturque *ex ea* vel *eius derivata series* sequens:

$$K(n\dot{x}) - K\big((n-1)\dot{x}\big), K\big((n-1)\dot{x}\big) - K\big((n-2)\dot{x}\big), \ldots, K\big((\mu+1)\dot{x}\big) - K(\mu\dot{x}+\omega),$$

sitque m nomen generale ipsorum

$$n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots,\ \mu+2,\ \mu+1.$$

Esset (inde a 0) seriei dictæ terminus m-tus

$$K(m\dot{x}) - K\big((m-1)\dot{x}\big),$$

si pro $m-1=\mu$ addatur ω ipsi $(m-1)\dot{x}$. Denotetur iste terminus m-tus per $k(m\dot{x})$. Eritque summa, terminis intermediis se mutuo destruentibus,

$$K(\gamma) - K(\beta)$$

Hosted by Google

pro valoribus dictis ipsius x. Denotetur summa hæc per K, nomenclatione ista in posterum quoque retenta.

Patet autem m etiam negativum esse posse, si ex. gr. $\mu + 2 = 0$ fuerit.

Casus simplicissimus est, si $\beta = 0$, et tum

$$K = K(\gamma) - K(0).$$

III. Functio, e qua derivatæ seriei summa a magnitudine ipsius n haud dependet, dicatur *absoluta* sive ab n *independens.*

Ex. gr. sit $\beta = 0$; et sit

$$C(x) = x;$$

erit

$$c(m\dot{x}) = m\dot{x} - (m-1)\dot{x} = \dot{x}$$

et

$$C = n\dot{x} - 0 = x.$$

Ita pro

$$A(x) = x^2$$

erit

$$a(m\dot{x}) = 2m\dot{x} - \dot{x}^2,$$

et

$$A = x^2.$$

Pro

$$U(x) = x^2 + x\dot{x} = (n+1)n\dot{x}^2$$

est

$$u(m\dot{x}) = 2m\dot{x}^2$$

atque

$$U = x^2 + x\dot{x},$$

quod ab n dependere, uti C et A haud dependere manifestum est.

IV. Si iam valor ipsius n a certo incipiendo semper porro bis augeatur, atque prius pro valore eius primo construantur series derivatæ functionum certorum $A(x)$ et $B(x)$ ab n independentium, ac functionis cuiuspiam $U(x)$ eadem linea horizontali (serie ipsius $U(x)$ in medium, serie ipsius $A(x)$ ad dextram, serieque ipsius $B(x)$ ad lævam positis) atque pro valoribus sequentibus ipsius n construantur pariter series functionum $B(x)$, $U(x)$, $A(x)$, pro quovis n in eadem horizontali ita ut lineæ hac crescente n se invicem deorsum excipiant, et series $U(x)$ columnam mediam, series

Hosted by Google

ipsius $A(x)$ dextram, series ipsius $B(x)$ lævam teneant, (ex. gr. sit primum $n=2$, postea sequentia erunt 4, 8, . . . , quæ incrementi ipsius n ratio et posthac servetur); sitque

$$\beta = \mu\dot{x} + \omega = \mu'\dot{x}' + \omega';$$

fiet

$$\begin{array}{c|c|c} B(2\dot{x})\cdots - B(\beta) & U(2\dot{x})\cdots - U(\beta) & A(2\dot{x})\cdots - A(\beta) \\ B(4\dot{x}')\cdots - B(\beta) & U(4\dot{x}')\cdots - U(\beta) & A(4\dot{x}')\cdots - A(\beta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

ubi pro quovis n quodvis $m\dot{x}$ pro sequente n mutatur in $2\ m\dot{x}'$, ω' vero (nisi $=0$ fiat) ipso $\dot{x}'$, idest dimidio prioris $\dot{x}$ minus evadet, et μ' ad summum $=2\mu+1$ erit, quia $\omega \lessdot 2\dot{x}'$ est, atque numerus terminorum duplicatur.

Scholion. *Manifesto autem quævis serierum horum terminis extremis gaudet, sed in nulla trium columnarum serialium dictarum series ultima datur; differt igitur series eiusmodi a serie vulgari infinita, quæ duobus terminis extremis haud gaudet.*

V. Sit iam $B(x)$ notum et quæratur $A(x)$, atque $u(m\dot{x})$ æquipolleat tam ipsi $a(m\dot{x})$ quam ipsi $b(m\dot{x})$, idest aut pro quovis n sit

$$u(m\dot{x}) = a(m\dot{x}) = b(m\dot{x})$$

pro quovis m (quo in casu erit $A=B=U$, nec U ab n dependet), aut pro quovis utvis magno N detur tale n, ut in eius linea horizontali, pro quovis valore ipsius m sit

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}\, a(m\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(m\dot{x}) - b(m\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}\, b(m\dot{x});$$

saltem nonnisi illis $m\dot{x}$ exceptis, quæ in certis casibus in dato quopiam λ desinunt, siquidem tam illud λ quam partes ipsorum B, U, A huic λ appertinentes tendunt ad zero. Fiet tum, substituendo valores ipsius m (si ex. gr. pro dato N sufficiat $n=9$, sitque $\mu+1=5$),

Hosted by Google

$$u(9x)-a(9\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}a(9\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(9\dot{x})-b(9\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}b(9\dot{x})$$

$$u(8\dot{x})-a(8\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}a(8\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(8\dot{x})-b(8\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}b(8\dot{x})$$

. . . . . .

$$u(5\dot{x})-a(5\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}a(5\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(5\dot{x})-b(5\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}b(5\dot{x})$$

. . . . . .

Eritque manifesto summa columnæ verticalis prioris U, sequentis A, tertiæ $\frac{A}{N}$, quartæ U, quintæ B, ultimæ $\frac{B}{N}$ fietque

$$U-A \lessdot \frac{A}{N} \quad \text{et} \quad U-B \lessdot \frac{B}{N},$$

adeoque pro A et B omnino finitis $U \backsim A$ ac $U \backsim B$. Consequenter

$$A = B,$$

nempe

$$A(\gamma)-A(\beta) = B(\gamma)-B(\beta),$$

adeoque

$$A(\gamma) = B(\gamma)+A(\beta)-B(\beta).$$

Reperitur autem $A(\beta)$ modo sequente: si dicta et de valore h ipsius x plane ut de γ valeant, et constet $A(h)=a$ esse, erit

$$A(h) = a = B(h)+A(\beta)-B(\beta),$$

adeoque

$$A(\beta) = a - B(h) + B(\beta)$$

atque

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= B(\gamma)+a-B(h)+B(\beta)-B(\beta) \\ &= B(\gamma)+a-B(h). \end{aligned}$$

Quum igitur $B(\gamma)$ et $B(h)$ nota sint, $A(\gamma)$ innotescit. Scribitur autem

$$A(x) = B(x) + \text{constans},$$

quum $A(\beta)-B(\beta)$ de quovis valore ipsius x, de quo dicta valent, idem $a-B(h)$ sit.

Dicique potest $B(x)$ *functio summatrix* et $U(x)$ *functio mediatrix*.

Hosted by Google

VI. Si et variabiles y, z, . . . certa lege cum quovis $m\dot{x}$ posita fuerint, cuiusvis illius y, quod cum aliquo $m\dot{x}$ ponitur differentia ab illo y, quod cum $(m-1)\dot{x}$ ponitur, designetur per $\dot{y}$; idem de z, . . . intelligatur, atque $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, . . . semper simultanea accipiantur. Potest illud y, quod cum $m\dot{x}$ ponitur, per $y(m\dot{x})$ denotari.

VII. Dicuntur $a(m\dot{x})$, $u(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$ id est

$$A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big),\quad U\big((m\dot{x})-U\big((m-1)\dot{x}\big),\quad B(m\dot{x})-B\big((m-1)\dot{x}\big)$$

differentialia vera functionum $A(x)$, $U(x)$, $B(x)$. At si detur tale $u'(m\dot{x})$, quod ipsis $a(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})$ sensu dicto æquipolleat, atque ita expressum sit, ut si in eo ubique x pro $m\dot{x}$ (et si adfuerit, y pro $y(m\dot{x})$ &c.) ponatur, in nullo termino litera punctata per aliam punctatam multiplicata occurat: dicitur $u'(x)$ breviter *differentiale* tam ipsius $A(x)$ quam ipsius $B(x)$ atque $A(x)$ imo et $B(x)$ (quæ nonnisi constante differunt) dicitur *integrale* ipsius $u'(x)$. Omniaque hic a valore β ipsius x usque ad γ (iuxta dicta) intelligantur.

VIII. Aequipollent autem sensu dicto $a(m\dot{x})$, $u'(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$, si

$$\frac{u'(x)}{a(x)} \backsim 1 \quad \text{et} \quad \frac{u'(x)}{b(x)} \backsim 1.$$

Namque valores horum pro certis quibusvis valoribus ipsius x aut plurium variabilium, si adfuerint, ab n dependent, atque tendentia ad limitem 1 id significat, quod pro quovis utvis magno N detur tale n, ut sit

$$\frac{u'(x)}{a(x)} - 1 \lessdot \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \frac{u'(x)}{b(x)} - 1 \lessdot \frac{1}{N};$$

hinc autem fit

$$u'(x)-a(x) \lessdot \frac{1}{N}\, a(x) \quad \text{et} \quad u'(x)-b(x) \lessdot \frac{1}{N}\, b(x).$$

Atque iam moveatur punctum a 0 usque ad finem ipsius γ, item a 0 usque ad finem ipsius β (si hoc non sit $=0$), et quæratur ubique, quodnam n pro dato N satisfaciat illi x quod eousque determinatum est,

Hosted by Google

respondebitur semper cum aliquo finito n. Unde manifesto dabitur numerus finitus quemvis dictorum finitorum superans; accipiatur tale n', quod hunc quoque superet et sit potentia binarii integra. Et manifesto, si γ per n' dividatur, ut sit $\dot{x} = \frac{\gamma}{n'}$, valebit hoc n' pro linea horizontali illa, in qua $n = n'$ fit, eritque idem n (pro dato N) pro omnibus m lineæ eiusdem tale, ut requiritur (in V).

Siquidem detur λ (sub V), exceptionem hanc in summis nihil inducere patet.

IX. Si

$$b(x) = (uv + pr + \cdots) + \omega,$$

ubi terminus quivis præter unum et ω, 0 denotare potest, atque

$$\frac{\omega}{uv + pr + \cdots} \backsim 0,$$

tum cuicunque quantitatum in

$$uv + pr + \cdots$$

accurentium substituatur æquale aut tale (per pag. 93), ut *quotus* e substituto per id cui substituitur $\backsim 1$, dum $n \backsim \infty$, dicatur k id, quod post substitutiones dictas quotvis ex

$$uv + pr + \cdots$$

factum est; erit

$$\frac{k}{(uv + pr + \cdots) + \omega} \backsim 1,$$

eritque k, si forma requisita gaudeat, differentiale ipsius $B(x)$.

Ex. gr. Si

$$B(x) = x^2,$$

erit

$$b(x) = 2x\dot{x} - \dot{x}^2,$$

atque

$$\frac{-\dot{x}^2}{2x\dot{x}} \backsim 0,$$

adeoque $2x\dot{x}$ differentiale est.

Hosted by Google

X. Pro $A(x)$ functio talis $U(x)$ ab n dependens quæritur, ut $U \backsim A$, et $\frac{u(x)}{a(x)} \backsim 1$.

Sæpe $A(x)$ nec in concreto (uti figura quæpiam) datur, et tum dari $A(x)$ demonstrandum est. Pro tali plurimisque casibus quæruntur duæ functiones finitæ $V(x)$ et $U(x)$ ab n dependentes, ut sit

$$V \geqq A \geqq U$$

et $V - U \backsim 0$, dum $n \backsim \infty$, adeoque $U \backsim A$, (quo pacto et A per limitem datum sit); sitque

$$v(x) \geqq a(x) \geqq u(x)$$

et

$$\frac{v(x) - u(x)}{u(x)} \backsim 0,$$

adeoque et

$$\frac{a(x) - u(x)}{a(x)} \backsim 0.$$

Erit enim

$$\frac{u(x)}{a(x) - (a(x) - u(x))} = 1.$$

Consequenter

$$\frac{u(x)}{a(x)} \backsim 1.$$

Scholion, in quo partim dicta illustrantur, partim methodi (pag. 208) idea exponitur, atque exemplis applicatio methodi utriusque ostenditur.

1. Accipiatur in postremum, nisi aliud monitum fuerit, $\beta = 0$ (pag. 592) vel $\gamma \geqq \beta$ et utrumque positive aut utrumque negative; atque si commensurabilia fuerint, sitque ex. gr. $\gamma = 9u$ et $\beta = 4u$, accipiatur primum $n = 9$ et sequentia n sint (pag. 594)

$$2 \cdot 9, \quad 2 \cdot 2 \cdot 9, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9, \ \ldots;$$

si vero incommensurabilia fuerint, poterunt pro n accipi

$$2, \quad 2 \cdot 2, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2, \ \ldots,$$

Hosted by Google

2. Patet *seriem ex* $A(x)$ *derivatam esse seriem incrementorum functionis* (a β usque ad γ) *ipsis* $\dot{x}$ *respondentium*, numerumque terminorum esse $n-\mu$ et $a(m\dot{x})$ incrementum m-to $\dot{x}$ respondens esse.

3. *Aequipollentia* termini $u(m\dot{x})$ seriei cuiuspiam S' cum termino generali $a(m\dot{x})$ seriei incrementorum ex $A(x)$ functione absoluta derivatæ S per

$$u(m\dot{x}) \overset{\circ}{=} a(m\dot{x})$$

designari potest, atque sine λ (pag. 594) quoque ope seriei sic definiri potest: si S et S' fuerint series terminorum numero æqualium ita, ut cuivis m-to $\dot{x}$ duo termini simultanei et cuivis alii alii respondeant, atque pro utvis magno N detur tale n, ut pro eodem n quivis termini $u(m\dot{x})$ et $a(m\dot{x})$ fuerint sibi invicem respondentes simultanei, sit aut

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) = 0,$$

aut

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \prec \frac{1}{N} a(m\dot{x}),$$

saltem si non de omnibus valeat, exceptorum summa $\backsim 0$, dum $n \backsim \infty$: tum dicitur

$$u(m\dot{x}) \overset{\circ}{=} a(m\dot{x}).$$

Patetque esse aut $S' = A$ aut $S' \backsim A$; adeoque si et $B(x)$ functio absoluta adfuerit, atque

$$u(m\dot{x}) \overset{\circ}{=} b(m\dot{x}),$$

esse etiam aut $S' = B$ aut $S' \backsim B$, consequenter esse $A = B$.

Unde etiam S' *series mediatrix*, et $u(m\dot{x})$ *terminus mediator* sive *sensu generaliore differentiale cuiusvis ipsorum* $A(x)$ et $B(x)$ sive alterutrius tantum, si sola consideretur, dici possunt.

4. Quamvis igitur expressio quævis termino generali seriei incrementorum functionis absolutæ æquipollens, sensu generali differentiale functionis illius, et hæc ipsa *integrale* illius dici possint: expressio tamen quam simplicissima quæritur, atque *differentiale* sensu stricto nonnisi

Hosted by Google

talis expressio dicitur, in cuius termino quovis unica litera punctata eaque in prima potentia est, et coefficiens eius pro quovis dato x functio absoluta est.

At vero expressio talis ita intelligenda est, ut omnes literæ valoribus simultaneis, quibus ad finem cuiusvis $m\dot{x}$ gaudent, accipiantur, punctata vero semper et alibi sit incrementum eius, quod litera illa sine puncto significat sub m-to $\dot{x}$ factum.

5. Per $a(x)$ autem intelligatur (pag. 596) $A(x)-A(x-\dot{x})$ ita, ut in hoc ipsi x quivis valor pro aliquo n sub formam $m\dot{x}$ cadens substitui possit; ita tamen ut quivis utvis crescente decrescenteve n constans maneat ipso m quoque eatenus mutato, atque x semper $m\dot{x}$ sit.

Si vero

$$A(x)=z$$

sit, patet z ipsi $m\dot{x}$ et $\dot{z}$ respondere m-to $\dot{x}$, atque esse

$$A(x-\dot{x})=z-\dot{z};$$

adeoque si ex. gr.

$$C(x)=z^2,$$

esse

$$c(x)=z^2-(z-\dot{z})^2.$$

Quodsi iam pro quovis dicto x (a β usque ad γ) sit

$$\frac{A(x)-A(x-\dot{x})}{\dot{x}} \asymp D(x)$$

et $D(x)$ functio absoluta sit, semper finita nec 0, nonnisi ipsis x in certis punctis discretis desinentibus exceptis; erit

$$\frac{A(x)-A(x-x')}{\dot{x}D(x)} \asymp 1$$

saltem præter puncta dicta; itaque per fluxum puncti quærendo (pag. 596) pro quovis tali x, quodnam n pro dato N satisfaciat, dabitur tale n pro quo eodem sit

$$\dot{x}D(m\dot{x})-a(m\dot{x})$$

Hosted by Google

aut $= 0$ aut $\lessdot a(m\dot{x}) : N$ (saltem præter dicta); adeoque $\dot{x}D(x)$ æquipollebit ipsi $a(m\dot{x})$ et differentiale erit, $D(x)$ autem derivata ipsius $A(x)$ dici potest quoad x, si $\dot{x}$ fuerit in denominatore; quod etiam omissum subintelligi potest at si non quoad variabilem absolutam fuerit, annotandum est.

Si vero derivata hæc *prima* dicatur, derivatæ k-tæ derivata $(k+1)$-ta audit et $A(x)$ functio primitiva k-ta derivatæ k-tæ dicitur per $\int^k$ præpositum aut si $k=1$ per $\int$, designata. Differentiale per $\mathfrak{d}$, derivata k-ta per $\mathfrak{d}^k$ aut si $k=1$ per $\mathfrak{d}$, aut si quoad z sit per ${}^z\mathfrak{d}^k$ præpositum denotari potest; et si hoc$=q$ fuerit, $\int q$ integrale ipsius $q\dot{z}$ et ${}_z\int^k q$ functionem cuius derivata k-ta quoad z est q, denotare potest.

Differentialium altiorum apparatus derivatis altioribus superfluus fit.

Ut res clarior fiat, denotet v velocitatem, s spatium, w vim continuo agentem (pag. 230, 248) singula ad finem temporis t variabilis absolutæ intelligendo. Designeturque cuiusvis variabilium valor, qui ad finem alicuius t aut $t-\dot{t}$, vel $m\dot{t}$ aut $(m-1)\dot{t}$ est, præponendo literam germanicam nominis eiusdem maiorem, litera punctata autem minori denotetur.

Si iam dicatur

$$v\dot{t} = \mathfrak{d}s \doteq \dot{s},$$

sive

$$v = \mathfrak{d}s,$$

intelligatur

$$t\mathfrak{V}(mt) \doteq \mathfrak{f}(mt)$$

et pro quovis dato t esse

$$\frac{\mathfrak{S}(t)-\mathfrak{S}(t-t)}{t} \backsim \mathfrak{V}(t).$$

Hinc etiam s talis functio est, cuius derivata v est, idest

$$\int v = s + \text{constans},$$

quæ constans tamen et 0 esse potest.

6. Nempe functiones absolutæ nonnisi constante c differentes differentialibus æquipollentibus, et differentialia æquipollentia integralibus nonnisi constante differentibus gaudent.

Hosted by Google

Nam

$$A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big)=A(m\dot{x})+c-\big(A\big((m-1)\dot{x}\big)+c\big).$$

Quoad alterum autem sit

$$q(x)\doteq a(x) \quad \text{et} \quad \int q(x)=C(x);$$

erit

$$C(x)-C(\beta)=A(x)-A(\beta),$$

adeoque

$$A(x)-C(x)=A(\beta)-C(\beta),$$

quod constans est.

7. Si $A(\beta)$ immediate datum fuerit (pag. 595), et

$$A(\beta)-B(\beta)=\text{constans}$$

datum erit. Si vero (ibidem) pro $h=0$ sit $A(h)=a$, valeantque dicta a valore 0 ipsius x usque ad β, erit

$$A(\beta)-A(0)=B(\beta)-B(0),$$

atque hinc

$$A(\beta)-B(\beta)=a-B(h).$$

8. Methodus altera eodem redit, breviterque in sequentibus consistit.

a. Si pro quovis valore determinato et non 0 ipsius x sit

$$\frac{A(x+i)-A(x)}{i}\backsim D(x),$$

dum $i\backsim 0$, denotante $D(x)$ functionem absolutam valoris finiti et non 0 (saltem si x in certo puncto aut certorum discretorum aliquo terminatur): dici potest $D(x)$ *limes augmentalis*. Facileque patet hoc idem esse, quod derivata superius erat; nempe $\dot{x}$ pro i ponendo

$$A(x+\dot{x})-A(x) \quad \text{et} \quad A(x)-A(x-\dot{x})$$

duo incrementa proxima sunt, quorum prius per alterum divisum $\backsim 1$.

b. Porro functiones nonnisi constante differentes limite augmentali eodem gaudent et limiti augmentali functiones primitivæ nonnisi constante differentes respondent.

Hosted by Google

Nam

$$A(x+i)+c-(A(x)+c)=A(x+i)-A(x).$$

Quoad alterum autem, functio primitiva $\rhd A(x)$ aut $\lhd A(x)$ esse nequit. Si enim $kA(x)$ esset, limes fieret $kD(x)$, quum $D(x)$ (præter puncta discreta) valoris determinati finiti et non 0 sit.

c. Hinc si functio $A(x)$ quæratur et reperiatur functio nota $B(x)$ talis, ut limite augmentali quoad eandem variabilem eodem gaudeant, erit

$$A(x)=B(x)+\text{constans}.$$

Subit igitur heic limes augmentalis superius dictæ seriei mediatricis vicem.

d. Constans autem sic reperitur: si pro quovis x (a β usque ad γ) sit

$$A(x)=B(x)+\text{constans},$$

et sit $A(h)=a$, erit

$$A(h)=B(h)+\text{constans}=a,$$

adeoque

$$\text{constans}=a-B(h),$$

ut supra.

e. Limes dictus methodo de differentiali dictæ analoga quæritur.

9. *Exempla pro methodo utraque*:

a. Pro coordinatis rectangulis derivata areæ $A(x)$ in plano est ordinata y et differentiale est $y\dot{x}$.

Sit enim ex. gr. pro ordinatis crescentibus (pag. 598) $V(x)$ summa rectangulorum e quovis $\dot{x}$ et ordinata e fine eius erecta, $U(x)$ autem sit summa rectangulorum item e quovis $\dot{x}$ et ordinata ex initio eius erecta: erit

$$V \rhd A \rhd U$$

et

$$v(x) \rhd a(x) \rhd u(x),$$

atque

$$\frac{v(x)}{u(x)} \backsim 1$$

Hosted by Google

adeoque

$$\frac{v(x)}{a(x)} \backsim 1;$$

sed

$$v(x) : \dot{x} = y,$$

consequenter

$$\frac{a(x)}{\dot{x}} \backsim y.$$

Hinc si

$$y = px^k,$$

erit (pag. 235)

$$A(x) = \int px^k = B(x) = ax^{k+1} : k+1.$$

Constans enim est $= 0$, quia pro $x = 0$ fit

$$A(x) = 0 = B(0).$$

b. Pro (pagina 230) est

$$\mathfrak{d}s = v \quad \text{et} \quad \mathrm{d}s = vt.$$

Sit enim prius w constans $= g$ (pag. 248), sitque $A(t) = s$, et $V(t)$ summa spatiorum sub quovis $\dot{t}$ velocitate quæ ad finem eius est, æquabiliter percursorum, $U(t)$ vero summa item sub quovis $\dot{t}$ velocitate, quæ ad initium eius est, æqualiter percursorum. Erit

$$v(t) = \dot{t}\mathfrak{V}(t) \quad \text{et} \quad u(t) = \dot{t}\mathfrak{V}(t - \dot{t})$$

atque

$$v(t) \rhd f(t) \rhd u(t)$$

et

$$\frac{v(t)}{u(t)} \backsim 1$$

adeoque

$$\frac{v(t)}{a(t)} \backsim 1.$$

Consequenter $\dot{t}\mathfrak{V}(t) : t = \mathfrak{V}(t)$ limes ipsius $a(t) : t$ pro quovis dato t est, et v illi respondens derivata atque $v\dot{t}$ differentiale est. Est autem

$$v = gt$$

et

$$\int gt = \frac{gt^2}{2}.$$

Hosted by Google

Potest idem et iuxta (pag. 248) fieri, ubi $(m-1):m \backsim 1$ ita intelligitur, quod detur tale n pro quovis dato N, utvis parvo $\dot{t}$ excepto, ut

$$\frac{m-1}{m}-1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit.

Si vero w non sit constans, sed ex. gr. crescat continuo (pag. 249), est

$$\dot{t}\mathfrak{V}(t-\dot{t})+\dot{t}^2\mathfrak{W}(t) \gtrdot a(t) \gtrdot t\mathfrak{V}(t-\dot{t})+\dot{t}^2\mathfrak{W}(t-t).$$

Sed prius per posterius divisum $\backsim 1$, et

$$\mathfrak{V}(t-t):\mathfrak{V}(t) \backsim 1,$$

atque

$$\dot{t}\mathfrak{W}(t):\mathfrak{V}(t) \backsim 0.$$

Consequenter

$$\frac{a(t)}{\dot{t}} \backsim \mathfrak{V}(t).$$

Pariter (pag. 250)

$$\dot{v} \overset{\circ}{=} wt,$$

adeoque

$$\frac{\dot{v}}{\dot{t}} \backsim w,$$

et quum ex

$$vt \overset{\circ}{=} \dot{s}$$

sit

$$\dot{t} \overset{\circ}{=} \frac{\dot{s}}{v},$$

substituendo fit

$$v\dot{v} = w\dot{s}.$$

Consequenter

$$\int v\dot{v} = \int w\dot{s},$$

sive

$${}_v\int v = {}_s\int w$$

nempe functio, cuius derivata quoad v est v, et illa cuius derivata quoad s est w, nonnisi constante differunt. Sed prius $= v^2 : 2$; itaque

$$v^2 = 2\,{}_s\int w;$$

et exhinc prius functio primitiva simul cum constante quærenda ut radix v obtineatur.

Hosted by Google

Ex. gr. Sit (pag. 251, fig. 25) problema motus difformiter accelerati. Est ibidem

$$w = \frac{r^2 g}{x^2}, \quad \text{et} \quad s = a - x,$$

adeoque

$$\dot{s} = -\dot{x} \quad \text{et} \quad {}^{x}\partial s = -1.$$

Itaque

$$w\dot{s} \doteq \frac{-r^2 g \dot{x}}{x^2}, \quad \text{et} \quad w\, {}^{x}\partial s = -\frac{r^2 g}{x^2},$$

cuius integrale est

$$\frac{r^2 g}{x} + \text{constans},$$

nam huius derivata quoad x est $-r^2 g : x^2$.

Reperitur autem constans sic. Pro $x = a$ est $v = 0$, adeoque et $v^2 : 2 = 0$; hinc

$$\text{constans} = -\frac{r^2 g}{a},$$

atque

$$v^2 = 2\int w\, {}^{x}\partial s = 2r^2 g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right).$$

Consequenter

$$v = r\sqrt{2g\frac{a-x}{ax}}.$$

Si vero (pag. 253) vis sit $zg : r$ et $s = r - z$, atque $\partial^{z} s = -1$, adeoqu

$$\frac{v^2}{2} = \int_{z} \frac{-zg}{r} = \frac{-z^2 g}{2r} + \text{constans}.$$

Est vero pro $z = r$ velocitas 0, adeoque

$$\frac{v^2}{2} = 0 = -\frac{rg}{2} + \text{constans}$$

et

$$\text{constans} = \frac{rg}{2}.$$

Consequenter

$$v = \sqrt{\frac{g}{r}(r^2 - z^2)},$$

quod pro $z = 0$ fit $\sqrt{rg}$.

Hosted by Google

Ubi notandum est, quod gr pro diversa unitate facta diversa præbeat, adeoque vagum videri posset; at si factores concreti numero μ fuerint, radix μ-ti gradus e facto semper eadem erit, dummodo tam factum quam radix quoad quamvis quidem sed eandem unitatem accipiatur. Nempe quoad $u = 1$ sit factum f; erit (pag. 113) quoad $ku = 1$ (denotante k quantitatem abstractam) factum

$$F = f \,.\, k^{\mu-1};$$

atque si $\sqrt[\mu]{f}$ (quoad $u = 1$) sit r, erit

$$\left[\sqrt[\mu]{F}\right]_{ku=1} = \left[\sqrt[\mu]{\frac{1}{k^{\mu-1}}}\right]_{ku=1}$$

et hoc est

$$= \frac{rk^{1-\frac{1}{\mu}}}{k^{\frac{\mu-1}{\mu}}} = r.$$

In exemplo præcedente sunt quatuor factores in numeratore et duo in denominatore. Sed ibi quoque duo tantum manent; nam quantitas concreta per concretam quotum constantem dat (pag. 535).

c. Sit adhuc exemplum pro differentiali negativo et derivata negativa. *Quaeratur* nempe *tempus lapsus per s arcum cycloidis.*

Si (fig. 53) pro v scriberetur x, essetque hæc variabilis absoluta, neglectoque s quod ibi est, denotet s viam a certo puncto cycloidis incipiendo super eadem per gravitatem labentis puncti; respondeatque abscissa h puncto illi certo ipsius s, sitque y ordinata ipsius x; atque tempus lapsus per s dicatur t, et v denotet velocitatem finalem ad finem ipsius t et imum ipsius s, spatiumque sub secundo uno, lapsu libero percursum, denotetur per g.

Erat (pag. 591) $\dot{t} : \frac{\dot{s}}{v} \backsim 1$; itaque

$$t = \int \frac{\dot{x}\partial s}{v}, \quad \text{sive} \quad t = \int \frac{\partial s}{v};$$

eumque in finem ∂s et v quærenda sunt. Est

$$v = 2\sqrt{g(h-x)};$$

Hosted by Google

nempe lapsus non per plana inclinata compacta, sed per curvam fit. Estque (pag. 294)

$$\partial s = (1 + (\partial y)^2)^{\frac{1}{2}},$$

atque (pag. 359)

$$\partial y = (2x^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}},$$

adeoque

$$\partial s = \sqrt{2x^{-1}}.$$

Consequenter

$$\frac{\partial s}{v} = \sqrt{\frac{x^{-1}}{2g(h-x)}} = x^{-\frac{1}{2}}(h-x)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2g}}.$$

Estque hoc negativum; namque pro $h = n\dot{x}$ tam s quam t est 0, sed a fine n-ti $\dot{x}$ usque ad initium eius crescit arcus, et ut grave per eum descendat, tempus requiritur; si igitur incrementa ista temporis a 0 incipiendo pro

$$(n-1)\dot{x}, \quad (n-2)\dot{x}, \ldots$$

per ordinatas ad fines ipsorum $\dot{x}$ positas repræsententur, dicaturque ordinata $C(x)$; erit

$$C(n\dot{x}) - C((n-1)\dot{x}) = 0 - t,$$

quod et de sequentibus patet.

Erit igitur (pag. 286)

$$t = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\int x^{-\frac{1}{2}}(h-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2g}}\,\text{arc. cos.}\left(1 - \frac{2x}{h}\right) + \text{constans.}$$

Si vero $t = 0$, tum $x = h$; adeoque

$$0 = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\,\text{arc. cos.}(-1) + \text{constans.}$$

Estque arc. cos. $(-1) = \pi$. Itaque

$$\text{constans} = \pi\sqrt{\frac{1}{2g}},$$

consequenter

$$t = \sqrt{\frac{1}{2g}}\left(\pi - \text{arc. cos.}\left(\frac{2x}{h}\right)\right).$$

Hosted by Google

Si vero $x = 0$, tempus lapsus per cycloidem usque ad punctum imum erit

$$\pi\sqrt{\frac{1}{2g}}.$$

Patet quoque tempus undevis idem requiri, ut grave ad imum usque delabatur.

Hosted by Google

N.

EXPOSITIO BREVIS METHODI, QUA PRIMÆ LINEÆ CALCULI DIFFERENTIALIS IN OPERE HUNGARICO TRACTANTUR.

Ex (pag. 211)

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) < \frac{1}{N} a(m\dot{x}),$$

pro eodem n et hic, deducitur $U \backsim A$. Sed evidentius in opere dicto hungarico ponitur (Cf. pag. 635)

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) = f\varrho a(m\dot{x}),$$

per f fractionem veram sive positivam sive negativam denotando et ϱ scribendo pro $\frac{1}{N}$. Nimirum sit fas in gratiam Tyronum quædam iam supra dictorum magis necessaria hic quoque repetere.

I. Si quotcunque variabiles simultaneo positæ fuerint, illa ex. gr. x, cuius certum valorem γ per integrum positivum n dividere libet, dicatur *primaria*, $\frac{\gamma}{n}$ per $\dot{x}$ denotato. Cuiuscunque variabilis ex. gr. y vero simul cum x mentio fiat, valor is ipsius y intelligatur, qui ad finem illius x est, $\dot{y}$ autem denotet incrementum variabilis y illud, quod sub illo $\dot{x}$ nacta est, quod cum illo x terminatur.

Quatenus si $A(x)$ functio (ipsa quoque variabilis) dicatur u, denotabit $\dot{u}$ incrementum ipsi $\dot{x}$ cum x terminato respondens

$$= A(x) - A(x - \dot{x}) = u - A(x - \dot{x})$$

unde

$$A(x - \dot{x}) = u - \dot{u}.$$

Denotetur $\dot{u}$ per $a(x)$.

II. Ex $A(x)$ autem per quæstionem primam (pag. 205) substituendo ipsi x prius $n\dot{x}$, tum $(n-1)\dot{x}$, dein $(n-2)\dot{x}$, ... usque $\beta = (p-1)\dot{x}$ (tam p quam n integrum positivum denotantibus) oritur series

$$A(n\dot{x}), \quad A\big((n-1)\dot{x}\big), \quad A\big((n-2)\dot{x}\big), \ldots, A\big((p-1)\dot{x}\big);$$

Hosted by Google

unde quum illico pateat, quovis termino subtracto e præcedente incrementum sequenti $\dot{x}$ respondens prodire, ex. gr.

$$A(p\dot{x}) - A((p-1)\dot{x})$$

esse incrementum ipsius $A(\beta)$ sub p-to $\dot{x}$; in promptu fit incrementorum p-to, $(p+1)$-to, $(p+2)$-to, . . . , n-to $\dot{x}$ respondentium seriem

$$A(n\dot{x}) - A((n-1)\dot{x}),\ A((n-1)\dot{x}) - A((n-2)\dot{x}),\ \ldots,\ A(p\dot{x}) - A((p-1)\dot{x}),$$

cuius terminus generalis (pag. 209)

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$$

per a_m, et summam, intermediis se mutuo destruentibus,

$$A(\gamma) - A(\beta)$$

per A denotari posse.

III. Si $A(x)$ et $B(x)$ ab n independentes fuerint, $V(x)$ autem dependeat ab n, et $\frac{v_m}{a_m}$ ac $\frac{v_m}{b_m}$ limite 1 gaudent, nempe pro utvis magno N sit tale idem n, ut quodvis m accipiatur a β usque γ, sit

$$v_m - a_m = f_m \varrho a_m, \quad \text{et} \quad v_m - b_m = f'_m \varrho b_m:$$

tum $A = B$, adeoque

$$A(\gamma) = B + A(\beta).$$

Nam

$$\begin{array}{llll}
v_n - a_n = f_n \varrho a_n, & & v_n - b_n = f'_n \varrho b_n, \\
v_{n-1} - a_{n-1} = f_{n-1} \varrho a_{n-1}, & & v_{n-1} - b_{n-1} = f'_{n-1} \varrho b_{n-1}, \\
\quad . \quad . \quad . & & \quad . \quad . \quad . \\
v_p - a_p = f_p \varrho a_p, & & v_p - b_p = f'_p \varrho b_p.
\end{array}$$

Et si in $A(x)$ cogitetur incrementum $A(\beta)$ ipsi $(\gamma - \beta)$ respondens, expressum per aream inter $\gamma - \beta$ et fines ordinatarum a fine ipsius β usque finem ipsius γ, et ordinatas ad fines ipsorum β et γ contentam, sitque pro ordinatis omnibus finitis illa, qua nulla maior est, k, accipiaturque hæc ut realis et positiva: tertia columna non

Hosted by Google

erit $> \frac{(n-p+1)k}{N}$ (pag. 635). At vero hic $n-p+1$ crescet crescente n, attamen $(n-p+1)k$ nunquam fit rectangulo ex ordinata maxima et $\gamma-\beta$ maius, atque $N \backsim \infty$, si $n \backsim \infty$. Consequenter limes ipsius V tam A quam B est; adeoque $A=B$.

IV. Potest vero γ utvis magnum accipi si dicta valeant; neque turbatur æqualitas, si parti ipsius $\gamma-\beta$ ad limitem 0 tendenti respondens incrementum quoque tendit ad 0.

V. Si de $A(x)$ dicta et de $K(x)$ valeant: fiet

$$K(\gamma)=B+K(\beta);$$

et prouti $A(\beta)$ vel $K(\beta)$ additur ipsi B, summa *integrale* ipsius $v(x)$ quoad $A(x)$ vel $K(x)$ dici potest.

VI. Si $\frac{a(x)}{\dot{z}} \backsim C(x)$ pro hoc ab n independente, tum $\dot{z}\,C(x)$ *differentiale* ipsius $A(x)$ et $C(x)$ *limes augmentalis* (primus) utrumque quoad z et $q-1$-mi limitis augmentalis limes augmentalis dicitur q-tus, signisque ${}^{z}\partial A(x)$, ${}^{z}\partial A(x)$, ${}^{z}\partial^{q} A(x)$ denotari et differentialia altiora supervacanea reddi possunt.

VII. Præter modum, quo differentiale quæritur, ut purum reddatur, plura in opere dicto demonstrantur.

Hosted by Google

ADNOTATIONES EDITORUM.

Hosted by Google

Hosted by Google

Pag. 4, ℣. 6 a calce. «*Millefariam*» vocabulum a Bolyai fictum ad exemplar vocis «multifariam», quæ non crebro quidem sed tamen etiam apud optimos scriptores legitur, videtur significari voluisse: «in mille partes».

Pag 5. Literas maiusculas, quas Bolyai initio vocabulorum Historiæ Geometriæ, Trigonometriæ, Theorematis &, scribere solet, hic et aliis locis non mutavimus.

Pag. 6, ℣. 6. Vox «*ultimariorum*» derivata a vocabulo «ultimarius» ad exemplar «primarii» ficto, et sicut «primarius» unum aliquem ex primis denotat, Bolyai hic unum aliquid ex ultimis voluit designare.

Pag. 6, ℣. 11 a calce. Pro «nullo», quod certe typothetæ errore irrepsit, restituimus «nulli».

Pag. 9 in fine ℣. 7. Distinctionem mediæ notæ inseruimus quo facilius appareat vocem «itque» non deberi ad sequentia trahi.

Ibidem ℣. 13 a calce pro «nuspiam» rectius «nusquam» scribi duximus.

Pag. 11. I, II, III. In libello «Arithmetika eleje» (Introductio in Arithmeticam) in oppido Maros-Vásárhely anno 1843 edito, pag. 198, hæc legitur finitio temporis:

> «Tempus est continuum et infinitum, tum quoad præteritum quum quoad futurum; sed partium expers tantum; et semper alia atque alia habet puncta, quorum quodvis advenit, omnia non adveniunt, quodlibet temporis pun-

Hosted by Google

ctum nec præceditur ultimo quodam, nec præit primum quoddam; et si punctum b præcedit a et punctum c ante b fuerit, punctum c præit a.»

Quid intellexerit Bolyai per vocabulum «continuum», apparet pag. 24, §. 4.

Pag. 14. Secundum ea quæ in præcedente pagina stabilita sunt pro g ubique G erat scribendum, excepto versu 10 a calce, ubi h debuit ei substitui.

Ibidem ℣. *2 a calce* pro «inter B, C» rectius est scriptum «inter A, B, C».

Pag. 17, ℣. *5 a calce* pro «2 schematibus» scripsimus: «altero schemate».

Pag. 17, schema I. Liceat hæc schemata exemplo illustrare. In I schemate 7-mo loco hæc sunt posita:

$$\begin{array}{c} c-a \\ A+b \\ \hline *c-b. \end{array}$$

Positio secunda $A+b$ significat cum quolibet a esse quoddam b, vel esse quædam b; prima positio $c-a$ denotat esse quoddam c vel quædam c sine quodam a vel quibusdam a. Ex his duabus positionibus sequitur hoc c vel hæc c simul esse etiam sine isto b vel sine istis b; possunt tamen esse eiusmodi b quibus a non adest — hæc possunt esse cum c.

Pag. 18. Propositionem primam, quæ in prima editione secundam sequebatur eidem præponendam esse duximus, ut lectori facilius appareat nexus ratiocinationis.

Ibidem ℣. 9 a calce obscurum illud: «denique omne» clarius fiet ita scribendo: «denique omnia, quæ . . . sequuntur, . . . accenseri possunt».

Hosted by Google

Pag. 19. In schemate II complexiones quinta et sexta in editione prima sic habentur:

aa	—*a*	—*a*		*aa*	—*a*	—*a*	
bbb			*c c*	*bbb*	*c*	*c*	*c*

In schemate III vero prima, quinta et septima in editione I hæ sunt

cc	*c*	*c*		*bbb*	*cc*		*aa*
bbbbb	—*b*	—*b*	—*b*	*aaa*	—*b*	—*b*	*bbbb*
aa							

ex his posterioribus duæ extremæ certe typothetarum mendæ sunt; reliquæ ita mutatæ melius conveniunt schematibus paginæ 18. In schemate II quarta sic est recte scribenda:

bb
aaaa
ccc.

Pag. 20. ℣. *10* habet «si a prima», pro quo scripsimus «nisi a prima».

Pag. 20, E. ℣. *4 a calce* incipiendo in editione I hæc leguntur:

«post *p* vero datur tempus continuum ex *p* incipiens, sub cuius puncto quovis est non *A*. Nam in quovis puncto crescentis *T* in infinitum quæri potest, est ne illud ultimum vel non? Alterutrum esse oportet (Ax. III); nec responsio *non* sub quovis puncto temporis esse potest; nam si tempus ultra *t* crescat et *non* sit responsio tum quoque, sub *t* quoque esset *A* (contra hyp.) Itaque est aliquod temporis punctum, de quo dici nequit, quod non ultimum sit (p. 12, n° 2); adeoque cum illud aut ultimum aut non ultimum esse debeat (Ax. III), et non ultimum non sit, ultimum est (Ax. IV). *Si porro quaeratur* ultra *p* continuo porro in quovis puncto, est ne *A* vel *non A?* responsio *ita* esse aliquamdiu nequit; alioquin *p* ulterius accipi debuisset.»

Hosted by Google

«Si vero datur ultimum tale punctum p, tum in p erit aut *ultimum* A aut *primum non* A. Nam aliquod aut A aut *non* A adesse debet (Ax. III); si A est, *ultimum* A est; nam post p sub certo continuo ex p incipiente non est A, ante p vero ab initio ipsius T semper est; si vero sub p sit *non* A, illud *primum non* A est; quia antea semper fuit, postea vero sub certo tempore non est.»

His manifesto falsis ipse Bolyai in editionis I, tomi 1, pag. LXXXVI substituit illam correctionem theorematis, quæ hic ultimis quatuor versibus paginæ 20. comprehenditur.

Bolyai hoc fundamento limitis, quod cardinalis propositio est totius systematis, ætatem suam superans monumentum exegit nomini suo.

Pag. 23—24. Demonstratio quæ hinc a priore pagina in posteriorem transit minus concinna est, atque ita est supplenda: P portio est totius T; ergo complexus omnis eius, quod ex toto præter P est, — vocatur R — partem nullam aut tantum indivellibilem communem habet cum P per definitionem portionis; ergo A (id quod P cum R commune habet) pars indivellibilis est ipsius P.

Adnotatio huic paginæ sub * addita ex pag. 401, Tomi II editionis primæ tracta est.

Pag. 26, ℣. *12 a calce*: «nec in casu allato posse aut non posse terminari quisquam demonstravit», scilicet si quæratur quadratum circulo terminata vel interminata æqualitate sitne æquale.

Pag. 26, §. *7,* ℣. *2,* vocabula «nonnisi indivellibile utriusque commune habentes» contextui inserta et nota in calce paginæ addita ex editionis I, tom. II pag. 401 ipsius Bolyai consilio adiecimus.

Pag. 27, in altera parte § *7* et porro etiam paullum defleximus a Bolyai, signis enim $\gtrless$, quo facilius formulæ legi possint, sensu vulgo usitato utimur, Bolyai vero hoc loco pro comparatione valorum absolu-

Hosted by Google

torum utitur signis $\gtrless$. Ceterum Bolyai in distinctione terminorum et signorum maius, minus $(\gtrless)$ et plus paucius $(\gtrless)$ parum sibi constat. Hæc ubi opus erat emendavimus, at ubi de quantitatibus natura positivis agitur, terminos «maius, minus» haud mutavimus, sæpe tamen signa $\gtrless$ simpliciora adhibuimus.

Pag. 29, in fine § 10 nota addita «(Tab. I, Fig. 1)» consilio Bolyai (pag. XXXV. ℣. 9 a calce) deleta est.

Pag. 30, § *12*, ℣. *3* Bolyai «zerum» scripserat, cui vocabulo nos figuram «o» substituimus, quam Bolyai plerumque vocabulo «zerus» appellat, quod secundæ declinationi tribuit, nos ubi figura ista voce designanda erit semper indeclinabile «zero» adhibebimus.

Ibidem ℣. *3 a calce* pro «$\vdash\!\!+ a$, $\vdash\!\!\dashv b$» inserta coniunctione scripsimus «$\vdash\!\!+ a$, vel $\vdash\!\!\dashv b$».

Pag. 31, § *14*, ℣. *5* pro «$\vdash\!\!+ A$ et $\vdash\!\!+ B$» rectius scriptum est «$\vdash\!\!+ A \vdash\!\!+ B$».

Pag. 32, § *16*, ℣. *4—5*, locus difficillimus intellectu continuo clarus fit, si vocem subintellectam «termini» idoneo loco inserendo ita legetur: «*A* cum *a* simul ponantur, et termini quosvis terminos simul positos excipientes . . . simul ponantur».

Ibidem pro ablativis «priori, posteriori» usitatiores «priore, posteriore» substituimus, quod et in aliis plerisque locis fecimus.

In fine huius paginæ pro «(§ 22)» rectius scripsimus «(§ 23)».

Pag. 34, § *20*, ℣. *3 a calce* pro «cum» interrogationis signum sequens «Cum» scripsimus.

Pag. 35, nota sub * apposita a pagina 401 tomi II. editionis primæ sumpta est.

Hosted by Google

Pag. 37, § *24*, ℣. *4* «est (per § 7) $2 \lessdot -3$, sed 1 non $\gtrdot 0$, neque $-1 \lessdot 0$»; exemplum profert differentiæ inter signa ($\gtrdot \lessdot$) et ($> <$) ut præparet introductionem novorum horum signorum. Quod (§ 7) citatur, ita intelligendum est: si

$$2+1=3; \quad 1-1=0,$$

ex priore harum identitatum secundum (§ 7) sequitur $2 \lessdot 3$ at eodem iure etiam $2 \lessdot -3$, sed ex altera non sequitur $1 \gtrdot 0$ nec vero $-1 \lessdot 0$. Confer: ARITHMETIKA ELEJE, ed. nova, 1843 pag. 13.

Pag. 40, ℣. *5 a calce* in parenthesi pro «§ 20» erronee adlato «§ 19» restituimus.

Pag. 43, ℣. *4 a fine* § 31 pro «$-a$. $-c$ esset $=+b$» rectius scripsimus «$-a$. $-c$ esset $=-b$».

Pag. 44, nota ad calcem paginæ sub * apposita ipsius Bolyai est, et legitur in ed. I, tom. II, pag. 373, et iterum in tom. I, pag. LIII.

Pag. 45, ℣. *1*, «*a* divisor (tertium locum tenens), B_a quotus est»; designationes divisoris et quoti permutari posse patet, ita enim iam a principio § 27 introduxerat duas has notiones.

Pag. 45, ℣. *6* pro iis quæ in hac pagina in tomo I editionis I sequuntur, nempe:

> «Notandum vero nomen *quoti* vel quotiensis inde venire, quod in casu ubi divisor loco *tertio* stat, ad illam quæstionem respondet, quale mensum (quasi quotum) sit b ipsius a (nempe hic 2(3)tum); si vero quæstio est, quid sit, cuius si quæratur quotum sit b, respondeatur: 2(3)tum; tum divisor *secundum* locum tenet. Pro 2(3)to erat antea 3(1)tum; et b ibi in tres partes (quarum quævis $= a$ est) partitur, atque b est quoad a numerus nominis 3.»

Hosted by Google

ipse Bolyai substituere iussit ℣℣. 6—11 in tomo II editionis I pag. 367, § 11.

Pag. 45, tertio loco ultimi schematis pro «1*v*» scripsimus «0*v*», uti consentaneum est versui 2 sectionis 3., ubi legitur «demum sit factor uterque 0».

Pag. 46, ℣. *2 et ss.* pro «$a(r)$» usitatiorem formam «functionis $f(r)$» substituimus. (Vide ad pag. 207 adnotata).

Ibidem ℣. *12* vocabulum «Sit» in ed. I schemati præpositum delevimus.

Pag. 48 ℣. *7 a calce* pro «nempe 3-ies» scripsimus «nempe ter», et ibidem ℣. ultimo «unitas» stat loco «Unitas».

Pag. 50, ℣. *4* post «eiusmodi» luciditatis causa inseruimus vocem «factorum».

Ibidem ℣. *11*, «dummodo $N=M$ non sit» (pag. 37) ex consilio ipsius Bolyai deletum atque pro «Si» positum est «si».

Pag. 51, ℣. *1*, $a^{\frac{n-m}{N-M}}$ scribi debuit pro «$B^{\frac{n-m}{N-M}}$».

Ibidem § *35*, *sub I*, ℣. *4*, vocabulum «millionesies» quamquam Latinum non est, non mutavimus.

Pag. 52, *III.* ℣. *9* luciditatis causa literæ T præpositum est «angulus». — Ceterum Fig. 1. ed. I non exhibet clare «*fasciam u*», quæ nihil est aliud quam pars areæ anguli T inter parallelas sita.

Pag. 52, ℣. *ultimo* «uti (Fig. 2) ostendit» significat aream anguli $a+b+\cdots+f$ complecti aream anguli $a'+b'+\cdots+f'$ et præterea etiam, «*fasciam*» g.

Hosted by Google

Pag. 53, ℣. *10*, in edit. I nulla Figuræ 3 fit mentio, nec invenitur in tabula.

Numerale *V* præpositum est versui primo huius paginæ ex præcepto pag. V. ℣. 11 a calce editionis I.

Pag. 55, ℣. *3*. post «imo» particulam «ad» inseruimus.

Ibidem, ℣. *7*. pro «maius» scripsimus «plus».

Ibidem, ℣. *9*. verba «aliquamdiu saltem» uncis inclusa sententiam ipsius Bolyai secuti omisimus.

Ibidem, ℣. *12. a calce* post «tamen fiat o», clausulam «neque negativa» addidimus.

Ibidem, ℣. *ultimo* distinctioni (,) inter voces «est» et «terminatur» maiorem (;) substituimus.

Pag. 55. In theoremate eiusque demonstratione, quæ sub VI et VII proponuntur, ubique signa «quoad valorem absolutum maius vel minus» adhibita sunt. Considerantes quantitatem *q* respective **pq** æque posse positivam et negativam esse, signis «quoad valorem absolutum maius et minus» notantibus usi sumus, imo plerumque vocabula ipsa iis substituimus.

Pag. 57, ℣. *1* «(cum id in * æquale o sit), quo» scripsimus pro «in *, quo (cum id = o sit)».

Ibidem, ℣. *8*. Bolyai sæpius utitur forma hac vitiosa «propissimus» pro «proximus», quod ubique substituimus ubi animadversum est; hoc loco oculos fefellerat.

Pag. 61, ℣. *7* pro «crescendo» aptius visum est scribi «crescens».

Ibidem ℣. *12* «propissime» emendatum est in «proxime». (Cf. Adn. ad pag. 57).

Pag. 63, *XVIII* ℣. *7* pro «residuo *r* ex *c*» scribendum fuit «residuo *r* ex *Q*».

Ibidem ℣. 10 a calce loco «$a' = c''$» rectius posuimus «$a' = C''$».

Hosted by Google

Ibidem ℣. *6 a calce* loco «est; cuius» scriptum est «est, quarum».

Postrema pars huius articuli ad fasciam (pag. 52) memoratam spectat, et huius singulas partes designantia u, ω et ipsa eiusmodi fasciæ sunt, sicut et ω'.

Pag. 66. Nota margini inferiori huius paginæ apposita e pag. XXXVII tomi I editionis I est desumpta, nisi quod in ultimis æquationibus signis $=$ per mendam typothetarum positis signa $\doteq$ substituimus.

Pag. 67, ℣. *4,* loco «residuum v ex $(b=k')$» scriptum est «propter $b=k'$ residuum».

Pag. 67, ℣. *8* legitur «sed hæ partes per a) demi possunt», conclusio hæc vitiosa est, quum portionibus arearum, de quibus hic agitur, quamvis minutæ supponantur, adhuc semper possunt esse etiam in situ coincidenti arearum A et B particulæ communes.

Ceterum propositio hic demonstranda ipsa vera est, imo vera est etiam rem in genere affirmans sequens propositio: «*Si ex areis terminate aequalibus portiones terminate aequales exscindas, areae residuae etiam terminate aequales sunt*».*

Pag. 68, ℣. *10* «et sit quærendum $\frac{2C}{3\cdot 5}$» scriptum est pro «et sit $\frac{2C}{3\cdot 5}$».

Ibidem, ℣. *3 a calce* pro «(facto x dicto)» scripsimus «(facto dicto x)».

Pag. 71, ℣ *3* inter «rectæ aut» inseruimus «eiusdem determinationis». Nempe, ut e sequentibus apparet, u etiam negativum potest esse.

Pag. 72, ℣. *6 et 12* pro «sed» scripsimus «et».

* Vide Réthy «Végszerűen egyenlő területek» in Magy. Tud. Akad. Értesítő 1890, 1893, — idem Germanice «Endlich gleiche Flächen» in Naturwiss. Berichte aus Ungarn 1890, 1893, — Math. Annalen Bd. 38 et 42 et loco hoc posteriore etiam H. Dobriner: «Bemerkungen etc.» et «Gleiches von Gleichem giebt Gleiches».

Hosted by Google

Pag. 73, ℣. 12 a calce «ex ω est» ita supplevimus «ex ω sumptum est».

Pag. 74, ℣. 15, «est» in «sit» mutavimus.

Pag. 76, ℣. 6—8 a calce. Loco inæqualitatum hic positarum in Ed. I erronee ita fuit scriptum

$$mv + \lambda - Mv' - \lambda' < \frac{1}{k} + \lambda - \lambda',$$

seu

$$D - D' < \frac{1}{k} + \lambda - \lambda',$$

Pag. 77, sub XXIV ℣. 1 articuli 2 inter uncinos vocabulo «oppositis» substituimus «negativis» et signa usitata $>$, $<$, $\pm$ sicut vocabula maius, minus adhibuimus.

Pag. 77 versum ultimum ipsi inseruimus, at ibi pro «iisque» legendum erit «atque».

Pag. 79, ℣. 7. Vocabulo «constans» hic Bolyai eiusmodi voluit notare quantitatem, quæ neque $=0$ fieri neque ad limitem 0 tendere possit.

Pag. 81, sub 5., et pag. 82 ℣. 1 signa $><$ sunt pro signis $\gtrless$ posita.

Ibidem ℣. 7, a calce post «quævis alia» supplevimus «litera».

Ibidem ℣. 6, a calce pro «ac si *e*», scripsimus «ac si *c*».

Pag. 81, sub 6. In Editione I hoc loco æquatio resultans sic fuit apposita:

$$1 - \frac{kn+k}{kn} = \frac{kn}{kn} - \frac{kn+k}{kn} = \frac{1}{n},$$

Ibidem sub 7, ed. I. sic habetur

Hosted by Google

«Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n}{n+1}$ est

$$\frac{n \pm 1 - n}{n \pm 1} = \frac{1}{n \pm 1},$$

quod $\backsim 0$.»

Pag. 85, ℭ. 8 et 9 ex consilio ipsius Bolyai corrigebantur.

Ibidem ℣. *13* intra uncos «per XXV., 2.» correximus in: «per XXV., 3.»; porro ℣. *7* inter «crescit, non fit» inseruimus «et»

Pag. 90, ℣. 1. inter a, x vocabulum «respective» inseruimus. *Ibidem* ℣. 4—7 quæ leguntur in ed. I sic habentur: «cuius differentia ab $\left(a = \frac{a'}{n} + z\right)$ est $z - \frac{a't}{b'}$, quod $\backsim 0$ (ut supra)».

Ibidem ℣. *14* in ed. I est:

$$\left(\frac{a' + \omega'}{n} = x - p\right) : \left(\frac{b'}{n} = b - t\right)$$

quod luciditatis causa seorsim ponere placuit.

Ibidem ℣. *5—8 a calce* in ed. I ita habebatur: «cuius differentia ab $\left(a = \frac{a'}{n} + z\right)$ est $z - \frac{a'q}{b' + \lambda'}$».

Pag. 91, Quæ hic ℣ 1—4 continentur in ed. I ita sunt exposita: «cuius differentia ab $\left(x = \frac{a' + \omega'}{n} + p\right)$ est $p - \frac{a' + \omega'}{b' + \lambda'} q$».

Pag. 93 ℣. *9 a calce.* Notandum est in ed. I in hoc capitulo et etiam alibi solos numeros paginarum esse allatos, nos vero facilitatis causa etiam numeros theorematum addidimus.

Pag. 93, *5*. Hæc ratiocinatio non potest constare si

$$\frac{u'}{v'} + 1 = 0, \quad \text{vel} \quad \frac{u'}{v'} + 1 \backsim 0;$$

quod auctor ipse annotavit in «*Arithmetika eleje*», Ed. nova (pag. 246).

Hosted by Google

Pag 96 et ss. XXIX. Ubi de potentia agitur sæpius non enuntiavit auctor a et A positiva sintne vel et negativa.

Pag. 96, ℣. 7—8 a calce, oratio hoc loco parum diligenter est composita, attamen facile intelligitur, itaque nihil mutavimus.

Pag. 97, ℣. 8 a calce ordine paullum mutato pro «$=1=a^0$» scripsimus «$=a^0=1$».

Pag. 98, ℣. 8 et 11, terminos utriusque partis æquationis primæ permutavimus, ut continuitas sensus clarius appareat.

Ibidem ℣ 2 et 3 a calce in editione prima sequentia continebantur:

erit intra $*$ quidvis $=x'-\omega$, et ultra $*$ quidvis $=x'+\omega$.

Pag. 99, ℣. 1 inter uncinos numeros XXV, 11 inseruimus.

Ibidem ℣. 2 pro «aut = aut >» scripsimus: «aut = K aut >».

Ibidem ℣. 4—5 verba «neque primum non tale; nam si ultimum» quæ certe erronea sunt, ita supplevimus: «ergo primum non tale, nec enim plus quam K producit; nam si illorum ultimum».

Ibidem ℣. 6 post «non tale» insertum est «eiusmodi».

Ibidem ℣. 10—11 in ed. I erat: «sit illud $=K+(\lambda=0$ vel cuidam $+)$, et $(x'-\omega)^m=K-\lambda'$».

Ibidem ℣. 9 a calce «æqualis» correximus in «æquale».

Ibidem ℣. 8 a calce «(omnibus positivis)» inseruimus.

Pag. 99, ℣. 6 a calce pro erroneo «$p=$ vel $<\frac{1}{n}$, $p'=$vel $<\frac{1}{n}$» rectius scripsimus: «$p<\frac{1}{n}$ et $p'<\frac{1}{n}$».

Ibidem ℣. 4 a calce pro «maius» clarius exposuimus «$>(m+1)\frac{\alpha}{n}$».

Pag. 100, ℣. 4, verba «dum radix >1» inseruimus.

Hosted by Google

Pag. 102—103. In theoremate 8. eiusque demonstratione designatio «integer» significationem habet integri positivi. Ceterum demonstratio non penitus absoluta ita est supplenda: Si $N > 1$, supponatur m, quamvis magnum sit n, tantum ut fiat:

$$\frac{n+m}{n} > N \quad \text{id est} \quad m > n(N-1);$$

expleatur tum inæqualitas secunda pag. 103 sic:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n+m}{n} > N > 1;$$

sponte sequitur inde, quamvis magnum sit n, dummodo $m > n(N-1)$ supponatur

$$\frac{n+1}{n} > \sqrt[m]{N} > 1,$$

itaque $\sqrt[m]{N} \backsim 1$, si $m \backsim \infty$.

Expleatur porro simili modo inæqualitas ultima sic:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m < \frac{n}{n+m} < \frac{1}{N} < f < 1;$$

sequitur inde, quamvis magnum sit n, dummodo $m > n(N-1)$ supponatur, erit tamen

$$\frac{n}{n+1} < \sqrt[m]{f} < 1;$$

itaque $\sqrt[m]{f} \backsim 1$ si $m \backsim \infty$.

Pag. 103, ℣. 9 rectius $\frac{n}{n+m}$ scripsimus pro $\frac{n}{m}$.

Pag. 104, ℣. *8* mutavimus ex sententia ipsius Bolyai in ed. I indice rerum pag. X, 10-mo.

Pag. 105, ℣. *8* æqualitatis signo intermedio falso apposito omisso et ordine inverso scripsimus:

Hosted by Google

$$z = B^{\frac{1}{m}}, \quad z^n = \sqrt[m]{z^{mn}}.$$

Pag. 108, art. 16 ostendere vult difficultates, quæ oriuntur si potentiæ elementaris conceptum ita velis generalem reddere, ut rata maneat etiam si exponens incommensurabilis sit. At generalem potentiæ definitionem contineri serie exponentiali, si incommensurabiles et complexi exponentes occurrant, probat Bolyai pag. 193, 536, 546.

Ibidem ℣. *1—2* quæ uncis inclusa sunt, ipsi inseruimus, et ℣. 4 a calce particulæ «sed» substituimus «nam».

Pag. 113, ℣. *6—7 a calce.* Quæ hic uncis inclusa sunt a nobis inserta sunt; scilicet ex sententia auctoris multiplicatio ope imaginum (pag. 41, § 28) peracta est, sint videlicet termini imaginis secundum ordinem u, A, B, C, et primus terminus imaginis $u = 1$, tunc terminum ultimum C productum (factum) duorum terminorum mediorum A et B esse dicit quoad $u=1$, et si duo termini medii æquales sunt, nempe $A=B$, secundum Bolyai $C=A^2$ quoad $u=1$, quod sic notat:

$$C=A^2 \text{ (quoad } u=1).$$

Eadem prorsus significatione accipiendum est factum $ABC \ldots$ (quoad $u = 1$) et A^m (quoad $u = 1$). Considerantes hoc modo notationis adhibito æquationes non facile posse primo conspectu percipi, potentiæ vero paginis 113—116 persæpe occurrere mentionem, pro A^m (quoad $u=1$) ubique designatione $[A^m]_{u=1}$ sumus usi.

Haud superfluum erit deductionem propositionis $f=Fk^{m-1}$ designationibus præcisioribus ita ad finem perducere: Ad instar imaginis secundæ (pag. 41, § 28) possunt apponi (pag. 112)

$$n\frac{u}{n} = u = 1, \quad b' \ \frac{u}{n} \backsim b; \quad n \ \frac{a}{n} = a, \quad b' \ \frac{a}{n} \backsim f_1,$$

$$n\frac{U}{n\nu} = U = 1, \quad b'\mu\frac{U}{n\nu} \backsim b; \quad n\nu\frac{a}{n\nu} = a, \quad b'\mu\frac{a}{n\nu} \backsim F_1;$$

sed

$$\frac{\mu}{\nu} \backsim \frac{1}{k}$$

itaque

$$b'\mu \frac{a}{n\nu} \backsim \frac{f_1}{k};$$

et quum itidem

$$b'\mu \frac{a}{n\nu} \backsim F_1$$

habemus

$$F_1 = \frac{f_1}{k}$$

Si eiusmodi novus factor c accedat, constructis denuo schematibus

$$n^2 \frac{u^2}{n^2} = u^2 = 1, \quad b'c' \frac{u^2}{n^2} \backsim bc; \quad n^2 \frac{a}{n^2} = a, \quad b'c' \frac{a}{n^2} \backsim f_2,$$

$$n^2\nu^2 \frac{U^2}{n\nu^2} = U^2 = 1, \quad b'c'\mu^2 \frac{U^2}{n^2\nu^2} \backsim bc; \quad n^2\nu^2 \frac{a}{n^2\nu^2} = a, \quad b'c'\mu^2 \frac{a}{n^2\nu^2} \backsim F_2,$$

habemus

$$b'c'\mu^2 \frac{a}{n^2\nu^2} \backsim \frac{f_2}{k^2};$$

id est $F_2 = \frac{f_2}{k^2}$ &c.

Præbeat exemplum demonstratio regulæ sequentis:

$$[a^{rs}]_{U=1} = \left[([a^r]_{U=1})^s\right]_{U=1} = \frac{[a^{rs}]_{u=1}}{k^{rs-1}}.$$

Nam

$$[a^r]_{U=1} = \frac{[a^r]_{u=1}}{k^{r-1}}$$

itaque

$$\left[([a^r]_{U=1})^s\right]_{U=1} = \left[\left(\frac{[a^r]_{u=1}}{k^{r-1}}\right)^s\right]_{U=1} = \frac{1}{k^{(r-1)}} \left[([a^r]_{u=1})^s\right]_{U=1}$$

$$= \frac{1}{k^{rs-s}} \frac{[(a^r]_{u=1})^s]_{u=1}}{k^{s-1}} = \frac{[(a^r)^s]_{u=1}}{k^{rs-1}}.$$

Ceterum tota hæc ratiocinatio præcipue id videtur sequi, ut viam præmuniat introducendi notionem quantitatis imaginariæ.

Pag. 119, v. 14 sponte patet, quia $\log. u = \log. 1 = 0$.

Hosted by Google

Pag. 121, initio capituli in hac pag. incipientis numero mendoso XXXI substituimus verum XXXII.

Ibidem ℣. *12* capituli Bolyai habet: «Insigniantur realia quoad -1 puncto supposito; ex. gr. $\sqrt{-4}=\pm 2$»; nos scripsimus: «Insigniantur realia quoad -1 litera i postposita vel anteposita; ex. gr. $\sqrt{-4}=\pm 2i$.» Hanc veniam sumpsimus nobis ut lectionem facilitemus, nam designatio Gaussii universim recepta suo sponte applicat se ad mentem Bolyai nostri; litera i eodem modo quo punctum Bolyaii pro abbreviatione locutionis «quoad $u=-1$» est sumenda; et hæc est causa, cur pro 1 non scripsimus i sed $1.i$.

Pag. 122. ℣. *14. a calce* pro $2.\pm 3$» scripsimus «± 2.3».

Pag. 124, ℣. *15* post vocabulum «realis» addidimus: «positiva».
Ibidem ℣. *9 a calce* pro «& varietur» scripsimus «varietur &».
Ibidem ℣. *8 a calce* «(per 1.2.3)» delevimus.

Pag. 130, sub 3. ℣. *4* pro «$x^m \equiv a$» scribendum fuit «$x^m = a$».
Ibidem ℣. *12*, pro

$$«x = \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}»$$

scribendum fuit:

$$«x = \sqrt[m]{a} \equiv \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}».$$

sic etiam in sequentibus ℣. *13 et 14* signo $=$ substituimus $\equiv$.

Pag. 134, ℣. *9 a calce* vocabula «parenthesi nova» occurrunt; in ed. I nempe cuique signo $\sqrt{}$ parenthesis erat subiuncta.
Ibidem ℣. *3 a calce* numerus valorum falso 32 dictus in 16 mutatus est.

Pag. 135, ℣. *4* ante vocem «item« verba «primum nempe et ultimum» uncis inclusa deleta sunt, porro pro «per 2.2» rectius scripsimus «per 2» sicut et pro «$2.2.2.2.2=32$» posuimus «$2.2.2.2=16$».

Hosted by Google

Pag. 136 capiti in hac pagina incipienti numerum iustum XXXIII præposuimus loco erronei XXXII.

Ibidem ℣. *7 a calce* «pactor» correctum est in «pacto».

Pag. 140, ℣. *1 et 2* signis communibus +— utimur pro ⊢⊣, ⊢⊣, et ℣. 13 intra uncos post «minuendo» vocem «dicto» omisimus.

Pag. 144, ℣. *7*, «$u = \frac{x'i}{n}$» adiecimus, at ℣. 9, «(si $x'i : n$ dicatur u)» delevimus.

Pag. 145, ℣. *7 a calce* interpunctione mutata pro «Quod» debuit scribi «quod».

Pag. 146, ℣. *4 a fine art. 6.* pro «$q + \frac{D-dq}{d} . d$» rectius scriptum est «$\left(q + \frac{D-dq}{d}\right) d$».

Pag. 148, ℣. *8* pro «$\sqrt{3}$ ipsi α» scripsimus «3 ipsi α^2».

Ibidem ed. I in ultima formula theorematis sub 10. exhibiti et typothetarum menda et in demonstratione subsequenti errores per incuriam admissos habuit, quos omnes emendavimus, ut puta: ℣. 6 a calce pro «valores numero pq» scripsimus, «valores numero non maiore quam pq» sed suppressimus, quæ post «ipsius $\sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}}$» sequebantur, nempe: «neque huius alius valor est, quia nonnisi numero pq sunt». Porro in ultima æquatione huius paginæ pro = scriptum est ⟹.

Pag. 149, ℣. *6* rectius visum est «⟹» scribere pro «=».

Ibidem sub 12. ed. I ubique signum idem = habet; ℣. 3 addi placuit «Ita». Hic allegatur theorema (pag. 105), — quum tamen ibi demonstratio de quantitatibus realibus solis esset facta — hic supplendum est theorema pag. 129, ℣. 3 a calce exhibitum, secundum quod æquatio

$$\sqrt[m]{a} \Longrightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[m]{b}$$

Hosted by Google

etiam pro numeris complexis rata est, ideoque etiam

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \cdot$$

Ibidem ℣. *6 a calce* sub signo $\sqrt{}$ ultimo Q^{np} corrigendum est in Q^{mp}.

Pag. 152. Deductiones inde a ℣. 8—16 factæ eo magis valebunt si

$$\pm e < \frac{h}{h+1}$$

fuerit, quocirca certe constabit

$$\pm e^n < \frac{h^n}{(h+1)^n}$$

esse.

Pag. 153, sub 17, ℣. *3;* itemque *pag. 158, art. ultimo* ℣. *1,* pro «sequente» scriptum est «sequenti».

Pag. 155, num. XXXIII in XXXIV, item *pag.* 161, num. XXXIV in XXXV erat mutandus.

Pag. 162, ℣. *15 et 16* pro: «tam e, quam $x \pm$ est» scripsimus «tam e, quam x cum $+$ est».

Pag. 164, ℣. *1,* verba «signo — sublato» addidimus. Bolyai in hoc capitulo differentiam inter signa $><$ et $\gtrless$ non satis accurate observavit, quod suo quoque loco emendatum est.

Pag. 166, In fine art. 4. sententia auctoris non satis clare est exposita: ceterum theorema initio articuli propositum planissime demonstratum est.

Ibidem ℣. *10 a calce* inter x et e coniunctionem «et» inseruimus.

Ibidem ℣. *4 a calce* et tum porro pro i introducta est litera r, in hac enim editione i imaginaria denotat.

Hosted by Google

Pag. 168, ℣. *7 a calce* et deinde porro pro litera r, cui aliam significationem tribuimus, introducta est litera l.

Pag. 170 et seqq. ubi Bolyai literis M, N . . . numeros Romanos denotat, loco «$M-1$, $N-1$, $N+1$, . . .» distinctionis causa visum est scribere «$[M-1]$, $[N-1]$, $[N+1]$, . . .»; porro *pag.* 171 siglis «$\overset{*}{M}$, $\overset{*}{M}'$» substituimus «$[2M]$, $[2M']$».

Pag. 171, ℣. *9*. Pro «et altera $\backsim A'$» satius videbatur apponere ipsam æquationem:

$$«1 \boxplus I'x \boxplus II'x^2 \boxplus \cdots \backsim A'»$$

Ibidem ℣. *10 a calce* addi potest illustrans hoc supplementum: «itaque, quum $\overset{*}{u}\overset{*}{u}' \backsim AA'$ et $uu' \backsim AA'$,

$$\overset{*}{u}\overset{*}{u}' - uu' \backsim 0,$$

unde pro m quamvis magno fieri potest

$$\overset{*}{u}\overset{*}{u}' - uu' \lhd \lambda.$$

Pag. 172, ℣. *2* Bolyai scripserat «ac positiva $\lhd \lambda$ fuerit», hinc substitutum est: «ac omnium terminorum positive acceptorum summa $\omega' \lhd \lambda$ fuerit».

Ibidem ℣. *penultimo* loco «si n non sit $\lhd \frac{e+f}{1-f}$» scriptum est «si $n \rhd \frac{e+f}{1-f}$».

Pag. 173 ℣. *6* pro «$f = \frac{h+\lambda}{k}$» scriptum est «$f = \boxplus \frac{h+\lambda}{k}$».

Ibidem ℣. 8. pro

$$«f\frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} \rhd 1»$$

scriptum est:

$$\boxplus f\frac{k}{h} = \boxplus \frac{h+\lambda}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} \rhd 1».$$

Hosted by Google

Ibidem ℣. *15, ed. I* habuit æquationes sequentes:

$$A+B=A\left(1+\frac{e-n}{n+1}\cdot\frac{k}{h}\right) \quad \text{et} \quad C+D=C\left(1+\frac{e-n-2}{n+3}\cdot\frac{k}{h}\right)$$

quæ erroneæ sunt.

Ibidem ℣. *16 et pag. 174* transscriptio facta est ex præcepto auctoris (Vide ed. I, errata pag. LIX—LX).

Ibidem ℣. *4 a calce* «$(1+x)^e$» scriptum est pro «$(1+x)$».

Ibidem ℣. *2 a calce* inseruimus «(k et h positivis)».

Pag. 173 in nota sub * ex. ed. I. pag. LIX addita:

℣. 1,	pro	«$\frac{e-n-2}{n+3}$»	scriptum	est:	«$\frac{n+2-e}{n+3}$»
℣. 2,	«	«Accipitur»	«	«	«Accipiatur».
℣. 3,	«	«$\frac{e-n}{n+1}$»	«	«	«$\frac{n-e}{n+1}$» et
	«	«$e-n$ negativ.»	«	«	«$n-e$ positivum».

℣. 4 pro «maius negativum prodit» scriptum est: «maius prodit» et pro «veræ negativo» scripsimus «veræ positivo.»

Pag. 174, ℣. *5* post $\frac{e-n}{n+1}$ vox «decrescens» deleta est.

Ibidem ℣. *11* a calce pro «posterioribus» scriptum est «postremis.»

Pag. 175, ℣. *6.* Conclusionem: «summa seriei tendit ad ∞» addidimus.

Ibidem ℣. *15* post voces «ut summa eorum» ed. I hæc habet: «si e exponens seriei qui ad a est, constans maneret, sit $=$ aut $> b$ . . . &»; item ℣. 18 post parenthesim erat: «sit $=$ aut $> b$». Hæc mutavimus ut sententia auctoris facilius intelligatur. Theorema in art. 7. propositum aliter et sic potest pronuntiari: Sint duo termini se invicem excipientes cuiusdam datæ seriei in genere u_n et $u_n \cdot e$, ubi $e < 1$, positivum et a certo quodam termino incipiendo non decrescens; si qualecumque quod-

Hosted by Google

dam e supponatur constans, series geometrica construatur, cuius exponens sit istud e, et si summa terminorum certi numeri huius seriei non fuerit minor quam numerus constans b, series data certe divergens erit. At enim

$$b = u_n + u_n \,.\, e + \cdots + u_n e = u_n \frac{1 - e^{m+1}}{1 - e}$$

et inde sequitur

$$u_n < b < \frac{u_n}{1 - e}$$

si igitur limes $\frac{u_n}{1-e}$, cum n infinite magnum fuerit, non erit 0, series data divergens erit. Sensu inæqualitatis huius est sumptum b in exemplo pag. 176 allato; cumque porro identice sit

$$\frac{u_n}{1-e} = u_n : \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{u_n^2}{u_n - u_{n+2}}$$

hoc criterium divergentiæ idem est cum criterio pag. 177 exposito.

Pag. 176, ℣. *11* omissis uncinis et «$= \frac{1}{2^2}$» superfluis simpliciter scripsimus «$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$»; similiter ℣. 13 signo $=$ substituimus $>$.

Pag. 177, ℣. *11* incipit observatio ipsius auctoris, quam pag. LXXXVI ed. I exposuit, quæque hic videbatur inserenda. Theorema hic propositum demonstratur pag. 588/9.

Pag. 178, ℣. *10 a calce.* Propositio ab auctore citata singularis casus est eius, qua hic usus est. Si spectes propositionem non esse distincte enuntiatam, accipe hic accuratam demonstrationem propositionis ipsius:

Si

$$\frac{u_1}{v_1} \backsim 1, \quad \frac{u_2}{v_2} \backsim 1, \quad \ldots, \quad \frac{u_m}{v_m} \backsim 1,$$

tum etiam

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_m}{v_1 + v_2 + \cdots + v_m} \backsim 1$$

Hosted by Google

excepto eo casu, si maximum valorem v_i per v_j notando sit:

$$\frac{1}{v_j}(v_1+v_2+\cdots+v_m) \backsim 0.$$

Nam sit N quamvis magnum et qualecumque, semper erit:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i\left(\frac{u_i}{v_i}-1\right)}{\sum_{i=1}^{m} v_i} < \frac{\sum_{i=1}^{m} \mp v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} \cdot \frac{1}{N}$$

quia pro eodem N

$$\frac{u_i}{v_i} - 1 < \frac{1}{N}, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ m)$$

fieri potest.

Denotetur per v_j maximus valor cuius v_i capax est, erit:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \mp v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} < \frac{m}{\frac{1}{v_j}\sum_{i=1}^{m} v_i};$$

hoc est, si casum supra allatum excipias, finita quadam quantitate minus, et inde cum N ut vis augere liceat

$$\sum_{i=1}^{m} u^i : \sum_{i=1}^{m} v_i \backsim 1,$$

quod erat demonstrandum.

Pag. 178—80. Ad theorema generale hic tractatum spectant sequentia tom. I, ed. I, pag. LXXXVI exhibita:

«In opere hungarico dicto (pag. 154) aliter demonstratur.

Nempe si duarum serierum convergentium termini t et u fuerint, summæque terminorum usque ad p-tum fuerint T et U, atque t et T ab n (quod utvis augere liceat) depen-

Hosted by Google

dentia sint, U vero et quodvis ipsorum u constantia maneant: tum si $\frac{t}{u} \backsim 1$, nempe pro dato utvis magno N detur tale n, idem pro omnibus dictis terminis, ut

$$t - u \lhd u : N, \quad \text{adeoque} \quad t - u = f\varrho u,$$

per f fractionem veram positivam vel negativam intelligendo, atque ϱ scribendo pro $1 : N$; tum erit $T \backsim U$; imo si terminorum post t_p sequentium summæ (proprie summarum limites) fuerint τ et ω, series ipsius u erit $U + \omega$, et series ipsius t erit $T + \tau$; atque

$$T + \tau - (U + \omega) \backsim 0,$$

si $p \backsim \infty$.

Nam $T - U$ tendit ad zero et tam τ quam ω limite 0 gaudent, quum series convergentes sint; adeoque et $\tau - \omega$ limite 0 gaudet, eritque $T + \tau \backsim U + \omega$.

Quod T tendit ad U, patet, si (in æquationibus sequentibus additis)

$$\begin{aligned} t_1 - u_1 &= f_1 \varrho u_1, \\ t_2 - u_2 &= f_2 \varrho u_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_p - u_p &= f_p \varrho u_p, \end{aligned}$$

columna ad dextram ponatur $= x \varrho U$; eritque

$$x = \frac{f_1 u_1 + f_2 u_2 + \ldots + f_p u_p}{U}.$$

Et si terminus in numeratore is, quo nullus maior est, sit k, accipiaturque positive et realiter, columna ad dextram non erit maius quam $pk\varrho U : U$ idest $pk : N$. Hoc autem tendit ad limitem zero; nam sit $k = f_h u_h$, hoc minus est quam u_h, adeoque pk minus quam pu_h, itaque finitum pro dato quovis p est, N autem tendit ad ∞, quum N manente p et k utvis augere liceat; si ex. gr. pro dato utvis parvo λ accipiatur $N \rhd pk : \lambda$, fiet $pk : N \lhd \lambda$; et

Hosted by Google

si detur tale n pro quibusvis terminorum dictorum, accipi maximum eorum potest.

Applicatum hoc ibidem est ad demonstrandum, quod $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots$$

limite eodem gaudent, si $n \backsim \infty$ et plura alia.

Sensit defectum demonstrationis ipse Bolyai, quando — in emendatione pag. 635 ℣. 15 — sibi profecto conscius singulari cum gravitate premit terminos residuos serierum tam constantium quam variabilium t_p et u_p simul, minores fieri debere quamvis parvo valore, qui cogitari potest, dummodo p sat magnum sit. Demonstratio auctoris strictior fit in applicationibus — in Tentamine una tantum invenitur applicatio (pag. 179, 180), in opere Hungarico plures sunt; nam ubique in duas partes dividitur eius demonstratio: ostendit quidem prius terminis residuis serierum tractatarum tam constantium quam variabilium t_p et u_p huic criterio satisfieri, et postea monstrat summarum terminorum priorum p — numero finito — utriusque seriei differentiam $T_p - U_p$ minorem fieri quam valorem quamvis minimum cogitatum, *dummodo parameter seriei variabilis n maior sit valore quodam satis magno*, unde deducit

$$T_p + t_p - (U_p + u_p) \backsim 0, \quad \text{si} \quad n \backsim \infty.$$

Post hæc ad pag. 180 adhuc notandum est, numerum N ut et pag. 178 liquido apparet, in inæqualitatibus primis non esse necessario unum eundemque, sed posse occurrente casu etiam maiorem fieri quam ℣. 6.

Pag. 179, ℣. 6 a calce pro «$\frac{1}{N}$» posuimus «$1+\frac{1}{N}$».

Pag. 181, ℣. 1—2 in ed. I sic habebantur: «tum pro illo m quivis quotus eiusmodi (ut antea) fit $\lhd \frac{1}{N}$; adeoque et factum ex eiusmodi factoribus est $\lhd \frac{1}{N}$, quum $N \rhd 1$ ponatur.»

Pag. 182 numerus XXXV in XXXVI est mutatus uti convenit.

Hosted by Google

Pag. 184, ℣. 13 signum = inter $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ supplevimus.
Ibidem ℣. 20 pro «$\frac{(-2a)}{a}$» emendatius scriptum est «$\frac{1-2a}{a}$».

Pag. 189. Inde ab art. 2 ex instituto nostro pro «*i*» ubique scripsimus «*j*».

Pag. 192, ℣. *ultimo* in parenthesi «—1» erroneum in «—2» mutavimus.

Pag. 194—195. Bolyai pag. 195 inde a vocabulis «Datur autem pro quibusvis realibus *A*, *B*, cet.» incipiendo logarithmi definitionem plane ad sententiam nostri ævi exhibet. At contra definitio «logarithmi elementaris», uti pagg. 51 et 96 legitur, sicut pag. 194 a vocibus «Nempe (pag. 51 et 96) est cet.» incipiendo exempla allata manifesto ostendunt, omnino laxa, poterimus dicere, soluta est. Conclusio inde sequens, a Bolyai silentio suppressa, est, hanc laxam et solutam definitionem reiiciendam esse. (Cf. pag. 536 § 12).

Pag. 195, ℣. *4—5* nota vocabulum «decies millionesima» pro «centies centum millesima.»

Pag. 197 et ss. Ed. I potentias functionum trigonometricarum hoc modo notat «cos. x^m, sin. x^m . . .» In hac editione pro his ubique aut «$(\cos. x)^m$, $(\sin. x)^m$ . . ., aut «$\cos.^m x$, $\sin.^m x$ . . .» posuimus.

Pag. 199, ℣. 5, pro «(Fig. 17)» scribi debuit «(Fig. 17. bis).»
Ibidem ℣. 9 verso ordine pro «$>$ ab aut $<$ab» scripsimus «$<$ab aut $>$ab».

Pag. 200, ℣. *11* vocabulum «inde» addidimus.

Pag. 201, *art. 5*, ℣. *1* vocabulum «superius» deletum est sicut et

Hosted by Google

℣. *3* deleta sunt «*C* superius». ℣. *7* totus insertus est, sicut et ℣. *9* vocabulum «inde».

Ibidem, *art. 6.* ℣. *1* «$=e^{a\sqrt{-1}}$» deletum est; porro ℣. *7* exeunte pro «$e^{a\sqrt{-1}}$» scribendum fuit «$e^{2a\sqrt{-1}}$».

Pag. 203, ℣. 2 mendum typothetæ emendantes pro «log.» scripsimus «log. (—3)».

Pag. 204, ℣. *1* textus pro «præcedente» scripsimus «præcedenti».

Pag. 206, ℣. penultimo quoad definitionem functionis absolutæ cf. ed. I, pag. LXII, tomi I et ed. huius pag. 593.

Pag. 207, ℣. *12* ex instituto «sequenti» scriptum est pro «sequente.» Sequentibus versibus loco denotationum a Bolyai propositarum pro commodo lectoris alias adhibere visum est, ita scripsimus:

℣. *3*	pro	${}^{n}\partial\!\!\!\int \bigcirc x \ldots$	$\partial\!\!\!\int^{n} f(x, \ldots)$
	«	$\partial\!\!\!\int \bigcirc x \ldots$	$\partial\!\!\!\int f(x, \ldots)$
℣. *4*	«	${}^{n}\partial\!\!\!\int^{x} \bigcirc x, y \ldots$	$\partial\!\!\!\int^{n}_{x} f(x, y \ldots)$
	«	$\partial\!\!\!\int^{n}_{x} \bigcirc x, y \ldots$	idem
℣. *5*	«	$\partial\!\!\!\int_{x} \bigcirc x, y \ldots$	$\partial\!\!\!\int_{x} f(x, y, \ldots)$

Porro notandum est in ed. I inter artt. 2 et 3 huius paginæ inserta fuisse sequentia:

> Interim ut Tyrones, partim per literas antepositas factores per superius ad dextram positas vero (quod etiam fieri solet) exponentes intelligere consveti, minus confundantur; et partim tradenda clarius discernendo facilius percipere queant: liceat diversas functionum formas ipsas arcubus, penitus aut magis minusve, supra vel infra aut circumcirca literam numerum aliudve signum clausis, denotare; ea cum determinatione, ut signum ita inclusum per id, quod clausum est, amittat vim quidquam aliud præter

Hosted by Google

functionis formam denotandi, etsi non clausum aliudquid denotaret.

Ex. gr. $\bigcirc x$, $\bigcirc x$, $y\ldots$, $\textcircled{A}x$, $(A)x$, $(B)x$, $(F)x$, $(U)x$, $(a)x$, $(b)x$, $(f)x$, $(u)x\ldots$, &c, functiones quasvis significare possunt. Ita $(s)x$ potest sinum arcus x, $(\backsim)x$ sinum versum, $(t)x$ tangentem, $(\S)x$ secantem, $(S)x$ cosinum, $(\backsim S)x$ cosinum versum, $(T)x$ cotangentem $(\mathbf{\S})x$ cosecantem; quorum pleraque uno calami tractu scribi possunt.

Ita si z sit $\sin x$, arcus ipsius z per $(a,s)z$, et si a sit $\operatorname{tang} x$, arcus ipsius u per $(a,t)u$; ita log. nat. y per $(l)y$, log. vulg. y per $(L)y$, et numerus cuius logarithmus z est, per $(n, l)z$, vel $(n, L)z$, denotari potest.

Hæc omnia designationes in hac editione adhibitas spectantes omittenda censuimus.

Pag. 208, sub 3. ℣. *1*, mutato tantum verborum ordine scriptum est «iam in $A(x)$ substituatur $x+i$ ipsi x».

Ibidem ℣. *11* recte scribendum fuit «$\frac{A(x+i)-A(x)}{i}$» pro «$\frac{(A)(x+i)}{i}$».

Ibidem sub 4. erroneum «ipsi i» emendavimus scribendo «ipsi x».

Pag. 209, ℣. *12*, pro «$(A)3\dot{x}-(A)(3-2)\dot{x}$» scripsimus ut res postulat «$A(3\dot{x})-A(2\dot{x})$».

Ibidem art. 4 versu ultimo vocabulum «seriei», quod Bolyai post vocem «terminus» per oblivionem omiserat restituendum censuimus, hic enim ubique «terminus seriei generalis» tractatur.

Pag. 210, ℣. *5*, quæ hoc loco in ed. I inter vocabula «generales» et «denotentur» inserta fuere, ordine paulum mutato in ℣. *6* et *7* relegavimus hoc modo: pro

$$«(A)m\dot{x}-(A)(m-1)\dot{x} \quad \text{et} \quad (B)m\dot{x}-(B)(m-1)\dot{x}»$$

ex instituto nostro scribendo

Hosted by Google

$$a(m\dot{x}) = A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$$
$$b(m\dot{x}) = B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}).$$

Ibidem ad locum ultimum nota definitionem functionum absolutarum et non absolutarum inveniri in ed. I, pag. LXII, sub III et in hac ed. pag. 593.

Pag. 211, ℣. 6, post «idem» inserendum censuimus: «et in serie huius $A(x)$ termini omnes eodem signo gaudeant»; secus enim pro inæqualitate $U - A < \frac{A}{N}$ scribendum esset

$$U - A < \frac{\pm a(1\dot{x}) \pm a(2\dot{x}) \pm \cdots \pm a(n\dot{x})}{N}.$$

Conditioni restringenti in functionibus hic tractatis intervallum 0 et $n\dot{x} = \alpha$ apte dividendo semper satisfieri potest. (Cf. pag. 611 sub III.)

Pag. 212, loc. penultimo, posse n pro quovis N ita augeri, ut quando $\frac{\gamma}{\beta} > 0$ fuerit, quodvis ipsorum f, g, h, . . . (fig. 19) sit minus quam nominis eiusdem litera maiuscula per N divisa, et quidem pro eodem n, etiam ex sequentibus manifestum fit. Pro $y = \beta x + \gamma$ et $\omega = \beta\dot{x}$ est:

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{1}{2}\omega\dot{x}}{\dot{x}(3\beta\dot{x}+\gamma) - \frac{1}{2}\omega\dot{x}} = \frac{\frac{1}{2}\beta\dot{x}\dot{x}}{\dot{x}(3\beta\dot{x}+\gamma) - \frac{1}{2}\beta\dot{x}\dot{x}} = \frac{\beta\dot{x}}{(2.3-1)\beta\dot{x}+\gamma}$$

et generaliter

$$\frac{u(m\dot{x}) - a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \frac{\beta}{(2m-1)\beta\dot{x}+\gamma}\dot{x}.$$

Tum ut fiat

$$\frac{\beta\dot{x}}{(2m-1)\beta\dot{x}+\gamma} < \frac{1}{N}$$

scilicet quod idem est

$$\frac{1}{2m-1+\frac{\gamma n}{\beta x}} < \frac{1}{N}$$

sufficiet pro $\frac{\gamma}{\beta} > 0$ accipere

Hosted by Google

$$\frac{\gamma n}{\beta x} \geqq N, \quad \text{sive} \quad n \geqq \frac{N\beta x}{\gamma}.$$

Si vero $\gamma = 0$ est non potest tale n reperiri pro *quolibet* m; nam pro $m > \frac{1+N}{2}$ est

$$\frac{u(m\dot{x}) - a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{N};$$

unde pro m substituendo $\frac{nq}{x}$ sequitur loco conditionis pag. 213 ℣ 6 a calce indicatæ sufficere $n > \frac{(1+N)x}{2q}$ accipi.

Si vero pro $\gamma = 0$ sit $n < \frac{(1+N)x}{2q}$, hoc est $m < \frac{1+N}{2}$, erit etiam

$$\frac{u(m\dot{x}) - a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} > \frac{1}{N}.$$

Notandum etiam in ed. I. ultimis æquationibus pag. 213, interpositas fuisse has imagines transitorias «$x : \frac{(N+2)xq - qx}{q}$» et «$\frac{1}{N+2-1}$», quæ ut superfluæ omissæ sunt.

Pag. 212, ℣. 5 a calce, post «sit» insertum est «et $y = \beta x + \gamma$», quapropter et in sequentibus ubique γ est scriptum pro α; porro in ℣. proximo et pag. 213 x intervallum est, quod pag. 209. per α erat denotatum.

Ibidem ℣. *2* pro «$<$» scriptum est «non $<$».

Pag. 216, loc 3 in ed. I constans litera k designatur, cui alibi ubique c est substituta.

Ibidem, loc. 4, Peculiaris designatio integralium determinatorum hic adoptata amplius non occurrit, itaque lectori nullam adferet difficultatem, quapropter in hac editione non mutandam censuimus.

Pag. 217 ℣. 12 vocabula «per $dA(x)$, $dB(x)$ denotatum» inserta sunt. (Est hæc emendatio ipsius Bolyai ed. I, tom. I, pag. XXXVI exhibita.)

Hosted by Google

Pag. 220 ℣. *4* «suppositie» per errorem typothetæ mendosum mutatum est in «suppositive.»

Pag. 220 ℣. *6 a calce* «Summa vero coefficientis omnis . . .» (hungarice: «minden coefficiensnek») soloecismus est, pro quo lege: «Summa vero coefficientium omnium, per quos litera puncto insignita $\dot{x}$ multiplicata est &c.» Nempe hic *derivata* ipsius $A(x, y, \ldots)$, signis consuetis scripta, sequens intelligitur:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \cdots$$

Pag. 220. ℣. *5.* Editio prima pro $y(m\dot{x})$ scripsit $y*m\dot{x}$ etc.

Pag. 221, ℣. *1 et 2* litera $\dot{x}$ per errorem typothetæ istis functionibus præposita deleta scriptum est $a(x)$, relative $a(m\dot{x})$.

Pag. 222, sub 15 in fine «et idem quoad derivatam probabitur» spectat ad ℣. 3—5 pag. 344, ubi legitur: «et derivata quoque sit summa derivatarum quoad singulas variabiles acceptarum».

Pag. 223, ℣. *7* pro «*m*» scribendum censuimus «*x*». Errorem calami vel typothetæ fuisse suspicamur, sed non plane manifestum est.

Ibidem ℣. 14. Bolyai tacite supponit, etiam differentialium seriem convergentem esse.

Pag. 225, articulis in hac et sequentibus paginis sub VI expositis pro numeris literas præposuimus.

Pag. 227, sub g) in editione originaria sic ordiebatur auctor: «Si terminorum plurium summa ad exponentem ⊢ vum elevata sit derivata &c. . .» Ex ipso tenore contextus liquido apparet pro «elevata» scribendum fuisse «elevatorum», quod et ei substituimus simul vocem «integrum» inserendo.

Hosted by Google

Pag. 228, art. 1. Demonstratio hæc non omnino valet, irrita enim fit nisi series integranda *absolute* convergens sit.

Pag. 229, etiam hic singulis articulis sub VII comprehensis pro numeris literas præposuimus.

Ibidem, art. d) ℣. *5,* sententia clarior fuerit, si a verbis «per x vero . . .» incipiendo pro iis, quæ nunc leguntur, scripseris: «per $a+x$ vero distantiam puncti variabilis ipsius M a plano P intelligendo».

Pag. 230—231. Hic et ubique cuivis integrali et functioni primitivæ accensenda est constans etiam si non fuerit adscripta, ut ipse auctor pag. 232 sub finem art. VIII, *a)* monet.

Ibidem, ℣. ultimo ed. I habuit: «Solet hoc, quod ∂v sit $= \partial\partial s$ sive $\partial^2 s$ . . .» ubi pro ∂ scribi oportuisse ∂ manifestum est.

Pag. 232. 11 pro «$\int gt$» lege «$\int g\dot{t}$»; ubi etiam nota ordinem ed. I paullo mutatum esse.

Pag. 232 ℣. *12.* Vocabulum «posita» post «constante» delendum censuimus.

Pag. 232. In fine art. VII pro «$\int^2 gdt$» scripsimus «$\int dt \int gdt$» quod facilius legetur.

Pag. 233, ℣. *2 a calce* inseruimus «constante posito 0».

Ibidem ℣. *13.* Fig. 21 non convenit cum textu, itaque corrigenda erat; æquabilitatis causa pro α est a positum.

Ibidem ℣. *ultimo* post «$A(x)=0$» additum est «pro $x=a-b$» facilioris lectionis causa.

Pag. 234 ℣. *1—5* plures typothetæ errores irrepserant, quos emendavimus. Habuit enim ed. I hoc loco: «erit

Hosted by Google

$$A(0)=B(0)-B(x)+A(x)=-B(x)=-\left(bx+\frac{x^2}{2}-ax\right)=$$

$=ax-bx-\frac{x^2}{2}$, quod (pro $x=a-b$) est

$=a(a-b)-b(a-b-\frac{(a-b)^2}{2}$, et hoc (reducendo ad denom. eundem) est

$$=\frac{(a-b)(2a-2b-(a-b)}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}.»$$

Ibidem in ultima æquatione art. *b)* pro «—» scripsimus «⊢⊣» et signo «=» substituimus «≕».

Pag. 235—237, art. b). Exacta descriptio *areae hyberbolae* exposita est pag. 237 sub *c)* in ultima sententia particulæ primæ. Item soliditas hyperbolæ a plano circuli per $\mathfrak{af}$ descripti incipit et extenditur in infinitum in directione asymptotæ, quæ axis rotationis est.

Pag. 238, loc. ultimo ed. I hæc habebat:

«Nam seriei summa tota esset (per 162)

$$\lessdot u:\left(1-\frac{u^2}{2}\right)=\frac{2u}{2-u^2}$$

et

$$u:\frac{2u}{2-u^2}=\frac{2u-u^3}{2u}=\frac{2-u^2}{2}$$

quod $\backsim 1$, dum $u \backsim 0$.»

Certe in hac expositione aliquid incongrui latet. Est enim series exponentium seriei

$$\frac{u}{2},\ \frac{2u}{3},\ \frac{3u}{4},\ \ldots$$

quorum quisque $\overline{\overline{\gtrdot}}\frac{u}{2}$ quod $\gtrdot\frac{u^2}{2}$ (quia $u\lessdot 1$).

Itaque

$$s\gtrdot u+\frac{u^3}{2}+\frac{u^5}{4}+\cdots \text{ id est } s\gtrdot u:\left(1-\frac{u^2}{2}\right);$$

esse vero

Hosted by Google

$$s < \left(u + \frac{u^2}{2}\right) : (1 - u^2)$$

manifestum est, quisque enim exponentium seriei ipsius s est $< u$, eoque magis $< u^2$.

Pag. 239 ℣. *9 a calce* post «log. z» adiecimus «+ constans», quia modus eruendi hanc constantem in sequentibus exponitur.

Pag. 240, ℣. *2* pro «$0-(A)p=0-(B)p$» scriptum est:

$$A(p)=B(p) \quad \text{et} \quad A(p)-B(p)=0.$$

Pag. 242, ℣. *ultimo* pro «$u=kv$», quod error calami esse videtur, scriptum est: «$a(x) \overset{\circ}{=} kb(x)$.»

Pag. 244, ℣. *5 et 6.* Quæ ed. I hoc loco habet, minime conveniunt cum præcedentibus, et facile apparet aliquem latere errorem, pro «est $< \frac{1}{5}$» enim ibi legitur «est $< \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{7}{(7-5) \cdot 5}$»; porro ubi ℣. 6 fuisset scribendum: «erit defectus $< \frac{1}{\mu+2} \backsim 0$» scriptum est: «erit $< \frac{\mu+2}{(\mu+2-\mu) \cdot \mu} = \frac{\mu+2}{2\mu} \backsim 0$».

Pag. 244 et 245 tota evolutio huius exempli *h)* in hac editione differt ab ed. I. Ibi enim iam ipsa evolutio termini $\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ aliter apparet, nam ed. I. habet:

$$u = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.1.}{2.4} x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} x^6 + \cdots\right)$$

$$= x + \frac{1}{3.2} x^3 + \frac{1.1}{5.2.4} x^5 + \frac{1.1.3}{7.2.4.6} x^7 + \cdots$$

pro quo ed. II. recte sic scribit:

Hosted by Google

$$u = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2} \quad x^2 + \frac{1.3}{2.4} \quad x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \quad x^6 + \cdots\right)$$
$$= \quad x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Itaque denominator in calce pag. 244 appositus est:

$$2 \,.\, 4 \ldots (2n-2) \,.\, (2n-1)\, 2^{2n-1}, \quad \text{pro} \quad (2n-1)\, 2 \,.\, 4 \ldots 2\,(n-1)\, 2^{2n-1}$$

quod re quidem idem est, sed forma differt, neque cum præcedentibus congruit. Nihil ergo mirum est, si initio pag. 245 (pag. 214 ed. I) error ex evolutione seriei ortus continuatur, et exponentem seriei ultimæ

$$(2n-3) \cdot \frac{(2n-1)\, 2^{2n-1}}{(2n+1)\, 2n \,.\, 2^{2n+1}}$$

facit et < 1 ponit, cum $< \frac{1}{4}$ debuisset poni. Hæc in ed. II correcta sunt, et præterea pag. 245, ℣. 3. vocabulum «calculata» addi placuit luciditatis causa.

Pag. 248, c) Hic auctor motum rectilineum supponit, qui eodem tendit quo vis ipsa agere nititur.

Pag. 251—253. Errores calculi vel calami, qui ipso Bolyai fatente (vide ed. I, pag. LXXII) hic irrepserant, secundum indicationem ibi datam correcti sunt. At in ℣. 3—5 a calce pag. 253 alter error attentionem auctoris fugerat, ibi enim in ed. I. hæc leguntur: «et si hoc addatur velocitati priori, quam formula superior ad superficiem terræ dat, prodit velocitas «finita ad centrum».

Applicando enim principium de vi viva prodit

$$\frac{v^2}{2} = r^2 \frac{g\,(a-r)}{ar} - \int_r^z \frac{gz}{r}\, dz,$$

id est;

$$v^2 = \frac{2g}{a}\, r\,(a-r) + \frac{g}{r}\,(r^2 - z^2)$$

unde pro $z = 0$ sequitur;

Hosted by Google

$$v^2 = \frac{2g}{a} r(a-r) + gr.$$

Pag. 256. Art. 1. Experimenta in hunc finem instituta satis prope videntur accedere ad suppositas a Bolyai rationes; pro $\frac{1}{2}$ scilicet ratio prope $\frac{2}{5}$ est.

Ibidem art. 2 clausulam (per reg. de tri) æquationi subiunctam delendam esse censuimus.

Pag. 257, ℣. *6* signa — sunt apposita.

Pag. 262, ℣. *2,* «ad» corrigendum erat in «ac»; et signis $\lessdot$, $\gtrdot$ simplicia $<$, $>$ sunt substituta.

Pag. 263, ℣. *3* pro $\frac{\dot{x}}{2}$ et $\frac{5}{8}\dot{x}$ quæ in ed. I profecto per calami aberrationem irrepserunt, scriptum est $\frac{\dot{x}}{4}$ et $\frac{4}{8}\dot{x}$.

Pag. 264, ℣. *5* et sic etiam in sequentibus pro «$a+x$» scriptum est «X» quod lineam abscissæ denotat.

Ibidem, ℣. 14. «∂M» denotat derivatam lineæ quoad x.

Pag. 266, ℣. *1.* p scriptum pro P mendum typothetæ tollit. Constructio sententiæ a verbis «Si vero . . .» incipientis non satis lucida est, sed illustrat eam sententia subsequens a verbis «Si ex. gr...» orsa. Continet scilicet enuntiationem istius theorematis in casu singulari hic tractato; scilicet centrum massæ simul centrum esse virium parallelarum, quæ massis singularibus in punctis attractis sitis proportionales sunt.

Exempla pagg. 266—269 allata pro numeris, literis sunt signata.

Pag. 267 sub d) dexteræ parti æquationis ultimæ signum $\vdash$ præpositum nec secus in æquatione sub *e)* duobus terminis postremis additum typothetæ errorem emendat. Abscissam centri gravitatis ideo præcedit signum $\vdash$, quia signum termini $a+x$ in quovis puncto massæ negativum est, dum ∂M positivum est.

Hosted by Google

Pag. 272 art. extremo: «quo feriente omnis partis huius celeritas 0 fieri potest», scilicet si punctum, quod vis $MD\gamma$ impellit, cum ipso percussionis centro coincidat, sed directio eius opposita sit directioni motus efficiendi eiusdem puncti.

Pag. 274, ℣. 7, pro his in ed. I sequentia habentur:

> «exponens coeff. semper $\lhd 1$ est, et quidem in utroque casu sive $\vdash\!\!+$ sive $\vdash\!\!-$ fuerit k; nempe pro $\vdash\!\!+ k > 1$, duo proximi exponentes coeff. exprimi possunt pro μ integro per $\frac{k-\mu}{\mu+1}$ et $\frac{k-\mu-1}{\mu+2}$; et reducendo ad denom. eundem, patet priorem esse $\rhd$ posteriore (etiam pro $\mu=0$) si vero $-k>1$, demonstratum est, maximum exponentem coeff. esse ipsum $-k$»;

Brevius hæc sunt exposita ut facilius legi possint, præcipue quod versus citati non satis lucidi sunt.

Ibidem ℣. 14 «maximus» hic ad valorem absolutum referendum est.

Pag. 277, ℣. 3 a calce loco «k» scribendum erat «K».

Pag. 278. In ed. I æquationi in capite huius pag. appositæ subiuncta erat clausula: «(abstrahitur scilicet heic a determinatione $\vdash\!\!+$ et $\vdash\!\!-$ sensu pag. 37)». Quoniam in hac ed. summa cum cura distinximus signa $><$ et $\rhd\lhd$, hanc clausulam ut supervacaneam omittendam censuimus.

Pag. 278, ℣. 12, ubi ed. I habet: $\alpha-\beta=-\beta-\omega+\beta=-\omega$, error calami manifestus est, quem itaque sustulimus.

Pag. 282, ℣. 10, affirmatio, «quovis dabili maius fieri potest» cum hac restrictione est accipienda: nisi $A(q)$ et $B(q)$ simul fuerint $=0$.

Thesis ipsa in opere Hungarico «Arithmetika Eleje» Ed. nova pag. 254 ita est exposita:

$$d(uv) = v\dot{u}+u\dot{v}, \text{ si } \frac{\dot{u}}{u} \backsim 0 \text{ et } \frac{\dot{v}}{v} \backsim 0.$$

Hosted by Google

Pag. 284 sub 3) et pag. 285 sub 4. verbum «Est» præposuimus.

Pag. 286, sub. 5. ℣. 12 pro cs^2, quod in ed. I erronee est positum, —cs^2 restituimus.

Pag. 287. In hac et in subsequentibus paginis pro «corda» ubique scriptionem «chorda» adhibuimus.

Pag 289, ℣. 5 ante vocabulum «plagam» præpositio «in» necessario erat inserenda.

Quod definitionem «formæ curvæ attinet, ista in tom. I, ed. I, pag. 458 ita legitur:

> «6. Passus hinc est cogitare: quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma* eiusmodi *fluens*; . . . 7. Ita facile conceptus formæ fluentis etiam cum exclusione rectæ planique componitur: oriturque forma fluens cuius nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma* eiusmodi *curva*.

Pag. 289, art. ultimo sic orditur: «Si lineæ nulla portio recta «sit. e talibus portionibus constare debet, quarum cuiusvis aut crescunt ordinatæ aut decrescunt (ad dextram intelligendo).» Certe notatu dignum est hanc thesim a Bolyai ut demonstrandam esse propositam, quamquam demonstratio ipsa certo captioni innititur.

Pag. 289, art. 4. pro *p* scriptum est **p**, quod punctum rectæ denotat.

Pag. 290, sub 3. loco *p* scriptum est *P*, quod hic punctum temporis significatur.

Pag. 292, ℣. 4, in ed. I per errorem calami aut typothetæ est: «nisi in convexæ puncto . . .», ubi scribendum erat: »nisi in concavæ puncto . . .»

Hosted by Google

Ibidem sub 7. Quod in hoc art. exponitur, summa attentione dignum est: datur scilicet demonstratio elementaris existentiæ longitudinis arcus.

Pag. 294, ℣. 13, ed. I. lectorem ad pag. 230 remittit, ubi manifesto typotheta erravit; ceterum hæc ex præcedentibus sponte sequuntur itaque citatione non est opus.

Pag. 296 signa maioritatis et minoritatis $>$, $<$ substituta sunt signis $\rhd$, $\lhd$ quæ ed. I. posuerat.

Ibidem sub 9. ℣. 1 pro: «atque ordinata» scriptum est: «atque ordinatis», quod sensus enuntiationis postulat.

Ibidem sub 9. ℣. 2 «erit functio differentianda (non ut antea, sed) in concreto data»; quid voluerit Bolyai his verbis intelligi, diserte expositum est in opere Hungarico «Arithm. Eleje» pag. 257, art. ultimo, ubi sic disserit:

> «Ceterum notandum est functionem differentiandam, si e. gr. longitudinem curvæ $A(x)$ significet vel aliud eiusmodi, non ita evidenter dari, quam aream inter ordinatas, abscissam et curvam comprehensam, quando et termini seriei incrementorum omnes sub oculos cadunt; sed tantum eiusmodi quoddam variabile Z datur, ut $Z \backsim A(x)$ si $n \backsim \infty$, quando scilicet ubi demonstratum est Z gaudere limite, hic limes itidem in certam formam redigi potest, sicut area memorata; et fit functio æque independens ab n».

Notandum præterea omnia sub 9. hic proposita contineri ea conditione, ut y et $\dot{y}$ eadem habeant signa præposita; ideo in ℣. penultimo inserta est præpositio «pro», quod itidem factum est sub 10. ℣. 3.

Pag. 298, ℣. 7., post «a et b» ed. I. addit: «nam $\beta > b$ (p. 261), $y'' + \lambda > y' + \lambda''$, quia $\lambda > \lambda''$, atque $y' + \lambda' > y'$». Hæc sane omnia vera sunt, sed ex iis nequaquam sequitur thesis præcedens, quæ tamen ex ipsa figura modo sat noto verificari potest. Ideo addita hæc clausula deleta est.

Hosted by Google

Pag. 302, ℣. 8 et 9 Constructio sententiæ obscurior est quidem, attaen facile intelligitur, quid voluerit auctor dicere his verbis «aut vero scissa (post $x=1$) a 0 crescens accipi poterit», scilicet ait $x-1=y$ sse positivos valores suscipere a 0 semper crescendo, quod idem eximit subsequens «aut (abscissa) ab $x=1$ usque ad . . .»

Pag. 303, ℣. *4—6*. Hic sicut et in figura 38—va dimidium $\dot{x}$ etiam r $\dot{x}$ designatur.

Pag. 307, ℣. *11 a calce* pro «aut» scriptum est «nec».
Ibidem ℣. *ultimo* pro «secundæ» scribendum fuit «secundi».

Pag. 308, ℣. *16 a calce*. Præpositio «per» manifesto errore calami nissa inseri debuit.

Pag. 309. sub b) ℣. *4*. vocabulum «axi» (sc. abscissarum) necessario seri debuit.

Pag. 310 ℣. *ultimo* ⊢ scriptum est pro ⊣⊢.

Pag. 312, ℣. *7* «respondentes» erat scribendum pro «respondens».
Ibidem ℣. *9* exponens $\frac{1}{2}$ addi debuit in formula «$\partial^2(x^2-x^4)$.»
Ibidem ℣. ℣. *11 et 12* substituti sunt iis, quæ in ed. I sic habentur:

> «ubi factor prior ⊣⊢ est pro valore ⊣⊢ vo ipsius $\sqrt{x^2-x^4}$, posterior autem ⊢ est; nam reducendo ad denominatorem eundem, et terminum ultimum per x^2 dividendo fit. . .»

Pag. 313 ℣. *7* vocabulum «patet» additum est.

Pag. 314. Aequatio secunda huius paginæ in ed. I ita stat:

$$\partial^2 y = \frac{6x-2}{2\sqrt{x^3-x^2}} - \frac{(3x^2-2x)^2}{2\sqrt{(x^3-x^2)^3}}$$

Hosted by Google

quod profecto erroneum est. Error hic calami propagatur per totum exemplum, quapropter etiam sequentia hoc errore contaminata transscribere oportuit.

Pagg. 316 et 320 de diversis relationibus est sermo, quapropter figuram 49 utrique casui conformiter bis delineari curavimus.

Pag. 318, ℣. *7* pro «ostenduntur» scriptum est «ostenditur».

Pag. 320, ℣. *10 a calce* vocabulum «positivum» in ed. I. omissum insertum est.

Ibidem ℣. *ultimo* titulus sepulcri Jac. Bernoullii paulum mutatus est; habetur enim sic: «Eadem mutata resurgo». Vide: Jac. Bern. Opera, Genevæ MDCCXLIV; pag. 30.

Pag. 322, ℣. *2*, litera m numerum certum denotans, porro ℣. 13, terminus finalis $M(x+\omega)^m$ itemque ℣. 17 in parenthesi terminus ultimus Mx^m additi sunt, quo facilius hæc legi possint.

Eadem causa ℣. *7* pro «ut» scriptum est «adiecto» et verbum «esse» e ℣. 8 in ℣. 9 est transpositum.

Pag. 323 ℣. *3* «maximum» in «minimum» debuit mutari sicut et in tribus inæqualitatibus subsequentibus $<$ in $>$ erat mutandum.

Pag. 323, sub 2. In opere Hungarico sæpius citato (pag. 329 ℣. 9 a calce) demonstratio aliquamdiu concinnior fit.

Pag. 324 ℣. *5*, brevius et concinnius vocabulum «ubi» positum est pro circumscriptione: «nam dici potest.»

Pag. 325, ℣. *7 a calce* et inde porro M_{p+1}, N_{p+1} scripsimus pro $(p+1)*M$, $(p+1)*N$ editionis primæ, ut facilitati lectionis consulemus; nam Bolyai certe noverat significationem indicum (vide pag. 208 ℣. 5.)

Hosted by Google

et supponi potest nonnisi dificultates typographiæ obstitisse, quominus iam anno 1829 indicibus uteretur; in additamentis posterius impressis iam ubique apparent.

Pag. 327 ℣. *1*, pro o ed. I habet *a* (error typothetæ).

Ibidem sub 4. ℣. *1* «exemplum prius allatum» ad evolutionem seriei $(a+x)^{\mu}$ refertur, quæ pagina præcedenti tractata est.

Ceterum ex hac pagina et sequentibus apparet Bolyai non novisse quam vim habeat ordo factorum in seriebus infinitis, quod tamen ei, si rationem temporum habeas, minime imputari potest.

Pag. 328, ℣. *8*. Vocabula «solummodo tales» inserta sunt, quum ex toto contextu liquido appareat hæc nonnisi per errorem calami a Bolyai omissa esse.

Ibidem ℣. 11. «positivus» insertum est; item ℣. *5—6 a calce* idem vocabulum est additum.

Ibidem ℣. *2 a calce* «pro ω positivo et <2» scripsimus loco «pro $\omega<\frac{2}{3}$» nempe ω per errorem calami loco a' irrepsisse patet (art. 2, ℣. ultimo).

Pag. 329, art. ultimo. Si quis planius ac pæne pedetentim ratiocinium hic expositum prosequi velit, sic procedet: Quum sit

$$\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots<\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{4}+\frac{a'^8}{4}+\cdots<\frac{a'^4}{4}:(1-a'^2),$$

sitque $a'<\frac{2}{3}$, sponte sequitur esse:

$$\frac{a'^2}{4(1-a'^2)}<\frac{\frac{4}{9}}{4\left(1-\frac{4}{9}\right)}<\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a'^2}{2}<\frac{a'}{2}\cdot\frac{2}{3};$$

at habemus etiam

$$\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots<\frac{a'}{3},$$

Hosted by Google

itaque summa omnium negativorum in serie ipsius log $(1+a')$, scilicet:

$$\frac{a'^2}{2}+\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\cdots \lessdot a'^2 \lessdot \frac{2a'}{3},$$

quod etiam ita poterit deduci:

Est certe:

$$\frac{a'^2}{2} \gtrdot \frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots$$

si:

$$\frac{a'^2}{2} \gtrdot \frac{a'}{4}(1+a'^2+a'^4+\cdots) \gtrdot \frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots,$$

hoc est si

$$\frac{a'^2}{2} \gtrdot \frac{a'^4}{4(1-a'^2)}, \text{ ubi } 0<a'<\frac{2}{3} \text{ vel } a'=\frac{2-\omega}{3}$$

ubi ω positivum est et <2. Dividendo ergo per a'^2 inæqualitas ipsa hanc novam formam induet: (pag. 229 ℣. 5 a calce)

$$\frac{1}{2} > \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2} : \left(1-\frac{(2-\omega)^2}{3^2}\right).$$

At alioquin $\frac{a'^2}{2} \lessdot \frac{a'}{3}$, quia nempe $a' \lessdot \frac{2}{3}$.

Habemus ergo pro summa omnium negativorum

$$-\frac{a'^2}{2}-\frac{a'^4}{4}-\frac{a'^6}{6}-\cdots < a'^2 < \frac{2}{3}a'.$$

Pag. 330 ℣. *9* pro errato $\frac{1}{3}$ poni debuit $\frac{2}{3}$ et ibidem ℣. *10* pro erroneo $\frac{2}{3}$ positum est $\frac{1}{3}$.

Ibidem ℣. *4 a calce* loco «p-ti» rectius scriptum est «$(p+1)$-ti.»

Pag. 332 sub 7, ℣. *2* ed. I «criterii elegantis seriei convergentis» cum ipse Bolyai in Err. pag. XCI agnoscat, hoc criterium nonnisi ad divergentiam referri, in «criterii» mutatum est. Eadem de causa ℣. 3—4

Hosted by Google

eiusdem articuli pro: «atque $nu_n \backsim 0$ dum $n \backsim \infty$, tum series convergit, et si prius non est, series divergit (pro terminis decrescentibus) plenius scriptum est: «atque non sit $n . u_n \backsim 0$, series divergit.»

Hic quoque et in sequentibus pro $u*n$ semper u_n est positum (v. antea adnotationem ad pag. 325).

Porro quod *pag. 335 sub* 9. in ultima enuntiatione articuli in ed. I dictum erat: «Per criterium seriei convergentis Oliverianum autem $\frac{n}{(4n-3)(4n-1)} \backsim 0$. Consequ. series dicta convergit,» ex eadem causa in hoc mutatum est: «Seriem dictam convergentem esse (pag. 243 et 341) demonstratur.»

Postremo *pag. 336*, ℣. 8—9 scriptum est: «Convergit autem series ipsius $(1-1)^e$, ut ex additamentis patebit»; demonstratio vero falsa convergentiæ deleta est; nempe omnia illa quæ post ℣. 8 in ed. I. habentur (scil. a vocibus: «Nam (142) signa . . .» usque ad: «atque series convergit (302)» pagg. 305 et 306, itaque tota fere pagina) omissa sunt; nituntur enim theoremate Oliveriano ab ipso Bolyai iam retractato. Seriem vero $(1-1)^e$ pro positivo e convergere e theoremate VIII pag. 589 patet.

Est enim:

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n-1-e}{n}.$$

Ibidem ℣. 11 «factum nu_n» est positum pro»factum superius».

Pariter omissum est quod pag. 337 sub 12. ℣. 6 a calce post $r \backsim \infty$ in ed. I habebatur: «atque si $R \backsim 0$ series convergit.» Denique versus quatuor art. 3 pag. 308 ed. I: «Conversim quoque, si $n . u_n \backsim 0$, series convergit. Nam sit $n=r$; erit $r . u_r \backsim 0$, sed $r . u_r \succ R$; itaque $R \backsim 0$; consequenter series convergit.» omissi sunt. Eiusdem paginæ ℣. 7—12 e pag. XCI tomi I. editionis I sunt desumpti.

Pag. 333, ℣. *8 a calce* vocabula «negativo et» inserta sunt.

Pag. 334 in fine art. 8. designationes «c_1, c_2''» insertæ sunt.

Ibidem art. 9 ℣. *2* scriptum est $z = 1 - \omega$ pro $z - 1 = \omega$, similiter

Hosted by Google

℣. 3 et 7. pro 1 scriptum est z; quæ nonnisi emendationes errorum calami sunt.

Pag. 339 ℣. *12—14* ita sunt intelligendi, quod est

$$\frac{d \sin z}{d \operatorname{cotg} z} = \frac{\cos. z}{-1 : \sin.^2 z},$$

eodemque modo et reliqua.

Pag. 343, ℣. 13—15 non satis clare exprimit y et x posse esse independentia vel coniuncta.

Pag. 344, ℣. *7* «(x, y)» positum est pro «$F(x, y)$» quod apud Bolyai certe error aut calami aut typothetæ est. Sane hic Bolyai locum (x, y) per X voluit designare, documentum eum iam præsensisse modum conceptionis recentioris ævi.

Pag. 346, ℣. *5*, clausula «ut supra dictum est» ad ea refertur quæ pag. 313 sub *h)* exposita sunt.

Pag. 346—348 sub 2. allata exempla non numeris sed literis distincta sunt. Ibidem emendando errores typothetarum pro Fig. 49 et 50 substituebatur 49* et 50*.

Pag. 350. Punctum p in ed. I. litera p erat designatum; ita etiam in paginis subsequentibus.

Ibidem ℣. *ultimo* post «eadem» clausula [per $F(x) = f(x)$ et $\partial F(x) = \partial f(x)$] deleta est.

Pag. 351, ℣. *1*, verbum «sit» ut abundans deletum est.

Pag. 352 sub 3. in fine clausula «exceptis singulis punctis (pag. 307) allatis» addita est.

Hosted by Google

Pag. 353—5. Determinationem centri et radii curvaturæ sine ulla mutatione repetivimus, quamquam calculus quoad signa determinativa radicum quadratarum concinnitate necessaria caret. Similiter immutatum reliquimus ℣. 10 pag. 355, quamquam proprie ad sensum præcedentium tantum sic liceret scribere

$$a = x + \frac{\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}} \cdot \frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}.$$

Sed ex hoc tantum sequeretur esse

$$a = x \pm \frac{\partial y\,(1+(\partial y)^2)}{\partial^2 y}.$$

Pag. 353, sub 5, ℣. *3* post «sint», deletum est «pro».

Pag. 355, ℣. *7* pro erroneo a positum est b.

Pag. 357 ℣℣. *3—4* pro x scripsimus z ut facilius legi possit, in fine vero paginæ et pagina sequenti x non mutavimus.

Ibidem ℣. 11 signum — errore calculi omissum apposuimus.

Pag. 359. Literæ ɦ, ɨ, ɩ, tam in contextu quam in figura pluribus in locis in ed. II permutatæ sunt.

Pag. Pag. 360—371 Expositio calculi variationis apud Bolyai in forma etiam pro sua ætate non satis perfecta apparet, et pars generalis præsertim ideo est obscurior, quod nec ratione problematum calculi variationis et nec quoad integrale tractandum quidem conditiones accessoriæ singillatim memorantur; harum posteriorum in parte generali unico tantum loco fit brevis mentio (pag. 361, art. 1, ℣. 2: «atque ex hoc et data condicione eruitur Y»). Ceterum mens totius pertractationis perspici potest in exemplis, præsertim in primo, ubi conditioni areæ datæ modo pereleganti et novo ita satisfit, ut loco abscissæ ipsa area ab ordinata attacta inducatur pro variabili independente, itaque integralis

Hosted by Google

tractandi limites fiunt 0 et area data. Alias conditiones quam fixis limitibus expressas Bolyai non tractat.

Pag. 361 in æquatione prima et sub finem art. 2 loco $N\omega + P\partial\omega$ scriptum est $f(N\omega + P\partial\omega)$, nam omissio signorum f manifesto errori calami tribuenda est.

Pag. 366. Disquisitio de linea brevissima in spatio, data area inter lineam et perpendiculares ad lineam abscissarum extremos atque abscissam, omnino erronea ideoque tota omissa est, quare etiam in exemplis primo et sequentibus vocabula «prius» et «ut antea» delenda erant. In opere ipso omissa hic sequuntur:

Si vero non supponatur lineam in plano esse: derivata quoad x longitudinis lineæ in spatio (pag. 268) est $\sqrt{1+(\partial y)^2+(\partial z)^2}$, cuius differentiale est (pag. 314) *

$$(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y\, d\partial y + (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z\, d\partial z =$$
$$= (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y\, \partial^2 y\,.\,\dot{x} + (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z\, \partial^2 z\,.\,\dot{x}\,;$$

patetque ut prius, quod si tam

$$(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y\, \partial^2 y \text{ quam } (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z\, \partial^2 z$$

$=0$ sit, tum maximum minimumve possibile esse; si nempe tam pro ω quam pro $-\omega$ utvis parvo incrementum reliquum simul positivum aut simul negativum sit; non superatur enim a prioribus istis terminis.

Dicatur P ut supra factor, per quem $\partial^2 y$ multiplicatur, et N dicatur factor, per quem ∂y multiplicatur, sed in quo ut factor $\partial^2 y$ non adest; ita coefficiens ipsius $\partial^2 z$ dicatur P', et N' coefficiens ipsius ∂z.

Erit hic

$$N = 0, \text{ et } P = (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y$$

* In hac ed. pag. 300, resp. 344.

Hosted by Google

ita

$$N'=0, \text{ et } P'=\left(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\partial z.$$

Erat autem

$$N=\partial P, \text{ ita } N'=\partial P';$$

consequenter

$$0=\partial P=\partial P';$$

adeoque P est constans, sit $=a$; ita P' constans est, sit $=b$. Atque hinc

$$\frac{P'}{P}=\frac{\left(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\partial z}{\left(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\partial y}=\frac{b}{a}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

adeoque

$$\frac{b}{a}\partial y=\partial z \text{ et } \int\frac{b}{a}\partial y=\int\partial z;$$

nempe

$$z=y.\text{constans}.$$

Unde patet lineam quæsitam in plano esse; concipiatur nempe planum p' secare in recta x planum p, in quo ordinatæ y accipiuntur; sintque Y et y in p ad x e punctis $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ perpendiculares, respondeatque Z ipsi Y, et z ipsi y; erit pro constante α,

$$Z=\alpha Y, \text{ et } z=\alpha y;$$

et pro $Y=ky$, erigatur e fine ipsius $\frac{Y}{k}=y$ ad p perpendicularis $=\frac{Y\alpha}{k}$; erit $\mathfrak{g}$ et finis ipsius $\frac{Y\alpha}{k}$ cum fine ipsius Z in recta, atque $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, et fines ipsorum $\frac{Y\alpha}{k}$ et z erunt apices rectanguli. Ita si tertium punctum $\mathfrak{g}''$ accipiatur, patet rectam ex $\mathfrak{g}''$ per finem respondentis z ductam esse prioribus parallelam et cum plano p angulum eundem efficere.

Potest etiam $z=\frac{b}{a}y$ ita esse, ut $\frac{b}{a}=0$ sit, adeoque Z in p cadat; atque potest in integratione constans arbitraria c addi ut sit $z=0.y+c$, adeoque planum ad distantiam c ipsi p parallelum.

Hosted by Google

Pag. 366 in fine exempli 1. Bolyai omisit constantem integrationis; patet enim pro valore eius 0 accipi posse.

Pag. 368 ℣. *9* vocabula «quam denominatorem» suppleta sunt.

Porro ℣. *10—12* quæ mutata sunt omissioni partis exempli primi respondent, deleta sunt nempe: «ut antea» ℣. 10 a calce, «item» ℣. 11 a calce; *ibidem* ℣. *14 a calce* pro «derivata quoad x» errorem sane calami emendando scriptum est «differentiale»; ℣. 12 *a calce* vero «et cœfficiens ipsius ∂z dicatur N' et P' cœfficiens ipsius $\partial^2 z$», additum est.

Pag. 368 sub finem art. 1. $\frac{1}{2ry}$ emendatum est in $\frac{1}{2r}$.

Pag. 370, ℣. *5* pro ∂y scribi debuit y.

Pag. 370, ℣. *9* pro y ponendum erat ∂y.

Pag. 371, sub 5, ℣. *5,* «exemplo allato» scriptum est pro «exemplis allatis.»

Ibidem in æquatione ultima art. 4

$$\int(N\omega+P\partial\omega+Q\partial^2\omega+\cdots)$$

est scriptum, præposito signo $\int$, quod in ed. I deest. Quod sub finem art. 4. dicitur «et superius dicta sequi patet» ad ipsam illam æquationem refertur, quæ pag. 363 titulum «Exempla» præcedit, secundum quam in hoc casu pro statu maximi et minimi

$$N-\partial P+\partial^2 Q-\partial^3 R=0$$

esse debet.

Pag. 373 ℣. *ultimo* «aut b præter 1» insertum est.

Pag. 375, ℣. *10* ad mentem ipsius Bolyai pro $=$ positum est $\equiv$.

Ibidem ℣. *13* «subiectæ» mutatum est in «subiecta» ut concinnitas dictionis postulat.

Hosted by Google

Pag. 376, ℣. *3* «id est» insertum est.

Pag. 377, ℣. *7 a calce* pro «ipsi $px=0$» positum est: «ipsi px respondentem $=0$.»

Pag. 379, ℣. *ultimo* pro «infrorsum «scriptum est «deorsum versus.»

Pag. 380, ℣. *10 a calce* vocabulum «idest», porro ℣. 9 et *ultimo* «$+b$» est additum.

Pag. 388, ℣. *7* et per totum exemplum ubique $\frac{g}{2}$ est positum pro g (pag. 248).

Pag. 391, exempli *m)* æquatio ultima erronee habuit in ed. I a læva parte $\frac{11.719}{2}$, ex quo deinde etiam ultimum resultatum $11.359+5+\frac{1}{2}$ quoque falsum fluxit.

Pag. 392, ℣. *3 a calce* ad mentem pag. XXXVI «Erratorum» addita sunt hæc: «nempe $S=CT$ (pag. 48) fit $=T$ pro $C=1$.»

Pag. 395 a capite in ed. I. denuo «§. 39» habetur, quod sicut etiam signa §§ sequentia usque ad §. 40 delevimus, substituendo seriem numerorum a 7. usque ad 16-tum.

Pag. 397, ℣. *3 et 4*. Pro his ed. I. habebat:

«$d(x)=(x-e).1+(\varepsilon=0)$, si primi gradus fiat $d(x)=0$.»

Pag. 398 ℣. *3 a calce* vocabulum «Nempe» ut superfluum deletum est.

Pag. 402. Colis in ed. I. appositis numeralibus distinctis literas *a) b)* ... præposuimus.

Hosted by Google

Pag. 408, ℣. 9 a calce ed. I. habuit: «adeoque radix inter $3+\frac{1}{2}$ et 1 est», ubi certe 1 loco 4 positum typothetæ error est, itaque quum revera duarum radicum altera inter 3 et $3+\frac{1}{2}$, altera inter $3+\frac{1}{2}$ et 4 sit, scribendum duximus: «adeoque radix inter

$$3+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 3+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$$

est.»

Pag. 409 pro ℣. 10—13 hæc habebantur in ed. I:

«Si $-M$ cœfficiens negativus maximus sit; et idem $-M$ sit cœfficiens termini m-ti (haud numerato primo); erit terminus m-tus $=-Mx^{n-m}$».

Hunc ipsum terminum m-tum simul et *primum* terminum negativum esse functionis $f(x)$ Bolyai oblitus est indicare, nos modica mutatione adhibita hoc ipsum significare simul rem ipsam concinnius exponere voluimus.

Ibidem ℣. 15 pro «simul cum illo» scripsimus «usque ad illum», quæ modice mutata elocutio facilior erit intellectu.

Pag. 414—5 exempla non numeralibus sed literis sunt distincta.

Pag. 416, ℣. 18, 19, locutio «et signa +, — eadem sint in numeratore» secundum præceptum ipsius Bolyai pag. LIII erratorum datum inserta est.

Pag. 417. In æquationibus ad calcem paginæ appositis, stellulas, quæ propter difficultates typographicas in ed. I. solummodo capitibus columnarum erant superpositæ, singulo cuivis coefficienti superposuimus, itaque dictio: «ubi stellula cuiusvis columnæ numero cuivis superposita cogitetur» ut supervacanea, omittenda erat.

Pag. 418, ℣. 6, «Nempe» ad æquationes ad calcem pag. 417 appositas refertur.

Hosted by Google

Pag. 421, ℣. *7*, «deesset» correctum est in «deesse.»

Pag. 425, ℣. *5* «ex» emendatum est in «et».

Pag. 425, ℣. *7*. Bolyai tantum oblitus erat indicare valorem quæsitum non modo integrum, verum etiam positivum esse debere; ideo vocabulum «positivus» inseruimus.

Pag. 428 sub 6. ℣. *3* clausula »numero 3 maiorem» inserta est.

Pag. 429, ℣. *13 a calce* «si« in ed. I. omissum supplevimus.

Pag. 430, ℣. *8*, ℣. *20* sicque etiam in pag. subsequenti signa $\rhd \lhd$ applicuimus. Etiam Bolyai valoribus absolutis applicat signa maius, minus, neque expresse monet $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ etiam diversæ determinationis esse posse, et restrictionem, quæ postulat $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, respective a, b, . . . omnes positivos esse debere tantum in art. ultimo pag. 433 introducit.

Pag. 432, ℣. *7*. pro «$\frac{I}{I'}$» posuimus «$\frac{L}{L'}$» (vide ed. I. Errata p. LIII.)

Pag. 433, art. postremo, ℣. *1* vocabula «omnibus positive acceptis» inserta sunt, ut congruat cum eo quod Bolyai in ultimo huius art. ℣. monet; «et a positive accipitur.» Et quoniam in fine pro a posita sunt a, b, . . . pro «accipitur» scribendum erat «accipiuntur.»

Pag. 442 sub 19. ℣. *4* per errorem calami «ad lævam» erat in ed. I. scriptum, quod, ut opus erat, in «ad dextram» mutatum est.

Pag. 444 in ultimis duabus æquationibus nempe in terminis generalibus exponenti literæ a apposito «$n-2\mu$» substitui debuit «$n-2\mu+1$» ut error typothetæ corrigatur.

Pag. 446, ℣. *7* pro «$-bx(IK'-I'K)$» substitutum est «$bx(H'I-HI')$».

Hosted by Google

Ibidem ℣. *8* «$-\omega$» mutatum est in «$\pm\omega$»; præterea inserta sunt vocabula «signi ratione non habita.»

Pag. 446—8. Propositionem veram esse Bolyai pro positivo a demonstrat si $b=1$ est; attamen applicat eam etiam si a negativum et $b>1$ sit.

Pag. 447, 20. Satis notum est algorithmum Bolyaianum etiam a vv. ill. Farkas, Königs, Netto et aliis tractatum esse.

Pag. 448, ℣. *1 et 4* in partibus lævis æquationum $\mp$ est ubique positum pro $+$ (quod typothetæ error erat).

Pag. 448, ℣. *8* $\mp$ positum est pro $+$ (eadem de causa).

Pag. 448, ℣. *9* «inde ab secundo» insertum est et pro «aut« «sive» scriptum, quod dictionem concinniorem reddit.

Pag. 448, ℣. *13* «$\frac{+1-3}{2}, \frac{-1+3}{2}$ substituimus pro «$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-3}{2}$» quod typothetæ errore irrepserat.

Pag. 449, ℣. *10 a calce* «primo $\sqrt[m]{}$ omisso» insertum est ut concinnior fiat dictio.

Ibidem, ℣. *4 a calce* concluditur «atque si m par sit, radicali negative accepto prodibit radix æquationis

$$x^m + x - a = 0.»$$

E præmissis hoc non sequitur, nisi de «radicali primo negative accepto» agatur. Sed ut e ℣. 9—10 pag. 448 apparet Bolyai algorithmum $\mp\sqrt{a\mp\sqrt{a\mp\sqrt{\ldots}}}$ habuit præ oculis et propositio alioquin etiam vera est, ut Netto (Math. Ann. Bd. XXIX, pag. 147) ostendit, si a positivum est; imo demonstrari potest hunc algorithmum tantum si $a=1$ sit

Hosted by Google

non tendere ad limitem, dum in omnibus aliis casibus (etiam si a complexum sit) dummodo valor $\sqrt[2m]{a}$ apte sit determinatus, ad limitem perducit, nempe ad radicem æquationis.

Pag. 453, ℣. 3 a calce clausula «(pag. sequ.)» ad exempla pagg. 455—6 sub *a)* et *c)* allata refertur.

Pag. 455, ℣. 1—2 pro «monetam» scribendum fuit «monetas.»

Pag. 457. Quæ hic initio § 43 promissa sunt, in additamentis vero nihilo minus desunt, testantur Bolyai in animo habuisse supplementum addere operi suo; at hoc consilium non est exsecutus, sicut Bolyai (in fine Tom. I, ubi «Egy kis toldalék a Deák első kötetéhez» inscriptar accessione pag. IV, loco 2) scribit: «ob penuriam argenti».

Pag. 458, ante ℣. 7 a calce ed. I habuit:

$$\text{«seu } \frac{(m-1)si}{i^2(m-1)^2}, \text{ id est } \frac{s}{i(m-1)}, \text{ nempe } sx>\beta\text{»}$$

quod omisimus.

Pag. 459 ℣. 1 in ed. I sic legitur: «Itaque pro m pari et $\vdash$ vo t quoque, poterit per . . .»

Pag. 460 ℣. 9 a calce ultima vox «datur» suppleta est.

Pag. 461, ℣. 2 «$\vdash b$» est scriptum pro «$-b$».

Ibidem ℣. 3—4 inæqualitates ibi occurrentes in ed I ita erant adscriptæ:

$$c-(-b)<-b$$
$$c+b<\pm b.$$

Ibidem, ℣. 6 pro «$t\vdash$ sit» scriptum est «t positivum sit.»

Hosted by Google

Pag. 462, ℣. *13*, «Sint» emendatum est in «Sit».

Pag. 463, ℣. *9 a calce* voci «perpendiculis» quod error typothetæ deformaverat, substituta est forma recta: «perpendicularibus.»

Pag. 468, ℣. *5—6 a calce* «nusquam» scriptum est pro «nuspiam», quod non est Latinum.

Pag. 469, ℣. *7* vox «valor» vocabulum «ubique» præcedens supervacanea erat ideoque omissa est.

Ibidem vocabula «positivum» et «negativum» perperam posita permutata sunt in ℣℣. *15*, *16 et 18*; ℣. *17* vero termino *m* sin. *mz* signum — in ed. I omissum præpositum est.

Pag. 472, § *44* post verba «addenda sunt» reliqua, quæ in ed. I sequuntur nempe

> «ceteris in quantum instituti ratio permittit, tomo secundo reservatis; quum in hoc adhuc *generalis conspectus Geometriae* exponendus veniat, ut arbor utraque corradicata (§ 9) delineetur»

omittenda censuimus. Nos enim omnia, quæ ad Arithmeticam pertinent in tomum primum recepimus, omnia vero quæ geometrica sunt in parte altera prodibunt.

Pag. 474, ℣. *7 a calce* scriptio mendosa «apellari» emendata est in «appellari.»

Pag. 479. Quæ hic «de beatitudine» leguntur in ed. I. pagg. XXXIII—XXXVI erant exposita, et inde sunt desumpta. Ceterum Bolyai quum animadvertisset in prima pagina introductionis vocem «brachiis» per errorem omissam esse et hoc annotavisset, huic observationi elucubrationem *A.* subiunxit, quam integram hic inseruimus. Vocem «brachiis» suo loco (pag. 5 sub 2, ℣. 2) apposuimus.

Hosted by Google

Pag. 481. Quæ hic sub *B.* de proportionibus, logarithmis numerationeque Arabica sequuntur in ed. I. pagg. XXXVIII—LII continentur.

Initio huius sectionis in ed. I, Bolyai enumerat eas partes «tentaminis» quas tyrones studium primum ingressi omittant. Hæc pro ratione huius editionis omittenda censuimus.

Pag. 482 vocabulum «fit» in fine ℣. 1. ut superfluum omissum est.

Pag. 489, ℣. *3 a calce* «(—2)-tuplicata» est scriptum pro «(—1)-tuplicata».

Pag. 491 art. penultimo in ed. I. post vocem «applicationibus» lector per clausulam «in tomo sequente» minus præcisam habuit indicationem, quam per citationem substitutam «pag. 512—20 et 569—81.»

Pag. 492, ℣. *9* pro «nempe» interposito puncto scriptum est «Nempe».

Pag. 495, in editione prima his verbis desinit:

«Operationes, et reliqua, tomo secundo reliquuntur». Cum nos operationes et reliqua in hunc primum tomum recepissemus, hæ voces omittendæ erant.

Pag. 496. Quæ hic sub C. et *Pag. 512* sub D. sequuntur, in ed. I tomo II pagg. 336—356 continentur.

Pag. 515 sub IV et V vide ed. I. tom. II. pagg. 377—379.

Pag. 516, *§. 2*, ℣. *4* «Est» scripsimus pro «Erat (Tom. I, pag. 162)» Indicatio uncinis inclusa omissa est, occurrit enim mox iterum in pag. sequenti suo loco. Huc proprie non pertinet.

Pag. 517, ℣. *11* pro «(Tom I. ibidem)» scriptum est «(pag. 187)»

Hosted by Google

Pag. 518 in æquatione tertia ultimus terminus nominatoris ut ratio calculi postulat in «$-\frac{1}{2}f$» erat mutandus, itemque art. 3 pro «10 millionibus» scribendum erat «100 millionibus».

Pag. 521. Tota hæc sectio E. inscripta desumpta est ex Ed. I. Tom. II. pag. 402 et Tom. I. pag. CXVII.

Pag. 522, ℣. 2 indicationes ad Tom. II remittentes non constant itaque omissæ sunt.

Pag. 524. Sectio *F.* inscripta ex ed. I, Tom. II. pag. 357—371 est desumpta.

Pag. 524, §. *1.* in Ed. I. sic orditur:

> «Tom. I. pag. 33, ubi definitio multiplicationis prius oritur pro § 20 et 21 debuisset § 19 et 21 citari; imo citata repetere clarius fuisset. Potuisset autem a definitionibus proportionis (Tom. I. pag. 65) datis incipiendo harum æquivalentia cum prius data demonstrari. Sed generalissima . . .»

Loco citato qui in hac editione pag. 40, § 26 continetur, emendatio indicata iam facta est, itaque hanc dictionem omisimus; sed et sequentem dictionem ut supervacaneam in hanc editionem recipiendam non duximus; pagina citata ceterum in hac editione 75-ta est.

Pag. 526, 2, ℣. 12 imperante grammatica pro «iidem» scribi debuit «eadem», sc. eadem *m* pro iisdem certis *B* et *D*.

Pag. 528, §. *5.* Huc respiciens Bolyai (Tom. II, pag. 401, ℣. 7—3 a calce) hæc adnotat:

> «Regula data, in arithmetica pura, aut ad puram reducta, clara est: si vero heterogenea in concreto accipiantur,

Hosted by Google

regula (Tom. I, pag. 122, 1) data simplicior est. Atque non negativum solum, sed et mixtum radice gaudet.»

Ibidem ℣. *10*, pro «negativo 1» lucidius est quod scripsimus «negativa unitate.»

Ibidem ℣. *6 a calce* pro citata pag. 85, editio prima perperam habuit pag. 79, quæ in hac editione paginæ 91 respondet.

Pag. 533. «Unum adhuc casum notare licet; . . .» Bolyai hic differentiam inter communes regulas multiplicationis et divisionis et inter suam definitionem proportionis (pag. 528—9) demonstrat.

Pag. 538 ℣. *11 a calce* pro «$1^{1:0}=1$» scripsimus «$1^{1:0}=A$».
Idem fecimus pag. 543 in dictione penultima.

Pag. 540, sectio *G.* inscripta ex ed. I., Tom. I. pagg. LIV—LVIII est desumpta; titulum «Relatio brevis additamenti antecedentis» ipsi præposuimus. Ibi vero hæc relatio erratis erat subiuncta hac introductione interposita:

> «Notandum etiam est: quosdam conceptus in tomo primo traditos, ad finem tomi 2-di clarius simpliciusque expressos esse; quod cum ex indice omissum sit, breviter referre pro iis saltem, qui nonnisi primum tomum habebunt, haud supervacuum erit.»

Pag. 543 post ℣. *4* in ed. I. additum erat: «Neque $N=M$ ibidem excluditur»; quod omissum est, huius enim correctionis in hac editione iam habita est ratio.

Confer præterea ad hanc paginam etiam pag. 552, art. 1.

Pag. 544. Dilucidatio hæc nova H. inscripta pagg. LXXVI—LXXXVI tomi II, ed. I continetur. Bolyai hæc notæ ad unitatem spectanti inter errata ei occurrenti subiunxit, ideoque iis titulum «scholion» præposuit, atque his verbis est orsus: «Sit fas quoad unitatem et conceptus prima-

Hosted by Google

rios breviter referre» Quum vero nos omnia quæ de unitate disseruit in Annotata (ad pag. 609) retulerimus, titulum «scholion» et verba «quoad unitatem et» omisimus.

Pag. 544, ℣. 9 a calce «quod si non esset, resultatum o esset» pag. 28 clarius ac lucidius est expositum.

Pag. 552, ℣. 12 loco «$\log._a A$» positum est «$\frac{\log._a A}{\log._a B}$» ita enim scribi oportere e sequentibus apparet.

Pag. 554, ℣. ultimo «$= \frac{ac-bd}{a^2-b^2}$» insertum est.

Pag. 556. Sectio quæ hic J. inscripta sequitur in ed. I. Tomi II-di pagg. 323—336 occupavit.

Pag. 565, ℣. 6 indicationem: «(pag. 563)» addidimus.

Pag. 567, ℣. 2, indicationem «(p. 98)» ad Tomum II-dum respicientem omitti posse censuimus.

Ibidem ℣. 2. a calce pro «seriei» scribi debuit «series».

Pag. 568, ℣. 4 vox trunca «terminor» expleta est scribendo «terminorum».

Pag. 569, sectio *K.* inscripta in ed. I. Tom, II. pagg. 388—400 erat exposita.

Addito titulo pleno, ℣℣. præmissi in ed. I. hic omitti potuerunt.

Ibidem ℣. 7 a calce «decrescit» erat scribendum pro »crescit» nam hic etiam signi præpositi ratio habenda erat.

Pag. 571. ℣. 15 signum $<$ mutandum erat in $>$.

Pag. 579—580. Hic post scholion 1. in ed. I quædam sequebantur,

Hosted by Google

quæ observationem ipsius Bolyai pag. XC, ed. I insertam secuti omisimus.

Pag. 582. Quæ hic sub L, «Criteria convergentiæ serierum» inscripta sequuntur, in ed. I. Tom. I. pagg. XCI—XCVI continebantur.

Ex annotationibus operi «Arithmetika Eleje» in secunda editione posterius additis apparet, has disquisitiones post annum 1843 demum ortas esse, atque auctorem nondum novisse huc spectantem lucubrationem ABELI in periodico «Crelle Journal» jam 1828 editam, eoque minus literaturam recentiorem criteria logarithmica tractantem.

Pag. 584 ℣℣. 14—22 in ed. I. Tom. I. pag. XCVIII sub X erant inserti. Ut facilius legi possint, huc transtulimus.

Ibidem ℣. 9, incisum «logarithmos perinde quoad basim 10 intelligendo» additum est; in sequentibus enim hoc plane supponitur (confer, quæ sub finem huius paginæ apposita sunt); ibidem etiam apposuimus ℣. 3 a calce relationem $\frac{1}{1000 \cdot 3^a} \cdot 9000 < \gamma$.

Ibidem ℣. 9 in dextra parte æquationis denominatori addi debuit l quod nonnisi errore typothetæ exciderat.

Pag. 592. Sectio M. «Primæ lineæ calculi differentialis et integralis brevius et clarius tractatæ» in ed. I. Tom. I. pagg. LXI—LXXIV legitur, ubi erratorum indici subnexa quibusdam versibus introducitur, quos hic repetere nihil attinuit.

Ad art. I. huius paginæ notandum est γ nullo pacto posse $= 0$ esse.

Pag. 594 sub V iterum tacite supponitur

$$u(m\dot{x}) - a[(m-1)\dot{x}] \quad \text{et} \quad u(m\dot{x}) - b[(m-1)\dot{x}]$$

signa præposita per totum intervallum non mutare; (vide ad pag. 211, ℣. 6 notata).

Pag. 600 sub 5 ℣. 3 verbum «decrescenteve» insertum est. Vide

Hosted by Google

Errata, paginarum LXXVI, quæ bis occurrunt, primam. Hic etiam annotationes sequentes leguntur:

Notandum autem est 1. quod hoc pacto, utvis mutato integro n, eatenus mutatum m fractum fieri possit; atque tum per m-tum $\dot{x}$ ut in seriebus m-tus terminus intelligendus esset: ex. gr. si m fiat $7:3$ significaret m-tum $\dot{x}$ septimum $[\gamma:3n]$.

2. Sed clarius simpliciusque est, variabilem absolutam x recta exprimendo, per x in $a(x)$ idest $A(x)-A(x-\dot{x})$ intelligere quamvis abscissam, quæ a 0 incipiendo in certa ipsius γ parte C[aut continua aut e certis aliquot continuis constante] terminatur; per $\dot{x}$ autem intelligere ipsum γ per integrum n divisum; si vero variabilis alia z quoque in expressione dicta adsit, certa positionis simultaneæ conditione ab absoluta dependens, per z ibidem intelligatur valor variabilis huius cum dicto x simultaneus, idest quo ad finem illius x gaudet; et si valor variabilis eiusdem ipsi $x-\dot{x}$ repondens z' dicatur, per $\dot{z}$ in tali expressione intelligatur $z-z'$, quod manifesto incrementum variabilis dependentis dictæ est, dum absoluta ex $x-\dot{x}$ addito incremento $\dot{x}$, fit x.

Sintque talia, $u(x)$ et $U(x)$ ab n dependentia, ut pro quovis n et m [Ed. II. pag. 210.] sit $u(m\dot{x})=U(m\dot{x})-U((m-1)\dot{x}.)$ Si iam pro quovis dicto x demonstretur quod sit $\frac{u(x)}{a(x)}<1$, adeoque pro quovis utvis magno N detur tale n [finitum omnino] ut $u(x)-a(x)$ sit $<\frac{a(x)}{N}$; et ad cuiusvis abscissæ in C terminatæ finem erecta ordinata, exprimatur n minimum illi x satisfaciens; erit hæc finita ex omni puncto ipsius C.

Quo pacto accipi recta potest, quamvis ordinatarum superans, adeoque n quovis dictorum maius.

Et si tam $\gamma-\beta-C$ quam summarum A et U partes

Hosted by Google

eidem appertinentes $\backsim 0$, dum $n \backsim \infty$; (Ed. II. pag. 598) dicta facile applicantur.

Potestque *differentiale* dici $u(x)$ ipsum sensu hoc, tali forma gaudens, aut ad talem (per Ed. II. pag. 217) reductum, ut in quovis eius termino litera punctata sola, et in prima potentia sit: nempe per id priora intelligantur.

Pag. 601, ℣. 17. Mutato modo denotationis vocabula »clausam» et «clausa» post «maiorem» et «minori» delenda fuerunt.

Pag. 602, sub 7 in fine clausula «ut ibidem» ut otiosa deleta est.

Pag. 605, ℣. 2 pro t ponendum erat $\dot{t}$.

Pag. 606, 9 a calce in ed. I. auctor sic erat orsus: «Pariter (pag. 222) calculum error irrepsit. Est nempe». Quoniam error iste calculi suo loco iam emendatus est, nihil attinebat eius mentionem fieri, itaque articulus sic incipit: «Si vero . . .». Exemplum ipsum vero iam propter adnotationem ei subnexam omitti non potuit.

Pag. 607. Observatio art. *c)* præcedens in ed. I, eadem est, quæ iam pag. 254 initio art. primi exposita erat, ideoque eam hinc omisimus.

Pag. 609, ℣. 3 in ed. I (pag. LXXIV) hæc sequebantur: «ubi $\sqrt{\frac{1}{g}}$ (quantacunque fuerit unitas) idem manet, ut antea».

Ad hæc Bolyai pag. LXXV non satis lucide sequentia observat:

«Pag. LXXIV non solum post $\sqrt{\frac{1}{2g}}$ omissum est *non*; sed g ex toto omitti debuisset: nam $\pi : \sqrt{2g}$ nonnisi pro $g=1$ valet; at $\pi : \sqrt{2}$, nempe 3,14 . . . : 1,41 . . . pro quavis unitate valet modo sequenti. Si quid de quavis unitate indeterminata F' demonstretur, et unitas quæsiti x dicatur f' pro $F'=1$, atque prodeat ex. gr. $x=\frac{2}{3}F'$;

Hosted by Google

tum pro casu speciali, si dum generale F' specialiter F fit, generale f' specialiter f fiat, erit $x = \frac{2}{3} f$.

Nempe certa unitas dependet ab altera: ex. gr. si pro temporis unitate ponatur τ, et pro rectarum unitate s, via in certo loco sub $\tau = 1$ libere labentis: erit unitas velocitatis illa, qua sub τ æquabiliter s describeretur. Applicando ad motum libere labentis; ubi spatia sunt uti temporum (atque etiam uti velocitatum finalium) quadrata, estque velocitas ad imum spatii cuiusvis tanta, ut ea sub tempore lapsus duplum spatii illius describeretur æquabiliter; atque hinc si tempus T, spatium S, et velocitas finalis v sit: erit

$$s : S = \tau^2 : T^2, \quad \text{id est} \quad 1 : S = 1 : T^2$$

item

$$s : S = (2s)^2 : v^2, \quad \text{id est} \quad 1 : S = 2^2 : v^2.$$

Itaque

$$T = \sqrt{S}, \quad \text{et} \quad v = \sqrt{4S}$$

ubi radice quoad $s = 1$ extracta prius numerum ipsorum τ dabit, sub quibus labens spatium S describit, posterius numerum ipsorum $s = 1$, quæ velocitate quæ ad imum ipsius S est, æquabiliter sub $\tau = 1$ describentur.

Si iam pro spatii unitate ponatur via sub $\tau = 1$ libere labentis: erit (pag. LXXIII)* $v = \sqrt{s(h-x)}$ et prodibit tempus quæsitum $= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tau$ in genere; at si specialiter ex. gr. $s = 1 = 9g$ fiat, $\tau = 3''$ erit, et pro $s = kg$ (quantitatem abstractam denotante k) dabit $\sqrt{kg}$ quoad $g = 1$ accepta radice numerum secundorum quibus τ æquale est; unde fiet: «$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{k}$, quod item $= 3{,}14\ldots \sqrt{\frac{s}{2g}}$».

* In ed. II. pag. 607.

Hosted by Google

Pag. 610. «Expositio brevis methodi qua primæ lineæ calculi differentialis in opere Hungarico tractantur» hic sub *N.* repetita, invenitur in ed. I. Tomo I. pagg. LXXXVIII—XC.

Pag. 611, ℣. 5—11 constructio dictionis uti omissio vocabuli «quod» desiderat in constructionem accusativi cum infinitivo mutata est.

Pag. 611, III, ℣. 9 loco «B» in ed. I scriptum erat $(B)\gamma$.

Pag. 612, ℣ 1. et 2 loco «$n-p+1$» in ed. I scriptum erat «p» et loco «ordinata maxima» litera «k».

Hosted by Google

ERRATA.

Pag. 11, ℣. *4 a calce* «apogogicae» pro «apagogicae» est error typothetae.
Pag. 22, ℣. *2 a calce* pro «necquidquam lege «nec quidquam».
Pag. 24, § *3,* ℣. *4,* pro «ab» . . . lege : «ad».
Pag. 43, ℣. *4 a fine* § *3,* vocabulum «vero» ita est supplendum «at vero».
Pag. 52, IV. ℣. *3* pro «necquidquam» lege «nec quidquam».
Pag. 53 ℣. *3 a calce* pro «*o*» lege «=».
Pag. 64, ℣. *5 a calce* pro «Fig. 17» lege «Figg. 17*a*, 17*b*, 17*c*».
Pag. 77, versu ultimo pro «iisque» lege «atque».
Pag. 82, sub 9) ℣. *9,* pro «vero» lege «est vero».
Pag. 99, ℣. *5 a calce* literas a prelo excussas supplendo pro «ve» lege «vero».
Pag. 103, sub 9) ℣. *7* «$a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{v}{\mu}}$» corrigendum est in $a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{v}{m}}$.
Pag. 107 ℣. *9* pro «negativum» lege «negativus».
Pag. 108, ℣. *art. 16* ℣. *4* pro «$\frac{m \pm 1}{n}$» lege «$\frac{n}{m \pm 1}$».
Pag. 122, ℣. *5 a calce* «duobus» lege »duabus».
Pag. 123, ℣. *6 a calce* vocem «duae» corrige in «duo».
Ibidem ℣. *12 a calce* pro «elevatas» lege «elevatus».
Pag. 145, ℣. *7 a calce* pro «*i'*» lege «*i*».
Pag. 149, ℣. *2* pro «obtuitu» lege «obtutu».
Pag. 153, ℣. *4 a calce* pro «tertia» lege «tertii».
Pag. 154, ℣. *10* pro «summan» lege «summam».
Pag. 171, ℣. *4* a calce pro «videtur» lege «videre est».
Pag. 175, ℣. *3 a calce* pro «fieritque» lege «fieretque».
Pag. 175, ℣. *4 a calce* post «positi sint» apponendus est uncinus parenthesim claudens.
Pag. 179, ℣. *2 a calce* pro «substitituto» lege «substituto».
Pag. 184, ℣. *1,* pro erroneo «$e<1$» lege : «$e>1$».
Ibidem ℣. *9, 10* pro «sit α semper $\frac{a}{n}$» lege: «sit semper $\alpha = \frac{a}{n}$».
Ibidem ℣. *3 a calce* pro «$\frac{u'^2}{2 \cdot 3}$» «lege $\frac{u'^3}{2 \cdot 3}$».
Pag. 185 ℣. *4* ad dextram signi = omissum est signum «—».
Pag. 192, ℣. 5 *a calce* pro «novem» lege «novum».
Pag. 204, in ipsa inscriptione sectionis ℣. 3 in fine pro «linea» lege «lineae»
Pag. 205 sub 3. ℣. *2* pro «quantatis» lege «quantitatis».
Pag. 218, ℣. *11* pro «illustrabantur» lege «illustrabuntur».
Ibidem ℣. 11 *a calce* pro «differentalium» lege «differentialium».
Pag. 230, ℣. 7 et *a calce* ℣. 3, ℣. 9 pro «*t*» lege «*i*».

Hosted by Google

Pag. 231. ℣. 4 pro «$\int t$» lege «$\int \dot{t}$».
Pag. 232 ℣. *11* pro «$\int gt$» lege «$\int g\dot{t}$».
Pag. 232, ℣. 5 *a calce* pro «$v\,(nt)$» lege «$v\,(n\dot{t})$»
Pag. 248, c) ℣. 2 et 5 pro «m-ti t» lege «m-ti $\dot{t}$».
Pag. 249, ℣. 1 et 8 pro «m-to t» lege «m-to $\dot{t}$».
Pag. 266, ℣. *1* pro »P» lege «p».
Pag. 292, ℣. 1 *art.* 7 pro litera trunca «i» lege «t».
Pag. 297, ℣. *8* pro «cirea» lege «circa».
Pag. 315, ℣. *3 a calce* pro »d ci» lege «)dici».
Pag. 328, ℣. *11* pro «positivum» lege «positivus».
Pag. 353, ℣. *1* pro «aliquamdim» lege «aliquamdiu».
Ibidem ℣. *14* pro «ist» lege «sit».
Pag. 359, ℣. *2 alinea* 3 pro «α» lege «a».
Pag. 379, ℣. *ultimo* pro «eorsum» lege «deorsum».
Pag. 461 ℣. *10, 11* pro «imaignaria» lege «imaginaria».
Pag. 472 ℣. *4* pro «x^3» lege «x^2».

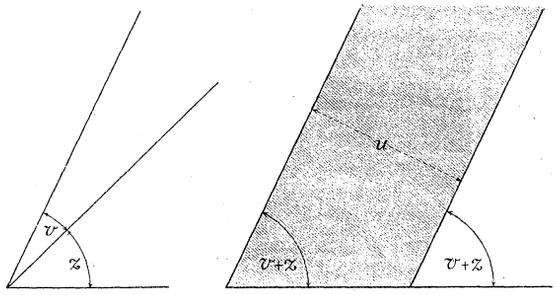
Hosted by Google

Hosted by Google

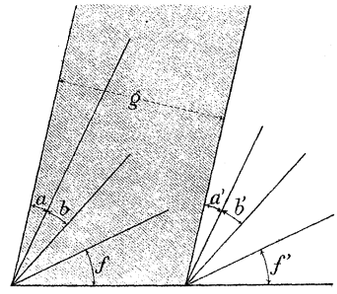
Tab.I.Fig 1-11.

Hosted by Google

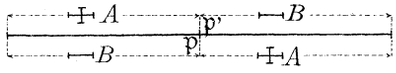
1.



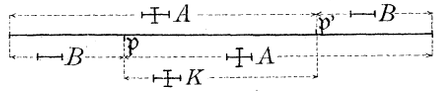
2.



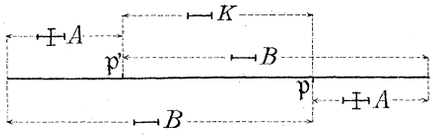
4.



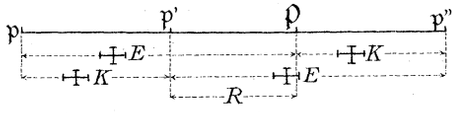
5.



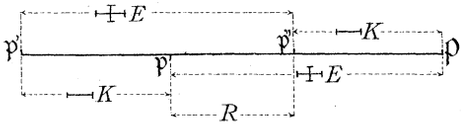
6.



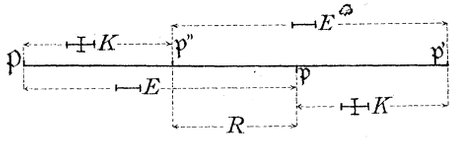
7.



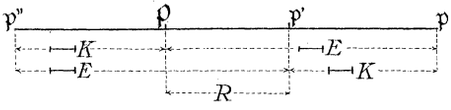
8.



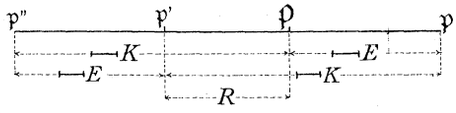
9.



10.



11.



Del. TŐTÖSSY B.

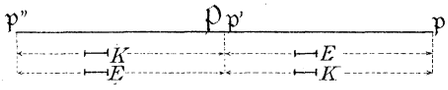
Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google

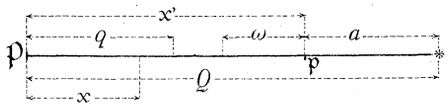
Tab. II. Fig. 12-16, 17 bis.

Hosted by Google

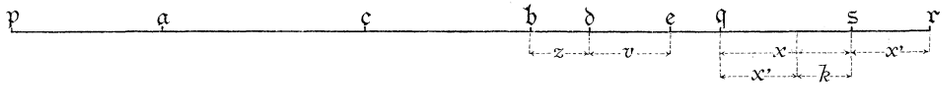
12.



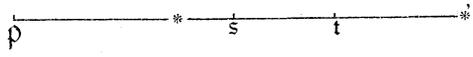
13.



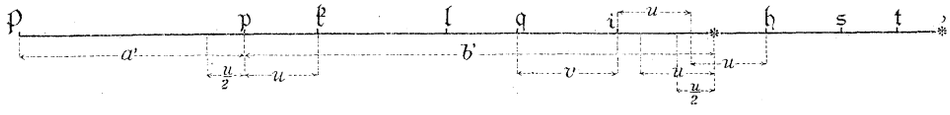
14.



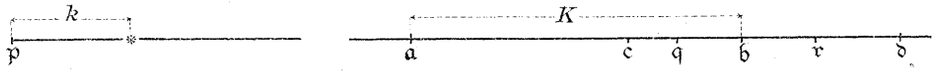
15.



16.



17. bis.

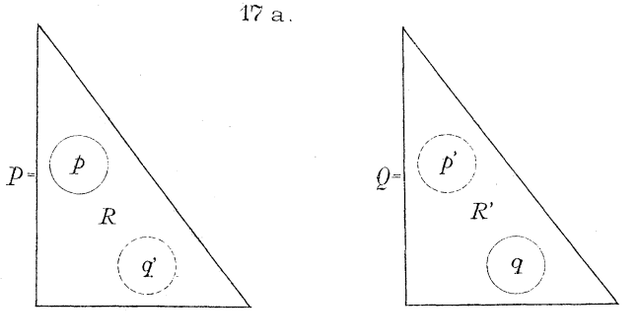


Hosted by Google

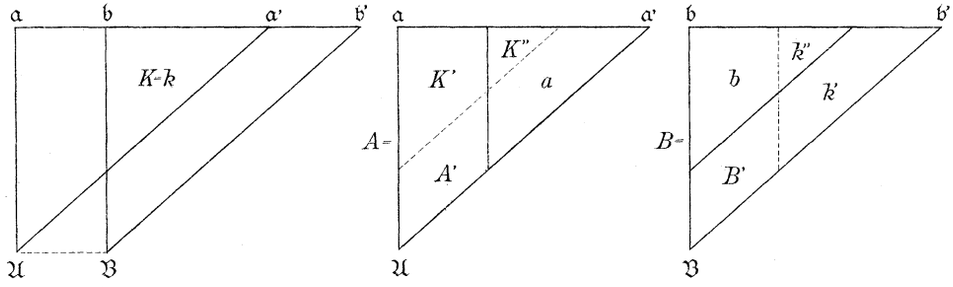
Tab III. Fig 17 a, b, c.

Hosted by Google

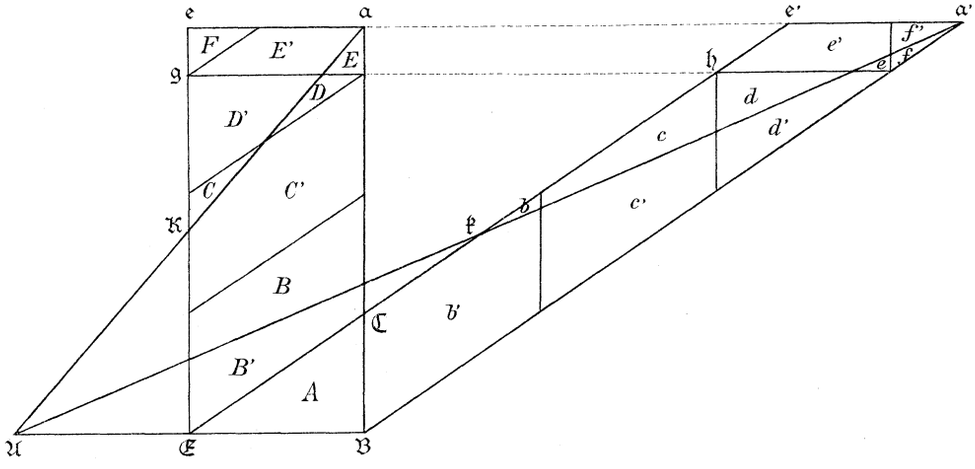
17 a.



17 b.



17. c.



Del. TÖTÖSSY B.

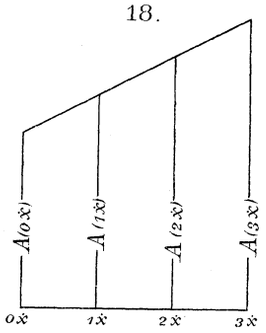
Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google

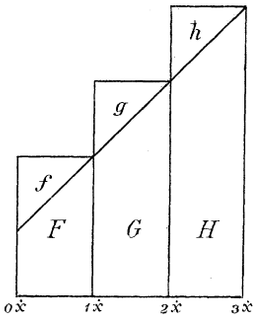
Tab IV. Fig 18-24.

Hosted by Google

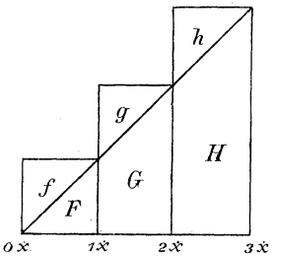
18.



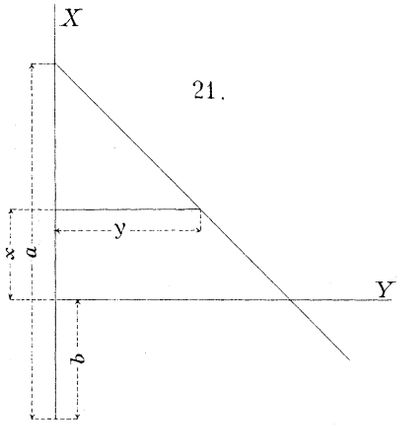
19.



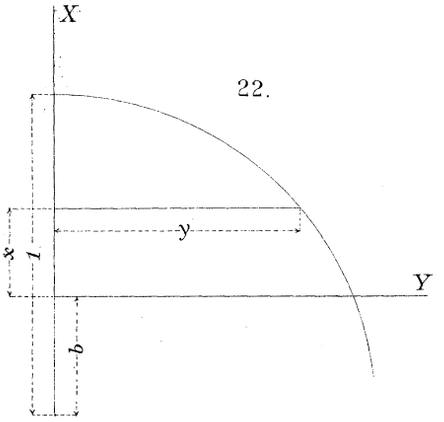
20.



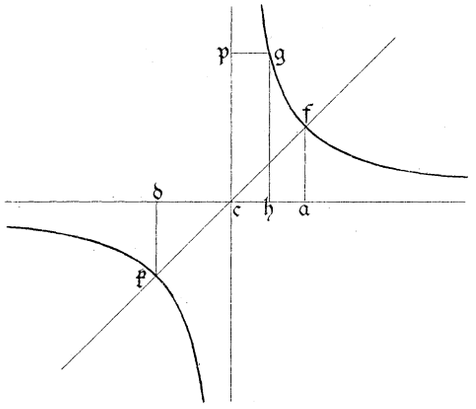
21.



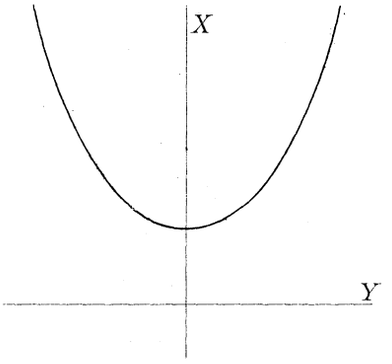
22.



23.



24.

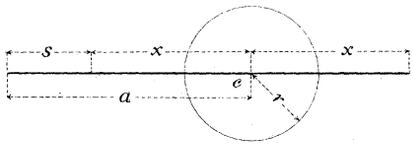


Hosted by Google

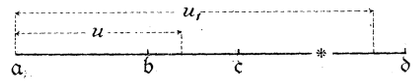
Tab V. Fig 25–32.

Hosted by Google

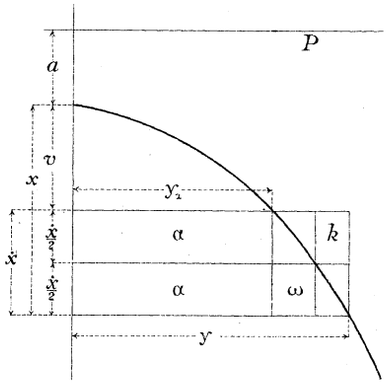
25.



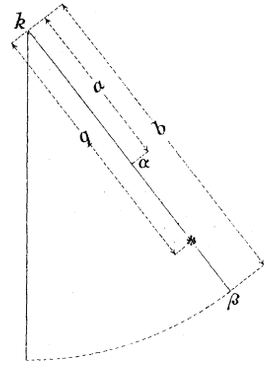
26.



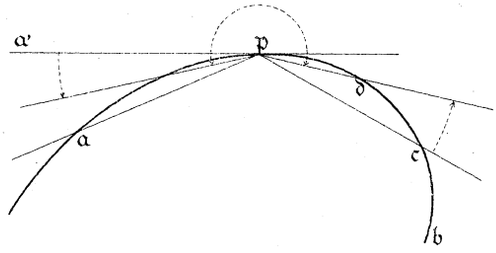
27.



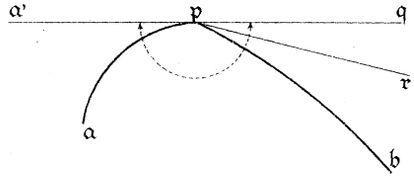
28.



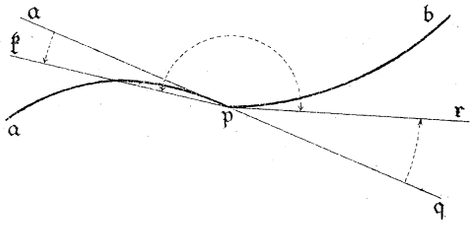
29.



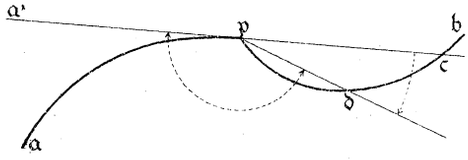
30.



31.



32.

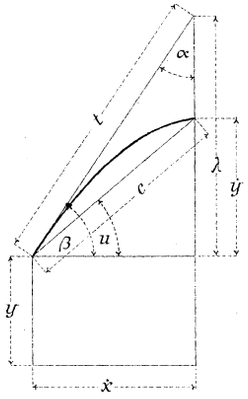


Hosted by Google

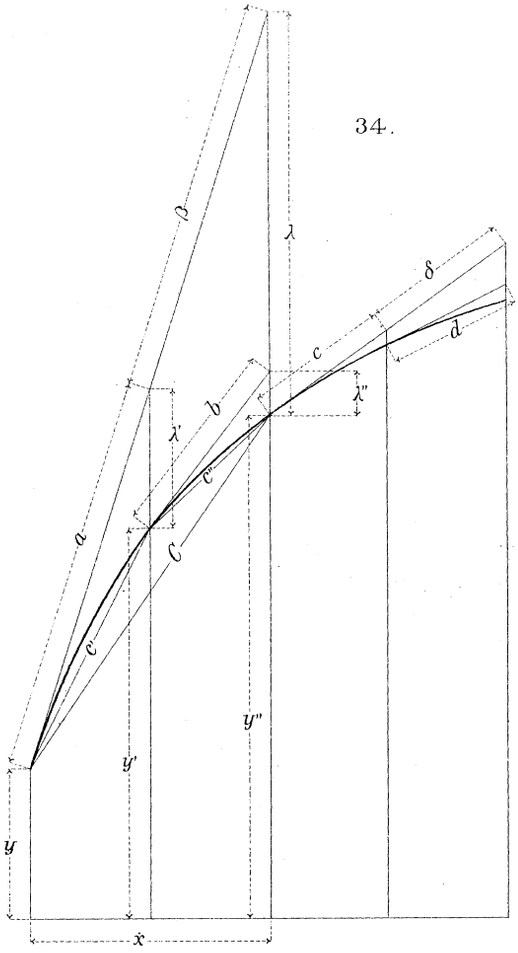
Tab VI. Fig 33-36.

Hosted by Google

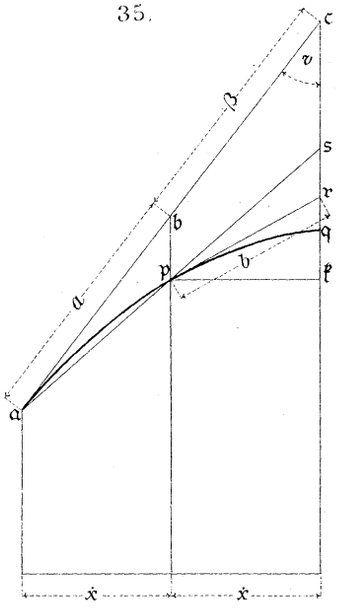
33.



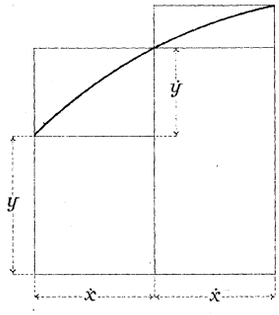
34.



35.



36.



Del. TÖTÖSSY B.

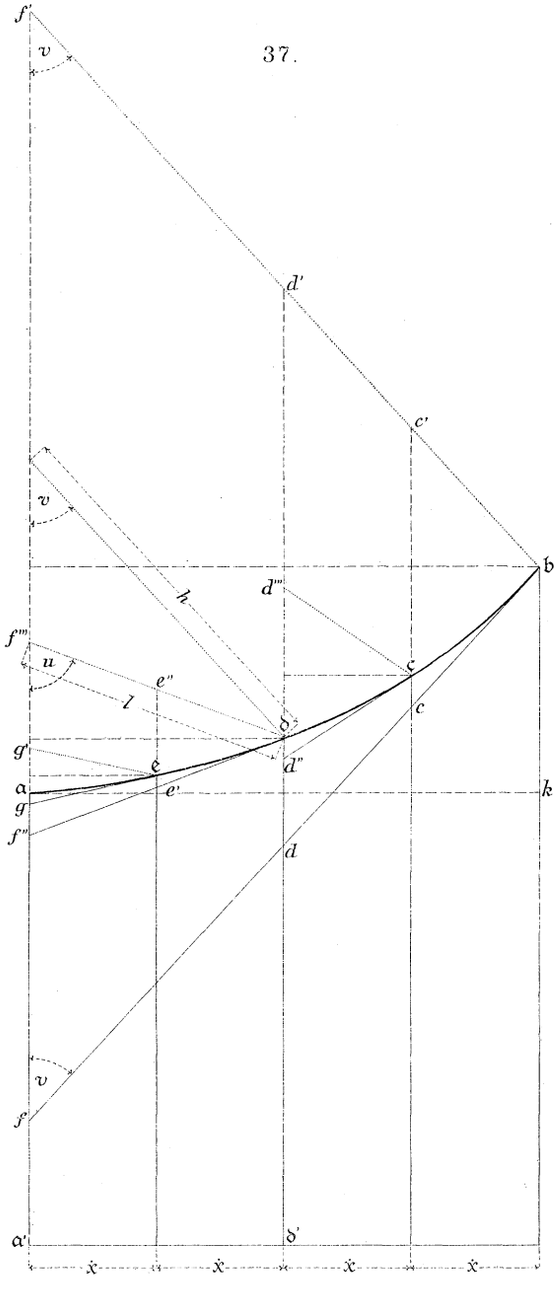
Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google

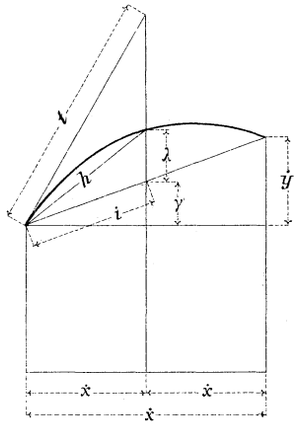
Tab VII. Fig 37–39.*

Hosted by Google

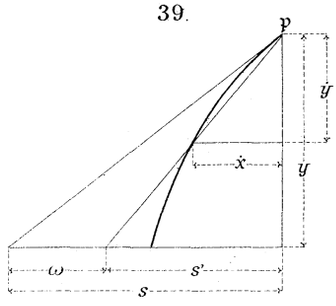
37.



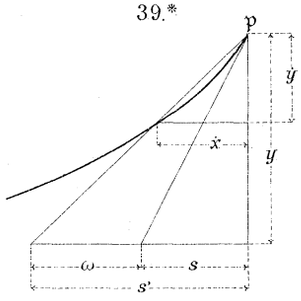
38.



39.



39.*



Del. TÖTÖSSY B.

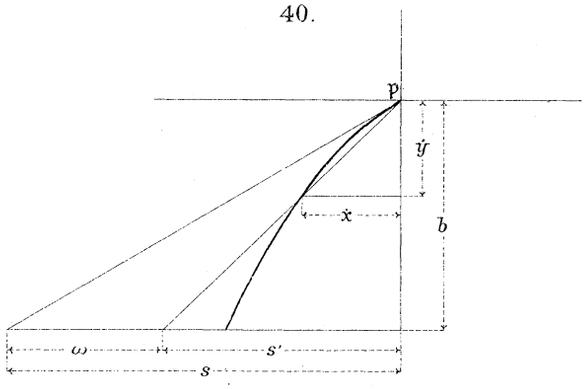
Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google

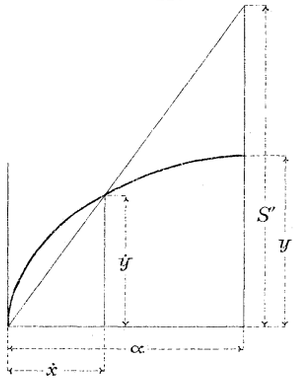
Tab VIII. Fig 40-44.

Hosted by Google

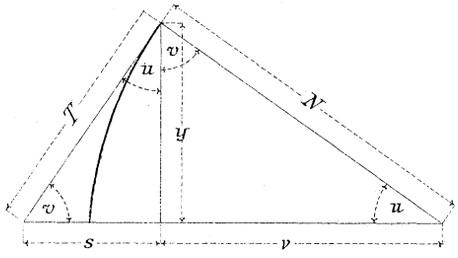
40.



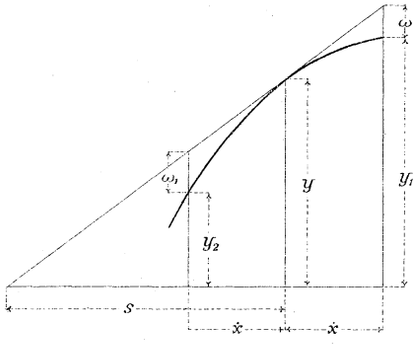
41.



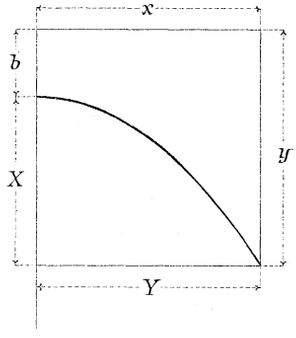
42.



43.



44.



Del. TÖTÖSSY B.

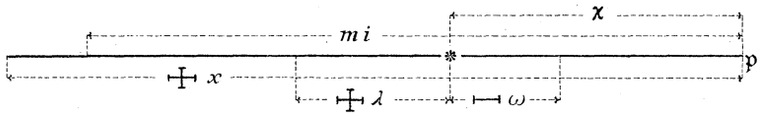
Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google

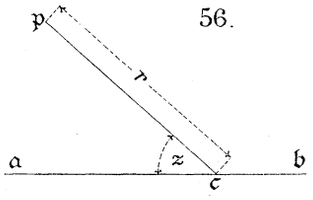
Tab IX. Fig 45 - 50 *

Hosted by Google

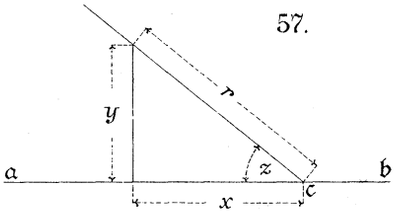
55.



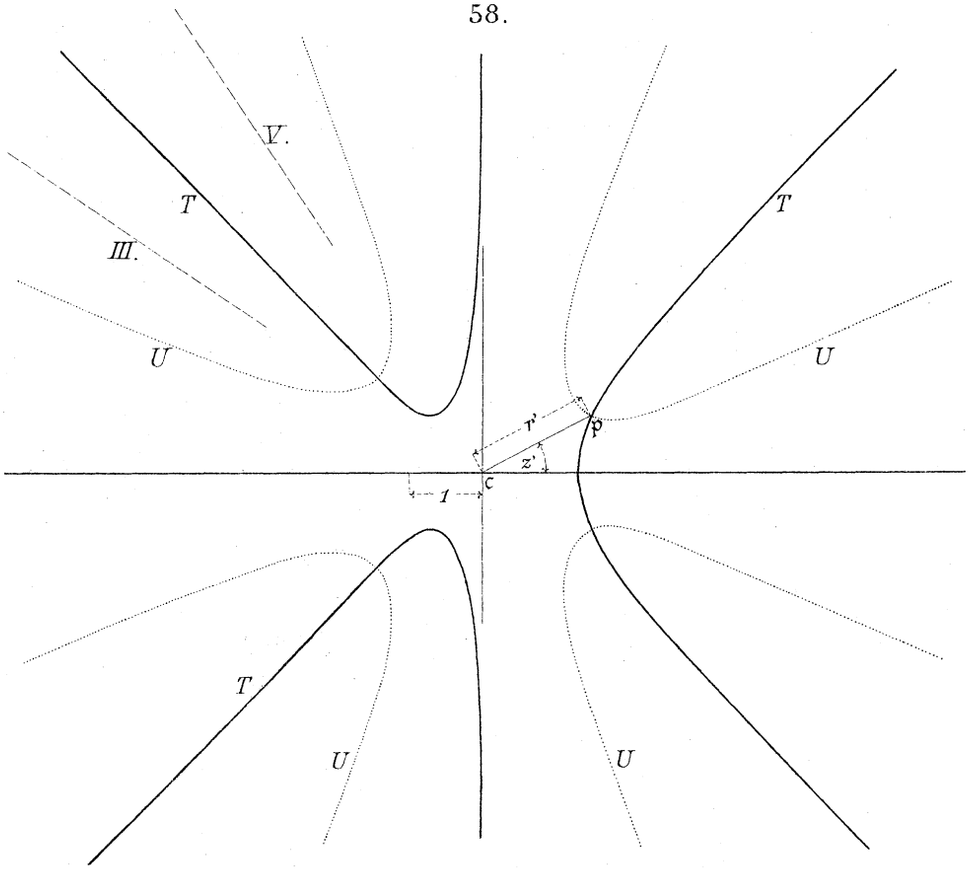
56.



57.



58.



Del. TÖTÖSSY B. Lith. GRUND V. utódai.

Hosted by Google